

REGIONE
TOSCANA



**Prodotto realizzato con il contributo della Regione Toscana
nell'ambito dell'azione regionale di sistema**

Laboratori del Sapere Scientifico

Macchine Matematiche. Esplorazione sulla costruzione di coniche

Classe seconda. Liceo Scientifico

Collocazione del percorso nel curricolo verticale

- Il percorso si è svolto in una classe seconda del liceo scientifico, nella parte finale dell'anno scolastico. Le Indicazioni nazionali di matematica prevedono, al termine del primo biennio, che lo studio delle funzioni quadratiche si accompagni alla rappresentazione geometrica delle coniche nel piano cartesiano. Vi sono anche indicazioni affinché vengano utilizzati per le costruzioni geometriche, oltre ai tradizionali strumenti (riga e compasso) anche programmi informatici di geometria. Il percorso da noi delineato cerca di mettere assieme le raccomandazioni contenute nelle Indicazioni utilizzando l'esperienza delle macchine matematiche come introduzione allo studio della rappresentazione delle funzioni quadratiche. Si affiancherà alla costruzione «fisica» dell'oggetto matematico la sua costruzione con strumenti informatici innovativi quali software di geometria dinamica open-source (GeoGebra).
- I prerequisiti sono dunque di due tipi: matematici e informatici. Per la matematica è necessario aver appreso a far uso del metodo delle coordinate cartesiane, rappresentando punti e rette. Per poter mettere a frutto l'esperienza delle macchine matematiche, traducendola in software di geometria dinamica servirà aver appreso i primi rudimenti di GeoGebra.

Obiettivi essenziali di apprendimento

- Confrontare ed analizzare figure geometriche, individuando proprietà e relazioni.
- Conoscere e saper definire la parabola come luogo geometrico di punti del piano.
- La parabola: equazione cartesiana ed elementi caratterizzanti.
- Tracciare per punti una curva.
- Individuare le proprietà di un luogo noto. Realizzare semplici costruzioni di luoghi geometrici

Approccio metodologico

I ragazzi vengono lasciati liberi di mettere le mani sull'oggetto fisico che dovrebbe generare l'oggetto matematico. Lavorano a gruppi, in un primo tempo senza guida dell'insegnante, che interviene solo in seguito nella fase di giustificazione (e successivamente dimostrazione) dell'ipotesi di lavoro elaborata autonomamente. Si tratta quindi di una "scoperta" che solo in una fase successiva viene formalizzata matematicamente, invertendo il classico processo: definire la parabola (l'ellisse, la circonferenza, l'iperbole ecc...) come luogo di punti, ricavare l'equazione cartesiana, ricavare le varie proprietà ecc...

Materiali, apparecchi utilizzati

L'attività utilizza le macchine realizzate dal nostro gruppo con la collaborazione del tecnico di laboratorio: parabolografo ed ellissografo. Sono costruiti su un piano di compensato con un filo e alcuni perni (punti fissi che corrispondono al fuoco o ai fuochi nel caso dell'ellisse). La direttrice nel caso della parabola è costituita da un listello di legno inchiodato alla parte inferiore del compensato. L'apparecchio verrà descritto maggiormente nel dettaglio nelle slides successive.

Ambienti in cui il percorso si è sviluppato

In una prima fase esplorativa nel laboratorio di matematica. Abbiamo infatti deciso che alcune attività (oltre a quella descritta qui, nel corso del triennio abbiamo svolte altri momenti laboratoriali di matematica) devono essere svolte anche per la matematica in un'area differente dall'aula. Abbiamo condiviso gli spazi con il laboratorio di scienze e biologia, collocandovi però le nostre macchine matematiche autocostruite. Lo spazio già di per sé, con i banchi e il lavoro necessariamente svolto a gruppi ha favorito un approccio diverso alla materia, facendo in parte scomparire quella «paura di sbagliare» che tanto impedisce un approccio gioioso e divertente alla matematica.

In una seconda fase si è svolta una discussione in aula sui risultati emersi. Si è quindi proceduto alla rielaborazione teorica anche con l'ausilio del libro di testo e delle spiegazioni dell'insegnante.

La parte finale dell'attività si è svolta nel laboratorio di informatica visto il coinvolgimento del software di geometria dinamica.

