

REGIONE  
TOSCANA



**Prodotto realizzato con il contributo della Regione Toscana  
nell'ambito dell'azione regionale di sistema**

# **Laboratori del Sapere Scientifico**

# GEOMETRIA COSTRUTTIVA

Dalle costruzioni con riga e compasso alle deduzioni delle proprietà geometriche dei triangoli .

Primo biennio della scuola secondaria di secondo grado.

# COLLOCAZIONE DEL PERCORSO

Il percorso è stato effettuato nel primo biennio di un Istituto Tecnico Tecnologico Statale, con cadenza settimanale, nella seconda parte dell'anno scolastico.  
Ha coinvolto cinque classi.

# OBIETTIVI ESSENZIALI DI APPRENDIMENTO

- 1) Saper descrivere e giustificare le costruzioni geometriche fondamentali eseguite con riga e compasso.
- 2) Saper individuare nelle costruzioni geometriche i casi possibili, impossibili e degeneri.
- 3) Saper enunciare e dimostrare semplici teoremi sulle proprietà dei triangoli.
- 4) Saper costruire piccole e semplici catene deduttive applicando i criteri di congruenza dei triangoli.

## ELEMENTI SALIENTI DELL'APPROCCIO METODOLOGICO

La trattazione classica della geometria nel primo biennio fa ricorso a processi di astrazione, utilizza procedimenti rigidi e richiede un passaggio brusco rispetto al linguaggio utilizzato nel precedente livello di istruzione.

Sulla base di tali considerazioni abbiamo ritenuto opportuno seguire un diverso approccio nello studio della geometria, introducendo, in ambito numerico, i concetti di: definizione, congettura, verifica, contro esempio, teorema, ipotesi, tesi, tecniche di dimostrazione.

I contenuti geometrici sono introdotti attraverso l'esplorazione di costruzioni con riga e compasso, nelle quali l'allievo è guidato a formulare congetture e relative verifiche, per dedurne, in seguito, teoremi e relative dimostrazioni.

## MATERIALI, APPARECCHI E STRUMENTI IMPIEGATI

- Fogli bianchi formato A4, carta lucida, lapis e matite colorate, righello non graduato, compasso, forbici.
- Lavagna, personal computer e software Geogebra, LIM.

## AMBIENTI NEI QUALI È STATO SVILUPPATO IL PERCORSO

- Aule assegnate alle classi.
- Aula LIM.
- Laboratorio di matematica.

# TEMPI IMPIEGATI

- 1) Due riunioni di due ore ciascuna , per un totale di quattro ore.
- 2) Sei ore di progettazione di tutti i docenti e sei ore di progettazione in sottogruppi.
- 3) Quindici ore distribuite in quattro mesi del secondo periodo dell'anno scolastico, di norma un'ora a settimana.
- 4) Una mattina, in orario extrascolastico, impiegata per la visita al "Giardino di Archimede", per valutare la possibilità di far svolgere alle classi una visita tecnica .
- 5) Sei ore per la documentazione.

# PRODUZIONE DEL QUADERNO-MANUALE

Durante il percorso gli allievi raccolgono e organizzano in un quaderno:

- le costruzioni geometriche,
- le definizioni,
- le proprietà,
- i teoremi che sono stati sviluppati durante le discussioni in classe.

Tale quaderno diventa quindi un manuale al quale riferirsi nello studio individuale.

Alcuni studenti hanno realizzato tale quaderno-manuale in formato elettronico.

# SINTESI DEL PERCORSO DIDATTICO

- Step 1 Attività introduttiva: congetture, verifiche, dimostrazioni e teoremi in ambito numerico.
- Step 2 Gli oggetti di base della Geometria: dalle costruzioni alle definizioni.
- Step 3 La disuguaglianza triangolare e Criterio LLL (Terzo criterio di congruenza dei triangoli).
- Step 4 Trasporto di angoli. Bisettrice. Operazioni e proprietà degli angoli.
- Step 5 Criterio ALA (Secondo criterio di congruenza dei triangoli).
- Step 6 Criterio LAL (Primo criterio di congruenza dei triangoli).
- Step 7 Triangoli isosceli.

# METODOLOGIA

I contenuti dell'unità didattica sono stati introdotti attraverso un iter metodologico che si è sviluppato secondo le seguenti fasi:

- FASE 1. Assegnazione di una consegna (individuale o di gruppo).
- FASE 2. Discussione in classe delle consegne più significative.
- FASE 3. Deduzione delle definizioni, delle proprietà e dei teoremi.
- FASE 4. Compilazione del quaderno-manuale.

# SVILUPPO DELLE FASI

- **FASE 1**. Per lo svolgimento delle consegne gli studenti devono attenersi alle seguenti regole:
  - *eseguire le costruzioni con circonferenze complete (non archi);*
  - *non eseguire mai le costruzioni in casi particolari;*
  - *esaminare tutti i casi: POSSIBILI e IMPOSSIBILI;*
  - *scrivere una breve relazione che spieghi come è stata eseguita la costruzione; quali casi particolari sono stati osservati e quali proprietà sono state dedotte.*
- **FASE 2**. L'insegnante seleziona le consegne più significative e guida la discussione in classe, dalla quale dovranno scaturire i contenuti da riportare sul quaderno-manuale.
- **FASE 3**. Si guidano gli allievi a formalizzare i contenuti utilizzando un linguaggio specifico e corretto.
- **Fase 4**. Il quaderno-manuale può essere anche oggetto di valutazione.