Tempo impiegato

- Per la messa a punto. Nel corso del triennio parte dell'attività formativa con esperti esterni è stata dedicata all'introduzione di GeoGebra e delle macchine matematiche. L'attività formativa totale è stata di 6 ore per GeoGebra e 8 ore per le macchine matematiche. A questa attività di carattere più generale sono seguiti due incontri del gruppo di matematica e fisica di LSS per un totale di 4 ore in cui si è elaborato il percorso a partire da quanto visto negli incontri formativi
- Per la progettazione dettagliata della classe: 8 ore. Anche in questo caso si è trattato di incontri tra gli insegnanti delle classi seconde (tre colleghi) coadiuvati dei coordinatori di LSS per la messa a punto del percorso, relativamente ai prerequisiti e per la costruzione fisica delle macchine stesse, con la collaborazione del tecnico di laboratorio.
- Per tempo scuola:
 - 2 ore in classe di introduzione;
 - 2 ore in laboratorio per l'esplorazione con la macchina matematica autocostruita;
 - 2 ore in laboratorio di informatica per gli approfondimenti con GeoGebra;
 - 2 ore di verifica su quanto affrontato.

(ovviamente non abbiamo riportato le ore necessarie per la costruzione dei prerequisiti, in particolare sono state dedicate 4 ore all'introduzione a GeoGebra, un prerequisito non proprio standard per una classe seconda...)

- Per produrre materiale: 12 ore. Si tratta di 4 ore in riunioni collettive del gruppo di matematica, oltre a 8 ore ciascuno per il coordinatore che ha seguito questo percorso e per il docente che lo ha effettuato in classe, che hanno lavorato in maniera autonoma per la preparazione della presentazione.

Bibliografia e sitografia

- Bartolini Bussi, Maria G., Maschietto, Michela, *Macchine matematiche*, Springer, 2006
- Prodi Giovanni, Foà Donata, *Scoprire la matematica: il metodo delle coordinate*. Ghisetti e Corvi, 2003.
- <https://www.geogebra.org/>
- <http://www.macchinematematiche.org/>
- <http://www.umi-ciim.it/materiali-umi-ciim/trasversali/riflessioni-sul-laboratorio-di-matematica/>

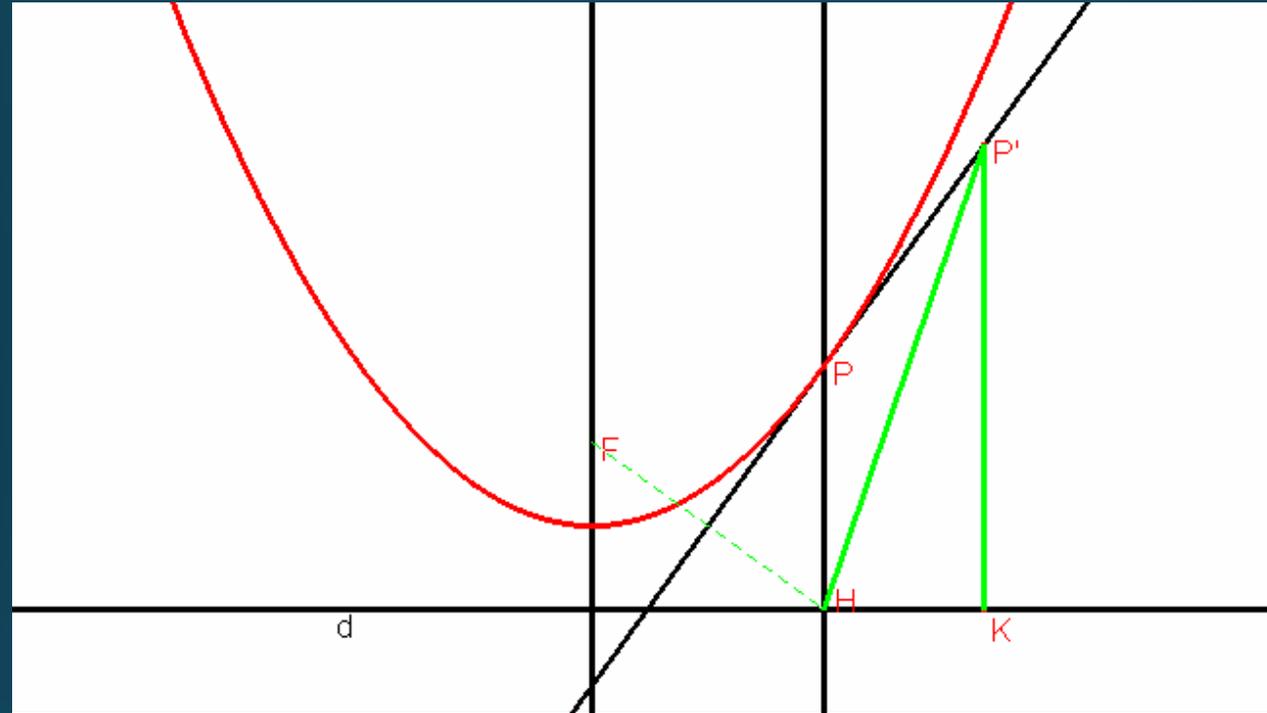
Struttura dell'intervento

- Introduzione: spiegazione del funzionamento della macchina matematica.
- Esplorazione con la macchina: in libertà i gruppi provano a tracciare delle linee.
- Rielaborazione teorica in classe: si prova a dimostrare (o a falsificare) quanto emerso nella fase esplorativa,
- Approfondimenti con geogebra: con l'uso del software si possono espandere le possibilità di azione della macchina,
- Verifica degli apprendimenti attraverso una relazione che ripercorra tutte le fasi.

Introduzione

- Concetto di luogo geometrico di punti e luoghi geometrici già incontrati e noti.
- Rappresentazione grafica di un luogo di punti col solo uso della riga e del compasso:
 - Asse di un segmento
 - Bisettrice di un angolo
 - Circonferenza
 - Parabola (metodo esposto nel libro di Prodi-Foà citato in bibliografia: i punti della parabola sono trovati come risultato dell'intersezione tra la retta perpendicolare alla direttrice condotta da un suo generico punto e l'asse del segmento avente per estremi quel punto e il fuoco)

Costruzione della parabola

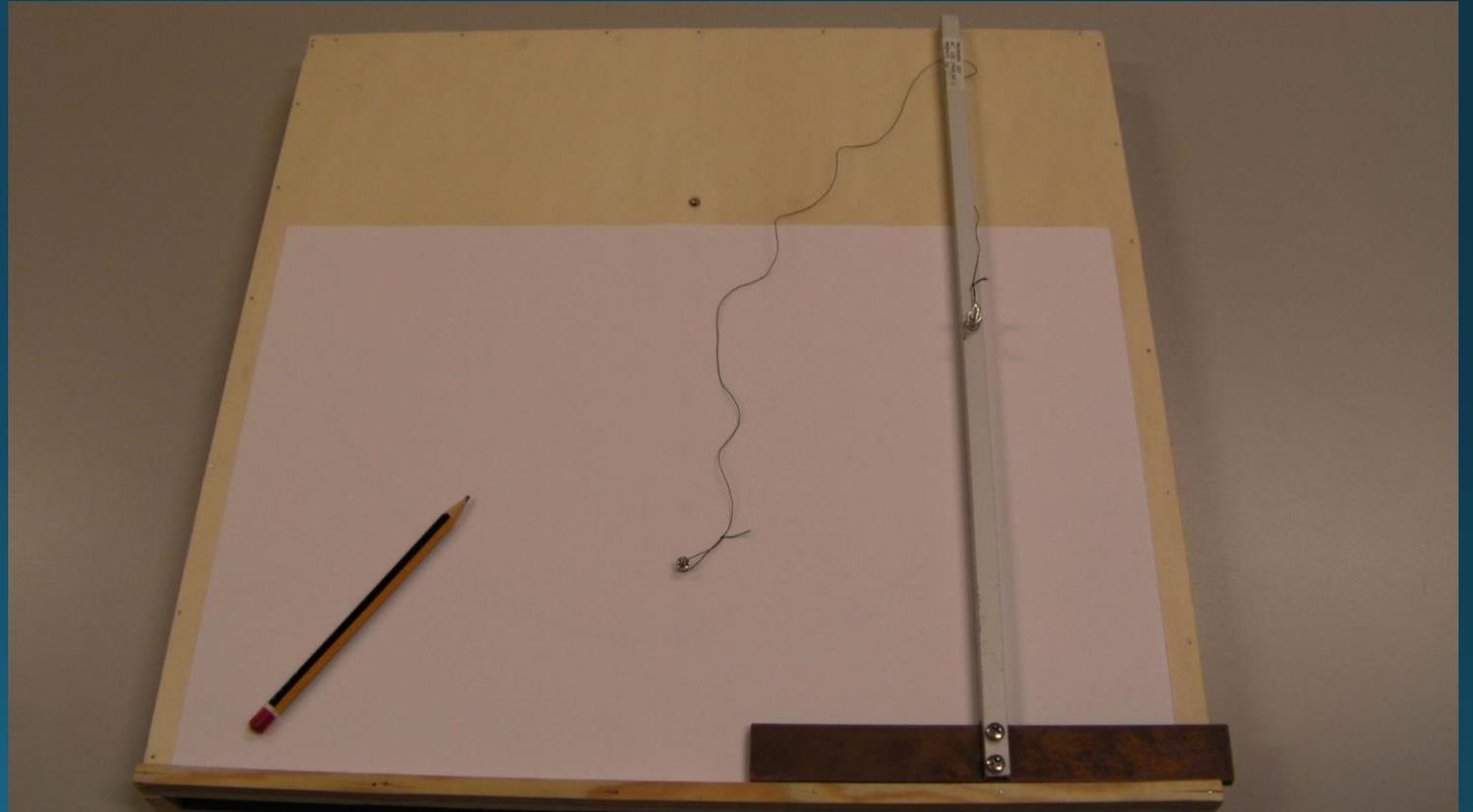


Si può costruire la curva per punti: per ogni punto H su d , trovo un punto del luogo facendo l'intersezione della perpendicolare a d in H con l'asse del segmento FH .