Come fase propedeutica allo studio della geometria abbiamo ritenuto opportuno far eseguire alcune attività che richiedono procedure dimostrative simili a quelle geometriche, ma che si riferiscono all'ambito numerico. La sequenza delle attività proposte ha seguito il seguente iter:

LIVELLO 1: analisi, deduzioni e verifiche di congetture (vere o false), di proprietà ricavate dall'osservazione ed espresse in linguaggio matematico;

LIVELLO 2: proprietà, proposizioni e teoremi con relative dimostrazioni.

# ESEMPI DI ESERCIZI SVOLTI

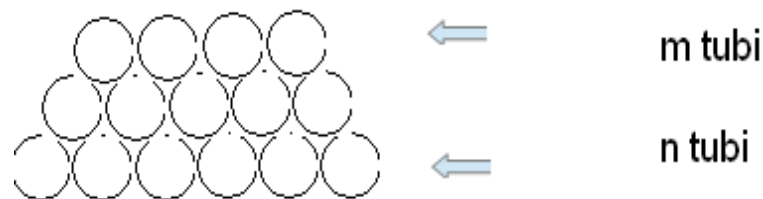
LIVELLO 1: analisi, deduzioni e verifiche di congetture.

## OSSERVAZIONE

1. Su una circonferenza segna 2 punti e collegali. Quante regioni si formano? Adesso segna tre punti e collegali in tutti i modi possibili. Prova con 4 punti. Cosa pensi della congettura che afferma che il massimo numero di regioni che si formano sia dato dalla formula dove  $n$  è in numero di punti? Pensi siano sufficienti i dati che hai a disposizione? Hai provato a contare il numero di regioni che ottieni segnando 5 punti? E con 6 punti cosa succede ?

## OSSERVAZIONE E TRADUZIONE IN LINGUAGGIO MATEMATICO

2. Alcuni tubi circolari aventi tutti lo stesso raggio sono impilati come risulta dal seguente disegno:



Se indichiamo con  $n$  il numero di tubi posti alla base e con  $m$  il numero di tubi posti più in alto, quale tra le due seguenti formule:

$$1) N = \frac{(n+m) \cdot (n-m+1)}{2} \quad 2) N = \frac{3 \cdot (m+n)}{2}$$

ti sembra possa dare, in generale, (anche quando ci sono 4 o più file di tubi) il numero totale di tubi che sono impilati?

## OSSERVAZIONE, VERIFICA E TRADUZIONE

3. Considera le seguenti uguaglianze:

$$1^2 + 2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7}{6} \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9}{6}$$

Scrivi altre uguaglianze di questo tipo. Quale congettura pensi di poter formulare? Esprimi la tua congettura mediante un'uguaglianza. (Suggerimento  $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \dots$ ).

## CONGETTURE FALSE: OSSERVAZIONE E CONTROESEMPIO

4. La differenza tra un multiplo di 6 e 1 è uguale a un numero primo.

Osservazione:  $2 \cdot 6 - 1 = 11$ ,  $3 \cdot 6 - 1 = 17$ ,  $4 \cdot 6 - 1 = 23$ ,  $5 \cdot 6 - 1 = 29$

Controesempio:  $6 \cdot 6 - 1 = 35$

Vengono assegnati per casa esercizi del tipo:

5. Tutti i numeri primi sono dispari.

LIVELLO 2: dimostrazioni.

## DIMOSTRAZIONE DIRETTA

1. Dimostra che se  $x$  è un numero dispari, allora  $x^2 - 1$  è un multiplo di 4.

**Ip:**  $x$  è un numero dispari

**Ts:**  $x^2 - 1$  è un multiplo di 4.

### Dimostrazione

N.	Proposizione	Motivazione
1	$x = 2n + 1$	
2	$x^2 = (2n + 1)^2$	
3	$x^2 - 1 = (2n + 1)^2 - 1$	
4	$x^2 - 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 1$	
5	$x^2 - 1 = 4(n^2 + n)$	

## DIMOSTRAZIONE PER ASSURDO

2. Per ogni naturale  $n$ , se  $n^2$  è pari, allora  $n$  è pari.

**Ip:**  $n^2$  è pari, con  $n \in \mathbf{N}$

**Ts:**  $n$  è pari

## Dimostrazione

N.	Proposizione	Motivazione
1	$n = 2 \cdot k + 1, k \in \mathbf{N}$	Per definizione di numero dispari (NEGAZIONE DELLA TESI)
2	$n^2 = (2 \cdot k + 1)^2$	
3	$n^2 = 4k^2 + 4k + 1$	
4	$n^2 = 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1$	
5	$n^2 = 2a + 1$	
6	$n^2$ è dispari	

Il punto 6 risulta in contraddizione con l'ipotesi ( $n^2$  è pari), di conseguenza la tesi è vera.

3. Come ulteriore esempio di dimostrazione per assurdo, si esegue la dimostrazione dell'irrazionalità di  $\sqrt{2}$ .

## METODOLOGIA

In questa unità didattica si presentano i primi “oggetti” della geometria euclidea: punto, segmento, retta, piano, angolo.

Il metodo scelto è quello induttivo–deduttivo, giustificando le definizioni e le proprietà attraverso le costruzioni con riga e compasso.

Gli alunni vengono sollecitati ad analizzare la figura in modo da estrapolare osservazioni, in seguito dovranno trasformare le osservazioni fatte in deduzioni, che devono essere valide in qualsiasi caso.

Al termine di questa fase, durante la quale si privilegia il linguaggio naturale, gli alunni formulano delle definizioni che costituiranno il punto di partenza per il loro glossario della geometria. Soltanto al termine dell’unità didattica si confronteranno tali definizioni con quelle riportate sul libro di testo, passando quindi al linguaggio specifico.

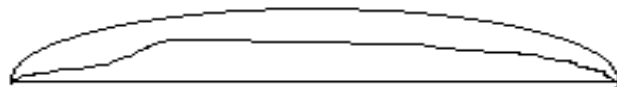
Non verranno presi in considerazione né enti fondamentali, né assiomi.