Sull'asse del segmento FH non ci sono altri punti della parabola oltre al punto P che sta sulla perpendicolare a d : se P' appartiene all'asse, $P'F = P'H$; se K è la proiezione ortogonale di P' su d , la misura di $P'K$ è la distanza di P' da d , ma essendo $P'H$ l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, è $P'H = PF > P'K$ e quindi P' non appartiene alla parabola.

Descrizione dello strumento

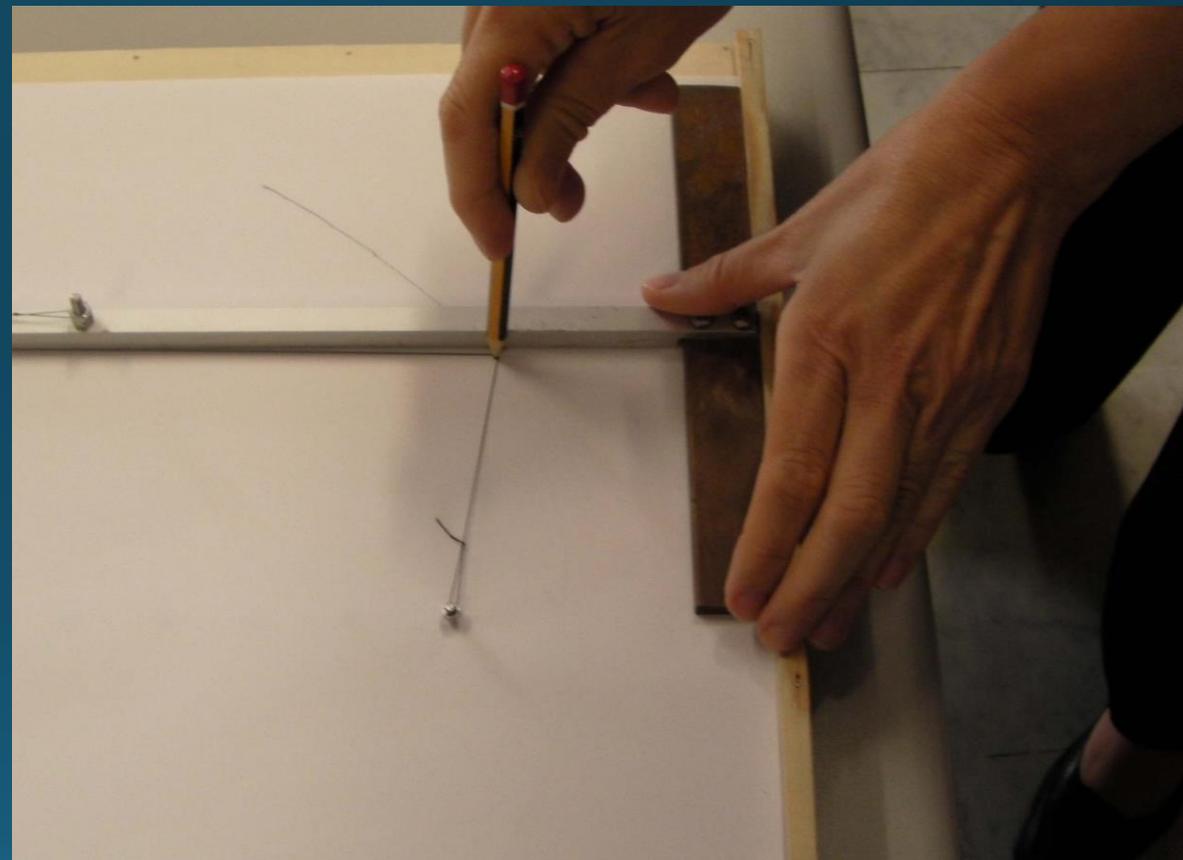
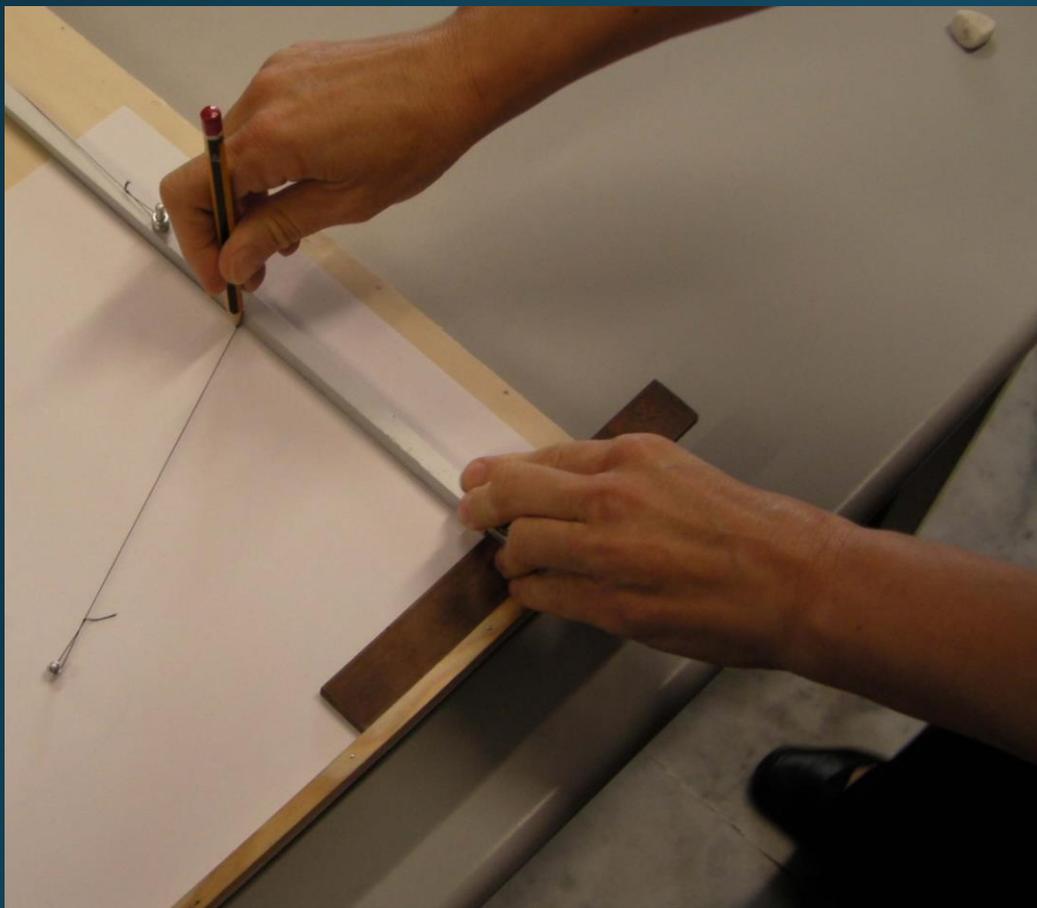
E' una struttura in legno su cui sono avvitate delle viti utili per disegnare la parabola; filo, matita, asta forata all'estremità da cui fuoriesce il filo con la base per fare in modo che scorra sulla struttura in legno



Lo strumento e il materiale necessario per lo svolgimento dell'esperienza

Come si sviluppa il procedimento

- Far scorrere il filo nei fori dell'asta e posizionarla sulla struttura di legno, agganciando il nodo del filo alla vite che è presente sulla stessa struttura di legno.
- Prendere una matita e posizionarla adiacente all'asta: il filo deve rimanere teso e la matita perpendicolare al piano del foglio.
- Spostare così la matita e l'asta contemporaneamente e ripetendo la stessa procedura dall'altro lato, si ottiene una parabola



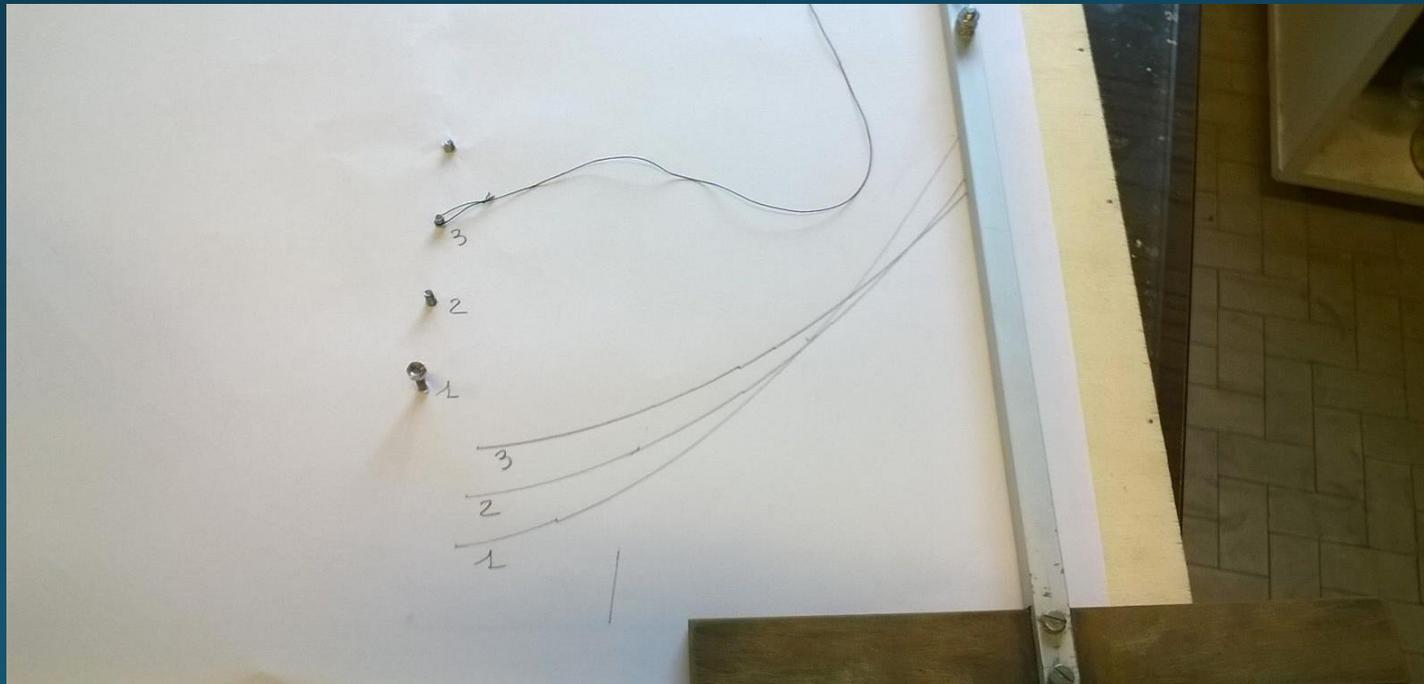
Come si traccia la curva: il filo deve rimanere ben teso.

Perché viene una parabola?

- La distanza tra un qualsiasi punto preso in considerazione sul filo e la vite su cui è annodato è uguale alla distanza che c'è tra quel punto e la base della struttura in legno su cui poggia l'asta a cui è legato il filo: la loro misura è uguale perché la lunghezza dell'asta è uguale a quella del filo e ad entrambi viene sottratta una stessa quantità