## **OBIETTIVI**

- Individuare le “figure” primitive della geometria e saperle analizzare.
- Svolgere operazioni con segmenti e angoli.
- Riconoscere relazioni fra segmenti e angoli.

### **FASE 1**

Nella prima fase attraverso il disegno si deducono le definizioni di punto e segmento. Inizialmente si fissano due posizioni distinte sul foglio e si uniscono con vari percorsi.



Con un filo vengono trovate le varie lunghezze, ogni ragazzo noterà che la misura più piccola è data dal percorso rettilineo, formulando la seguente:

**DEFINIZIONE**: Il **SEGMENTO** è il percorso più breve che unisce due posizioni. Le due posizioni si dicono estremi.

Se gli estremi sono sovrapposti si ottiene una figura degenera, la cui lunghezza è nulla.

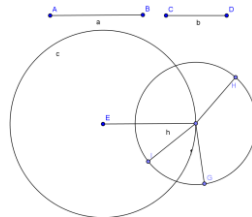
**DEFINIZIONE 1**: Il **PUNTO** è il segmento in cui i due estremi coincidono.

A questo punto si può dare una definizione più formale del segmento.

**DEFINIZIONE 2**: Il **SEGMENTO** è la linea più breve che unisce due punti.

## FASE 2

Dopo aver illustrato il trasporto di un segmento, s'invitano gli alunni a disegnare due segmenti dati in modo consecutivo (attingendo al significato del vocabolo in linguaggio naturale).



*Osservazioni degli alunni :*

- la costruzione non è unica
- tutte le costruzioni anche se diverse hanno la stessa caratteristica: un estremo in comune.

**DEFINIZIONE 3 : SEGMENTI CONSECUTIVI.** Sono segmenti che hanno un estremo comune.

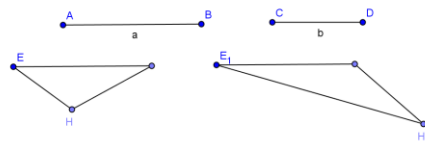
### FASE 3

Viene assegnato il seguente problema:

“Dati due segmenti disegnare un segmento che rappresenti la loro somma.”

Mediante un unico filo gli alunni misurano i due segmenti, quindi devono individuare come costruire un terzo segmento di lunghezza pari a quella trovata manualmente.

#### ESECUZIONE DEGLI ALLIEVI



Come si osserva dai disegni, i due segmenti sono stati rappresentati in modo consecutivo ed il segmento somma è ottenuto unendo poi le estremità.

*Osservazioni degli alunni :*

- il segmento EH non può essere il segmento somma in quanto più piccolo dei segmenti dati.
- Il segmento  $E_1H_1$  pur essendo maggiore, non è della lunghezza voluta.

- Disegnando genericamente due segmenti consecutivi non si ottiene la somma voluta.
- Disegnando due segmenti consecutivi dove tutti gli estremi possono essere uniti da una sola riga si ottiene un terzo segmento della misura voluta.

**DEFINIZIONE 4 (data dagli alunni): SEGMENTO SOMMA** è dato da due segmenti consecutivi in cui i quattro estremi sono collegati da una sola riga.

A questo punto gli alunni sono invitati a disegnare due segmenti adiacenti (non viene puntualizzato il significato di “adiacente”).

Errori emersi:

- consecutivi e adiacenti sono sinonimi.
- I due segmenti vengono disegnati uno di seguito all’altro ma senza avere punti in comune.

Da osservazioni collettive emerge la conclusione della corrispondenza fra segmento somma e segmenti adiacenti.

Attività complementari :

- **Dati tre segmenti disegnarli consecutivi.** Con questa attività si possono trattare le spezzate di qualunque tipo.
- **Dato un segmento costruire la sua metà.** Gli alunni in autonomia riprendono la costruzione del punto medio che hanno già affrontato a Disegno Tecnico, ottenendo il segmento voluto. E’ bene ribadire a questo punto la differenza fra **punto medio** di un segmento e **metà** di un segmento.
- **Dato un segmento costruire il suo doppio.**

Con le ultime due attività si vogliono introdurre i multipli e i sottomultipli di un segmento dato per giungere al concetto di misura.

## FASE 4

Si riprende la costruzione del segmento somma: mantenendo fissa la lunghezza di uno e aumentando la lunghezza dell'altro si ottiene un segmento somma di lunghezza sempre variabile (si vede velocemente utilizzando GeoGebra).

Potendo aumentare la lunghezza illimitatamente la figura ottenuta non può più essere chiamata segmento, perché un estremo non è noto.

Si riportano le definizioni formulate dagli allievi:

**DEFINIZIONE 5:** La **SEMIRETTA** è un particolare segmento con un estremo fisso e l'altro variabile.

## FASE 5

La definizione di **RETTA** si ottiene con procedimento analogo: tre segmenti consecutivi dove quello centrale è di lunghezza fissa, mentre gli altri due (costruiti ai lati) sono di lunghezza variabile.

**DEFINIZIONE 6:** La **RETTA** è segmento in cui non si possono individuare gli estremi.

Per introdurre la definizione di piano si fa riferimento al concetto di regione, anche qui attingendo al significato del vocabolo in linguaggio naturale.

Si mette in evidenza che tutti i punti racchiusi da una circonferenza descrivono una regione; allargando la circonferenza la regione aumenta.