- Vengono così a coincidere la base di legno su cui poggia l'asta con la direttrice e la vite a cui è legato il filo col fuoco

Variazioni sul tema

- Lo stesso procedimento viene ripetuto prendendo come vertice di volta in volta le varie viti dell'asta
- Queste permette di evidenziare le relazioni tra la posizione del fuoco e l'ampiezza della concavità della parabola



Le differenti posizioni del vertice e le relative curve numerate 1, 2, 3 ...

Esplorazioni con la macchina (I)

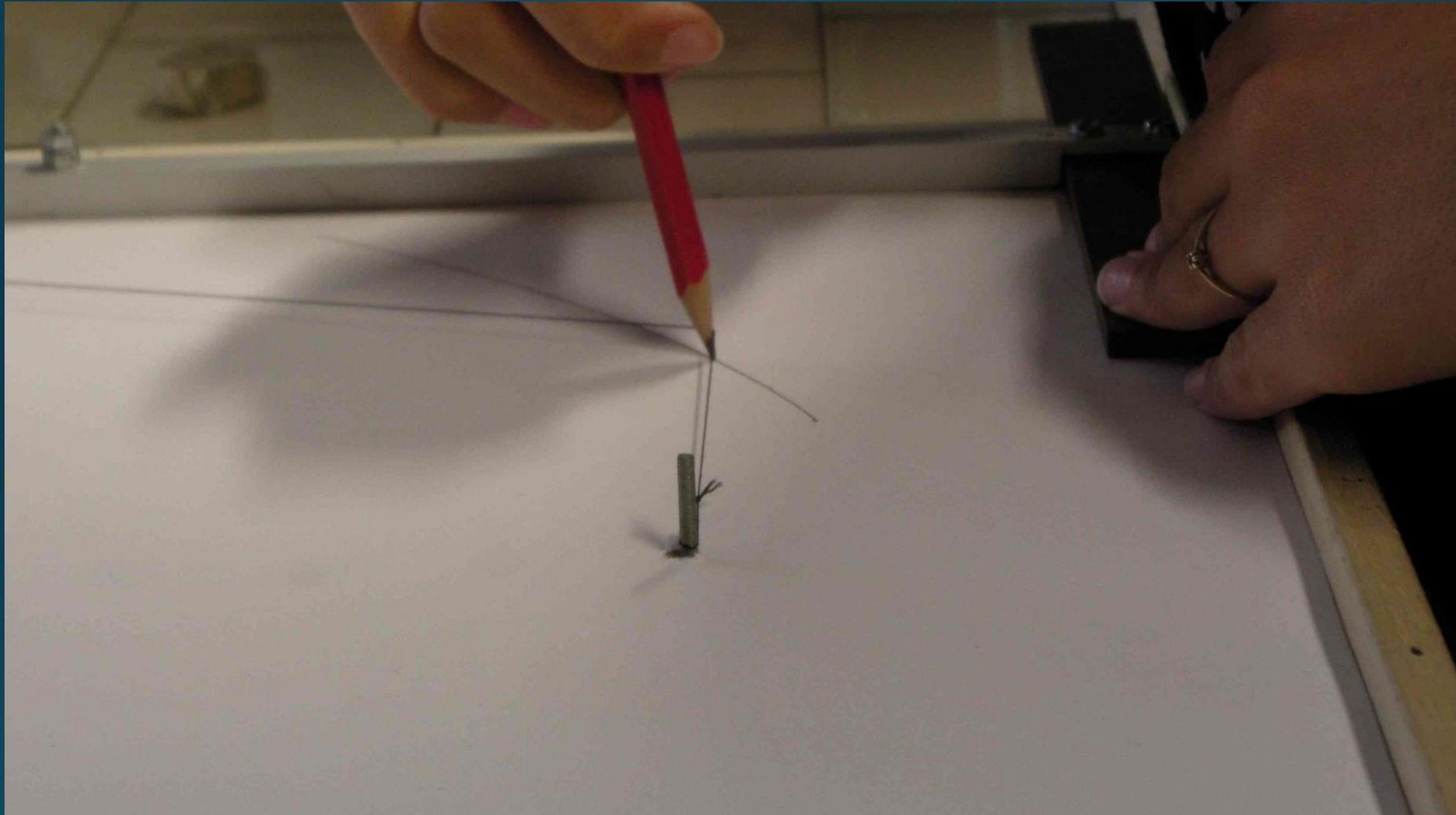
- La classe è stata divisa in gruppi di tre/quattro alunni ciascuno; i ragazzi hanno usato lo strumento senza sapere cosa avrebbero ottenuto.
- Dopo aver creato il grafico e aver provato anche a simmetrizzarlo, ossia spostando la barra sul lato sinistro della tavoletta e riproducendo lo stesso procedimento, hanno cercato di spiegare perché il grafico così ottenuto potesse rappresentare una parabola.



Ecco completata la prima metà della curva!

Esplorazione con la macchina (II)

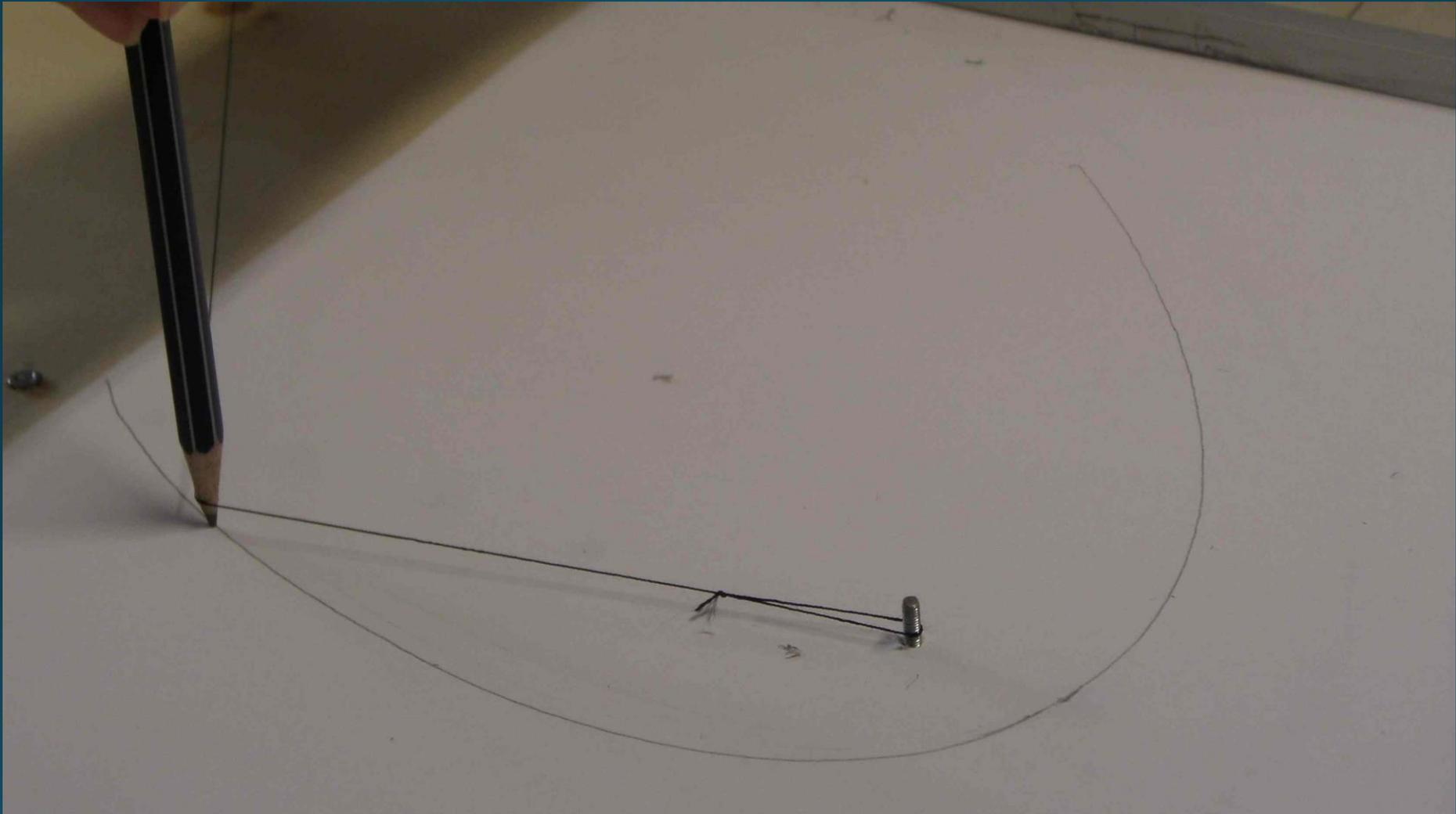
- Un gruppo ha usato lo strumento in maniera “diversa”: mantenendo fissa la sbarra da cui usciva il filo, ha prodotto il grafico con il filo sempre in tensione.
- Abbiamo esaminato tutti insieme il nuovo grafico e i vari gruppi, in maniera autonoma, hanno cercato di scoprire che cosa rappresentasse: modificando la posizione del fuoco oppure cercando di simmetrizzare il procedimento