Si chiede di pensare ad una circonferenza disegnata da un compasso con apertura infinita (*circonferenza esplosa*): la regione ottenuta non ha limiti. Questa regione è detta

**DEFINIZIONE 7: PIANO.**

## FASE 6

La definizione classica di angolo viene introdotta consultando il libro di testo. La lettura della definizione costituisce un'occasione per far comprendere agli studenti :

- l'ambiguità che la definizione di angolo può generare se non si precisa qual è la regione di piano che è delimitata dai lati dell'angolo
- la complessità della formalizzazione di una definizione, infatti in questo caso risulta necessario conoscere la definizione di regione concava o convessa.

**DEFINIZIONE 8:** L' **ANGOLO** è la regione di piano compresa fra due semirette aventi la stessa origine.

L'unità didattica si conclude dando le varie definizioni di angolo.

### **Osservazioni dell' insegnante**

Le attività svolte in modo così operativo richiedono più tempo; da parte del docente ci deve essere una frequente revisione degli appunti, per evitare che gli alunni affrontino questo nuovo metodo di studio in modo superficiale e giocoso.

E'utile ribadire che non si devono fare riferimenti alle conoscenze pregresse.

## **CONTENUTI INSERITI NEL QUADERNO-MANUALE**

- Definizioni di punto, segmento, segmenti consecutivi e adiacenti.
- Costruzione di segmenti somma e differenza.
- Costruzioni di multipli e sottomultipli di un segmento dato.
- Definizioni di semiretta, retta, piano.
- Definizioni di angolo, angolo concavo e angolo convesso.

### Step 3 LA DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE E IL CRITERIO LLL

Come prerequisito è necessaria la conoscenza delle definizioni di : spezzata, spezzata aperta, chiusa e intrecciata che viene acquisita con specifiche attività (vedi Step 2).

#### Condizioni di costruibilità di un triangolo: la disuguaglianza triangolare

##### **Consegna**

1. Disegna tre segmenti.
2. Costruisci, se è possibile, una spezzata chiusa con i tre segmenti disegnati.

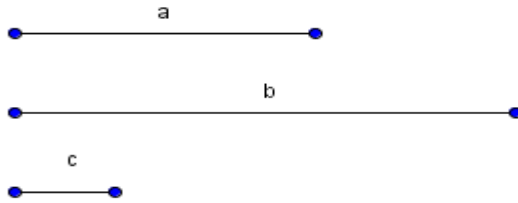
Qualora le scelte degli studenti non soddisfino tutti i casi possibili, l'insegnante fornisce una fotocopia con terne di segmenti già disegnati.

Dalla discussione degli elaborati emerge la condizione di costruibilità di una spezzata chiusa di tre lati (disuguaglianza triangolare), dalla quale si deduce la definizione di triangolo.

Dai casi osservati si ricava la definizione di triangolo degenere.

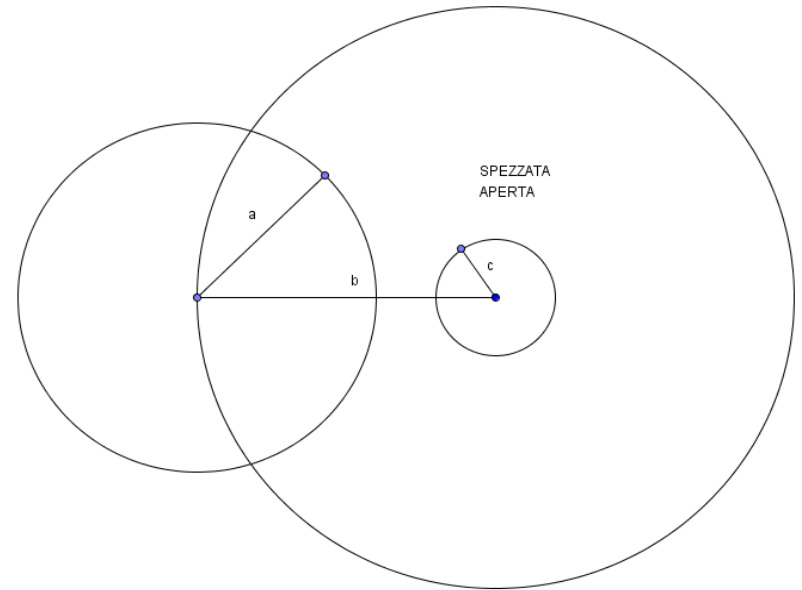
Si riporta l'attività svolta da uno studente nel suo quaderno-manuale, fatto con l'aiuto del pc (2°KB anno scolastico 2013/14).

1) Disegna la spezzata chiusa con i seguenti 3 segmenti:



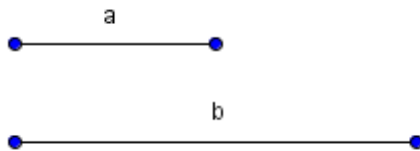
DEDUZIONI:

- $A + C < B$
- $B - C > A$
- $B - A > C$



QUESTE TRE DEDUZIONI DANNO LUOGO AD UNA SPEZZATA APERTA

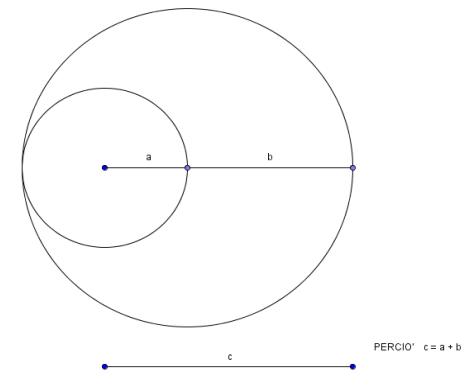
2) Disegna la spezzata chiusa con i 2 segmenti assegnati e il terzo ottenuto dalla somma dei primi due.



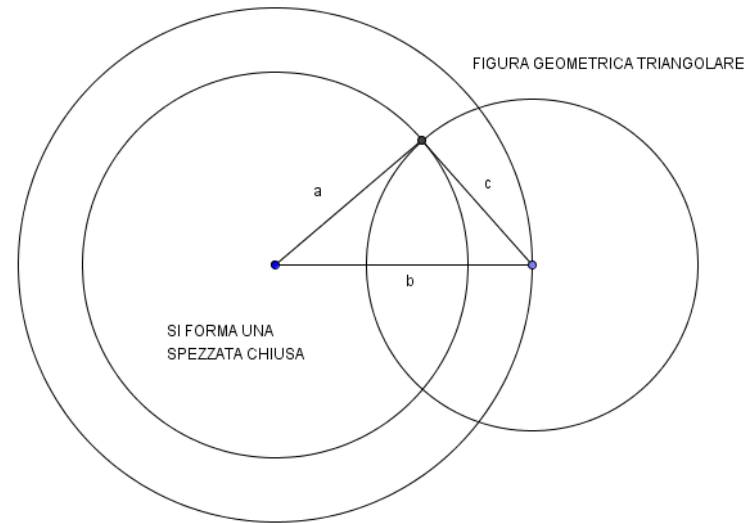
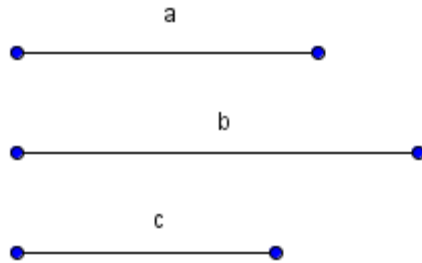
DEDUZIONI

SI È VERIFICATO CHE SE  $A+B=C$  SI HA UNA SPEZZATA

DEGENERE



3) Disegna la spezzata chiusa con i seguenti 3 segmenti:



DEDUZIONI:

SE  $A + C > B$  ;  $B - A < C$  ;  $B - C < A$  SI FORMA LA SPEZZATA CHIUSA.

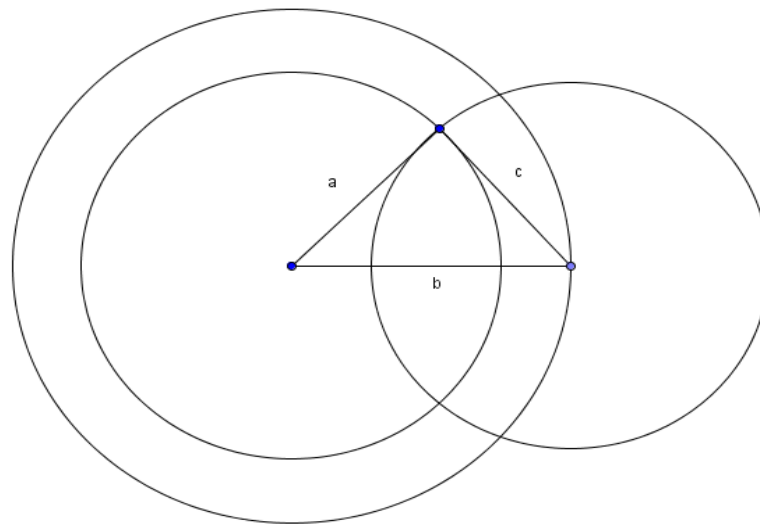
# IL CRITERIO LLL

Si assegna il seguente esercizio:

Si fornisce una fotocopia dove sono disegnati tre segmenti che soddisfano la disuguaglianza triangolare. Ogni allievo costruirà i triangoli di lati assegnati. Ad uno studente verrà fornito un pezzetto di carta lucida dove ritaglierà il triangolo costruito e si faranno colorare gli elementi del triangolo con colori diversi (per fare osservare, successivamente, la corrispondenza tra elementi congruenti). Facendo sovrapporre i triangoli ritagliati si farà osservare che tutti hanno costruito triangoli “uguali”.

Questa attività offre lo spunto per definire la congruenza.

Si riporta la figura costruita dallo studente di 2°KB



# CONTENUTI INSERITI NEL QUADERNO-MANUALE

- Le definizioni relative alle spezzate.
- La disuguaglianza triangolare: “tre segmenti soddisfano la disuguaglianza triangolare se ciascun segmento è minore o uguale della somma degli altri due e maggiore o uguale della loro differenza”.
- La definizione di triangolo e dei suoi elementi.
- La definizione di congruenza.
- Il criterio LLL (terzo criterio di congruenza)

## Step 4 IL TRASPORTO DI UN ANGOLO. LA COSTRUZIONE DELLA BISETTRICE. OPERAZIONI E PROPRIETA' DEGLI ANGOLI.

L'attività svolta nello step 3 (criterio LLL) fornisce lo spunto per:

- approfondire il concetto di angolo (già trattato nello Step 2) in un contesto diverso: elemento dei triangoli;
- fornire agli studenti i primi strumenti per affrontare dimostrazioni.

### *La definizione di angolo orientato*

Alla definizione classica si aggiunge la definizione di angolo orientato e cioè:

“date due semirette  $Oa$  e  $Ob$ , inizialmente coincidenti, si definisce angolo la regione di piano spazzata da una rotazione in senso antiorario dalla semiretta  $Ob$ . Le semirette date costituiscono i lati dell'angolo di vertice  $O$ .

La definizione di angolo orientato consente agli studenti di ricavare, in modo autonomo, le definizioni di angolo nullo ( $\hat{O}$ ), piatto ( $\hat{P}$ ), giro ( $2\hat{P}$ ) e retto ( $\hat{R}$ ).

## **La prima dimostrazione: il trasporto di un angolo**

**Consegna:** disegnare un angolo. Costruire un angolo ad esso congruente.

Illustrare la costruzione eseguita e giustificarne la validità.

La consegna viene eseguita, da quasi tutti gli allievi, costruendo l'angolo opposto al vertice all'angolo dato.

Durante la correzione in classe si precisa che la costruzione eseguita è corretta e si coglie l'occasione per illustrare la dimostrazione del teorema degli angoli opposti al vertice, ma si precisa che la consegna è stata svolta senza rispettare una regola e cioè che le costruzioni devono essere eseguite in casi generali e non in casi particolari.

Si guidano gli studenti nell'esecuzione corretta e cioè, dato l'angolo :

- si scelgono arbitrariamente due punti A e B, appartenenti rispettivamente ai lati  $Oa$  e  $Ob$  dell'angolo;
- si disegna il triangolo AOB;
- si costruisce un triangolo congruente ad AOB;
- si dimostra, mediante il criterio LLL, la congruenza dei due angoli.

#### APPLICAZIONI DEL TRASPORTO DI UN ANGOLO:

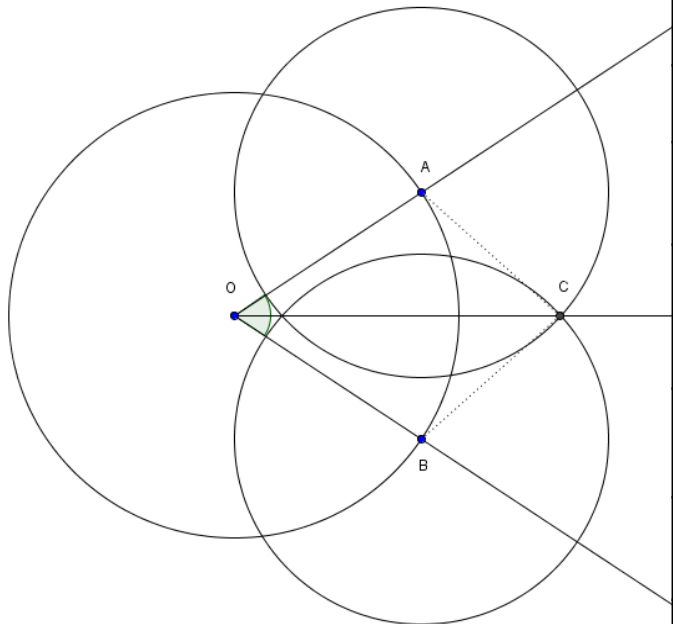
- Costruzione dell'angolo somma e dell'angolo differenza.
- Verifica della proprietà della somma degli angoli interni di un triangolo.

# UN' APPLICAZIONE DEL CRITERIO LLL

Si chiede di dimostrare la validità della costruzione della bisettrice di un angolo.

La costruzione di una bisettrice è già nota agli studenti dal corso di Disegno Tecnico. Richiederne la “giustificazione” oltre ad essere un esercizio di dimostrazione, aiuta a far comprendere che la geometria non è una branca della matematica contenitore di nozioni e formule, ma una disciplina basata su processi costruttivi e ipotetico -deduttivi.

Dimostrazione: Si considerano i triangoli OAC e OBC



N	Affermazioni	Motivazioni
1	OC	perché è in comune
2	$OA=OB$	perché è il raggio della 1° circonferenza
3	$AC=BC$	perché è il raggio della circonferenza tracciata con la stessa apertura
4	$OAC \cong OBC$ (triangoli)	Per il criterio LLL (1, 2, 3)
5	$\hat{A}OC \cong \hat{B}OC$	perché opposti a lati congruenti
6	OC è una semiretta che divide in 2 parti uguali AOB	per il 5

# CONTENUTI INSERITI NEL QUADERNO-MANUALE

- Definizione di angoli: nullo, giro, piatto e retto.
- Definizioni di angoli adiacenti e consecutivi.
- Il teorema degli angoli opposti al vertice.
- Il trasporto di un angolo (costruzione e dimostrazione).
- La bisettrice di un angolo (definizione, costruzione e dimostrazione).
- La costruzione dell'angolo somma e dell'angolo differenza.

## Step 5

# CRITERIO ALA (SECONDO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI)

A questo punto dell'attività gli allievi sanno come si esegue una consegna, quali sono i casi da analizzare e che si dovrà dedurre un criterio per stabilire la congruenza tra triangoli. Pertanto si assegna il seguente esercizio:

1. Disegnare due angoli ed un segmento (fig. 1)
2. Costruire, se è possibile, un triangolo avente tre elementi congruenti a quelli dati (fig. 2)
3. Spiegare in quali casi è possibile costruire il triangolo e in quali non lo è.

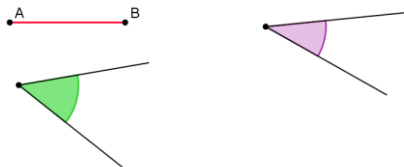
## **ANALISI DELLE CONSEGNE**

In tutti i casi gli allievi hanno disegnato il triangolo avente il segmento compreso tra i due angoli. Solo alcuni hanno analizzato i casi di non costruibilità (due angoli ottusi o retti,...) e con la guida dell'insegnante hanno dedotto il criterio.

In nessun caso è stato costruito il triangolo con il segmento non compreso tra i due angoli.

L'insegnante, con l'aiuto di Geogebra, può illustrare la costruibilità del triangolo anche in questo caso, evidenziando che non è congruente a quello disegnato dagli allievi, pertanto si sottolinea l'importanza della corrispondenza degli elementi congruenti (fig. 2)

Questa attività offre l'opportunità di far osservare che i triangoli costruiti sono equiangoli e con i lati in proporzione.

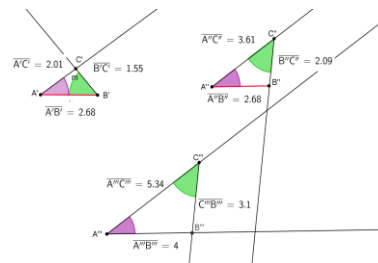


(fig. 1)

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{A'B''}} = \frac{2,01}{2,68} = 0,75$$

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C''}} = \frac{2,68}{3,61} = 0,74$$

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{B''C''}} = \frac{1,55}{2,09} = 0,74$$



$$\frac{\overline{A''C''}}{\overline{A'B''}} = \frac{5,34}{2,68} = 1,99$$

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{A''C''}} = \frac{4}{2,01} = 1,99$$

$$\frac{\overline{B''C''}}{\overline{B''C''}} = \frac{3,1}{1,55} = 2$$

(fig. 2)

## CONTENUTI INSERITI NEL QUADERNO-MANUALE

- Il criterio di congruenza ALA (Secondo criterio di congruenza)
- La definizione di triangoli simili.

## Step 6

# CRITERIO LAL (PRIMO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI)

Si propone la seguente attività:

Si fornisce una fotocopia dove sono disegnati due segmenti e un angolo. Ogni allievo costruirà i triangoli con gli elementi assegnati.

La costruzione non è immediata, gli allievi devono intuire che la spezzata chiusa si ottiene solo se i segmenti vengono riportati sui lati dell'angolo.

Successivamente si ripete lo stesso metodo usato per il criterio LLL, giungendo alla conclusione che i triangoli costruiti sono tutti congruenti.

Anche per questa attività è importante ribadire la corrispondenza fra elementi congruenti.

A questo punto si chiede agli allievi di dare una formalizzazione della costruzione eseguita:

“due triangoli con due lati e un angolo congruenti sono congruenti”.

Successivamente si confronta questo enunciato con quello riportato sul libro di testo ponendo l'attenzione sulla necessità di inserire “angolo compreso”

## **CONTENUTI INSERITI NEL QUADERNO-MANUALE**

- Il criterio LAL (primo criterio di congruenza)

## LA DEFINIZIONE DEL TRIANGOLO ISOSCELE

L'analisi delle proprietà del triangolo isoscele offre l'opportunità per precisare la differenza tra l'enunciato di una definizione e quello di una proprietà.

Infatti quando si richiamano le conoscenze pregresse, nella maggior parte dei casi non risulta chiara la suddetta differenza.

La costruzione del triangolo isoscele, come richiesta nella seguente consegna, aiuta a precisare la definizione.

### CONSEGNA

“Costruisci un triangolo isoscele di lato assegnato”.

# LE PROPRIETÀ DEL TRIANGOLO ISOSCELE

## CONSEGNA

“Costruisci un triangolo isoscele e la bisettrice del suo angolo al vertice. Cosa osservi?”

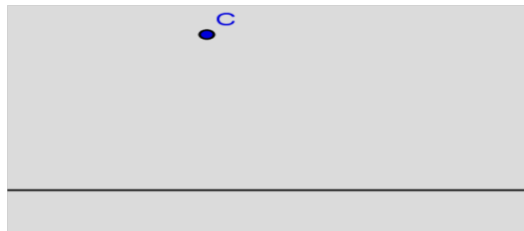
Durante la discussione in classe, con l'aiuto dell'insegnante, si dimostrano le seguenti proprietà:

- gli angoli alla base sono congruenti;
- la bisettrice è sia altezza che mediana.

A questo punto, come esercizi si richiedono:

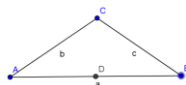
- le dimostrazioni dei teoremi inversi relativi al triangolo isoscele.
- La dimostrazione della validità della costruzione di una retta perpendicolare ad una retta assegnata, passante da un punto esterno, come illustrato di seguito.

“Data una retta  $r$  e un punto  $C$  esterno ad essa costruire una retta passante per  $C$  che intersecando la  $r$  forma due angoli retti “



Tramite una circonferenza con centro  $C$  si individua un segmento sulla retta  $r$  e si determina il punto medio del segmento.

Il disegno che si deve analizzare è del tipo:



Si passa quindi a dimostrare che i triangoli  $ACD$  e  $CBD$  sono congruenti.

N.	Proposizione	Motivazione
1	$AC = CB$	Perché raggi della stessa circonferenza
2	$AD = DB$	Per costruzione
3	$\hat{C}AD = \hat{C}BD$	Perché angoli alla base del triangolo isoscele
4	$CAD \cong CBD$	Per il criterio LAL
5	$\hat{C}DA = \hat{C}DB$	Perché opposti a lati congruenti in triangoli congruenti
6	$\hat{C}DA$ e $\hat{C}DB$ retti	Perché angoli adiacenti e

Si giunge quindi alla:

### **Definizione di altezza**

*Osservazione:* l'esistenza è giustificata dalla sua costruibilità

# CONTENUTI INSERITI NEL QUADERNO-MANUALE

- La definizione di triangolo isoscele
- I teoremi relativi
- La costruzione della retta perpendicolare ad una retta data e conseguente definizione.

# BIBLIOGRAFIA

- “Quaderno interattivo di Geometria” di M. Alessandra Mariotti, Domingo Paola, Ornella Robutti, Daniela Venturi. (Lavoro realizzato con il finanziamento del CNR).
- “Matematica attiva” di P. M. Gianoglio, P. Arri, G. Ravizza – Editore Il Capitello.
- “Matematica con... - Geometria” di G. Cipriani, M. P. Fico - Editore Loescher.
- “La matematica a colori” Ed. verde per il primo biennio di Leonardo Sasso - Editore Petrini.
- “Matematica verde” volume 1 di M. Bergamini, A. Trifone, G. Barozzi Editore Zanichelli.
- "Metodi e modelli della matematica" Linea verde vol 1 di L. Tonolini, F. Tonolini, G. Tonolini, A. Manetti Calvi, G. Zibetti – Editore Minerva Scuola.

# VERIFICHE DEGLI APPRENDIMENTI

- Verifiche in itinere con esercitazioni individuali, svolte in classe o a casa.
- Verifiche orali attraverso le discussioni collettive, eventualmente guidate dall'insegnante.
- Verifiche attraverso la revisione del quaderno-manuale.
- Verifiche sommative scritte.

# ESEMPI DI VERIFICHE

## Verifica sommativa

1) Le seguenti frasi danno definizioni inesatte o incomplete, correggile scrivendo le definizioni giuste. Disegna una figura che rappresenti la definizione inesatta ed una che rappresenti quella esatta.

A Due segmenti si dicono consecutivi se hanno in comune un punto.

B Si dicono consecutivi due angoli aventi un lato in comune.

2) Definisci l'angolo, disegna un angolo e indica le sue parti.

3) Disegna una spezzata chiusa non intrecciata.

4) Disegna due segmenti e poi fai la somma. Indica qual è il segmento somma.

5) Disegna due angoli e poi fai la differenza. Indica qual è l'angolo differenza.

6) I segmenti AB e CD appartengono alla stessa retta ed hanno lo stesso punto medio. Come sono tra loro i segmenti CA e BD? Giustifica la risposta.

7) Dato il seguente teorema, fai il relativo disegno e individua quali sono l'ipotesi e la tesi: "In un triangolo isoscele le bisettrici degli angoli alla base sono congruenti". Riscrivilo nel modo seguente:

Ipotesi:...

Tesi:...

8) Due angoli acuti  $\alpha$  e  $\beta$  sono tali che  $\alpha > \beta$ , come sono fra loro i due angoli  $\alpha'$  complementare di  $\alpha$  e  $\beta'$  complementare di  $\beta$ ? Perché? Fai i disegni.

9) Stabilisci se le seguenti frasi sono vere o false giustificando la risposta:

- A) La somma di due angoli acuti è un angolo acuto.
- B) Se due angoli non nulli e non retti sono supplementari uno dei due è ottuso.
- C) Due angoli adiacenti sono supplementari .

10) Dati i tre segmenti assegnati, quanti triangoli puoi costruirci? Perché? Giustifica la risposta.

- A) Almeno uno
- B) Nessuno
- C) Soltanto uno



## Esempi di verifiche in itinere

### Dimostrazioni

1. Se un triangolo ha due angoli congruenti, allora è isoscele (costruzione e dimostrazione con tabella).
2. In un triangolo isoscele l'altezza e la mediana relative alla base e la bisettrice dell'angolo al vertice coincidono (costruzione e dimostrazione con tabella).

### Costruzioni e osservazioni

1. Costruisci un triangolo isoscele di base assegnata. Cosa osservi?
2. Dopo aver fornito sei segmenti di misure assegnate, si richiede di costruire vari tipi di triangoli (isoscele, rettangolo,...) utilizzando opportunamente i segmenti dati.


# RISULTATI OTTENUTI

L'unità didattica ha consentito di:

- Valorizzare le attitudini grafiche; potenziare le capacità di osservazione, analisi e deduzione .
- Utilizzare gli strumenti informatici , in particolar modo il software Geogebra.
- Imparare a costruire un manuale sul quale studiare.
- Valutare non solo con verifiche in itinere e sommative, ma anche attraverso discussioni collettive sulle analisi delle consegne e con la revisione del quaderno-manuale.

# ANALISI DEL PERCORSO

1. L'attività svolta ha cercato di far acquisire agli allievi la capacità di affrontare lo studio non limitandosi ai casi elementari o più comuni, ma ipotizzando situazioni non standard attraverso l'analisi e l'osservazione di tutti i casi possibili.
2. Per conseguire tale obiettivo è stato necessario:
  - Intervenire sulle conoscenze pregresse e sul metodo di studio della geometria euclidea;
  - Coinvolgere l'intera classe in tutte le attività, soprattutto durante le discussioni collettive.

- 
3. L'approccio allo studio della geometria non ha seguito l'iter classico e per alcuni aspetti può risultare poco rigoroso, ma ha avuto il pregio di coinvolgere tutti gli studenti, perché, nella fase iniziale, l'unica competenza richiesta è stata quella di saper utilizzare riga e compasso. Il ricorso all'astrazione, che crea di solito molte difficoltà, è stato così posticipato.
  4. La scelta effettuata è stata determinata dall'esperienza nell'insegnamento della geometria, svolto per anni con metodo classico, che evidenziava notevoli difficoltà, da parte degli allievi, nell'affrontare lo studio attraverso il processo rigido di astrazione, fino ad un vero e proprio rifiuto dell'argomento.

## VALUTAZIONE DELL'EFFICACIA DEL PERCORSO

Gli allievi si sono dimostrati ben disposti alla nuova metodologia e hanno sperimentato il gusto della scoperta.

In tal modo è stato naturale raggiungere almeno un primo livello nel processo di astrazione.

## ANALISI DELL'ATTIVITA' DEL GRUPPO DI RICERCA

Il progetto ha richiesto un impegno notevole nella elaborazione e nella stesura delle schede di lavoro.

Il controllo periodico degli elaborati e dei quaderni-manuale impegna notevolmente l'insegnante.

Tutte le attività sono state discusse e concordate all'interno del gruppo, consentendo di correggere o migliorare alcune impostazioni.

Questo approccio metodologico sarà applicato anche nello studio del parallelismo e dei quadrilateri e sarà inoltre collegato in modo naturale alla geometria analitica, dove saranno ricavate le equazioni dei luoghi geometrici dall'analisi delle costruzioni .