L'uso «erroneo» dello strumento conduce comunque a una curva: che curva sarà?

Esplorazione con la macchina (III)

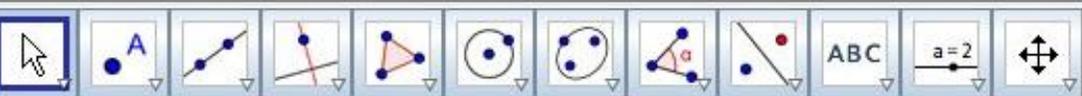
- Due gruppi sono arrivati alla conclusione che la curva rappresentata potesse essere un'ellisse di cui conoscevano la definizione come luogo di punti dalle medie
- Un altro gruppo, all'oscuro della definizione di ellisse, si è comunque reso conto che vi era una relazione fissa fra punti della curva, fuoco e il punto dell'asta da cui fuoriusciva il filo.



L'ellisse «quasi» completa ottenuta con il parabolografo «male» utilizzato

Approfondimento con Geogebra

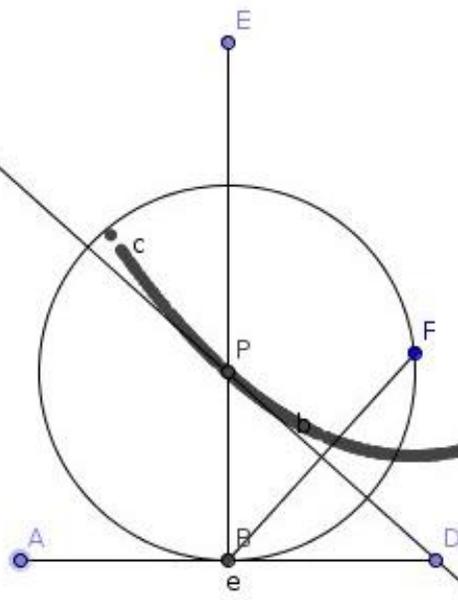
- Costruzione di luoghi geometrici già conosciuti
- Riproduzione del percorso del Prodi (vedi prima) col calcolatore
- Esplorazione della variazione della curva al variare dei parametri



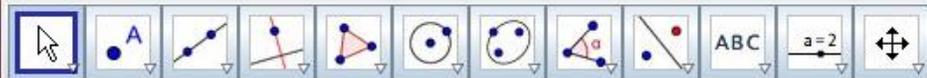
Algebra

Grafici

- Conica
 - $c: (x - 4.2)^2 + (y - 1.81)^2$
- Numero
 - $\text{distanzaEB} = 5$
- Punto
 - $A = (2.2, 0)$
 - $B = (4.2, 0)$
 - $D = (6.2, 0)$
 - $E = (4.2, 5)$
 - $F = (6, 2)$
 - $P = (4.2, 1.81)$
- Retta
 - $a: x = 4.2$
 - $f: 1.8x + 2y = 11.18$
- Segmento
 - $b = 2.69$
 - $d = 5$
 - $e = 4$



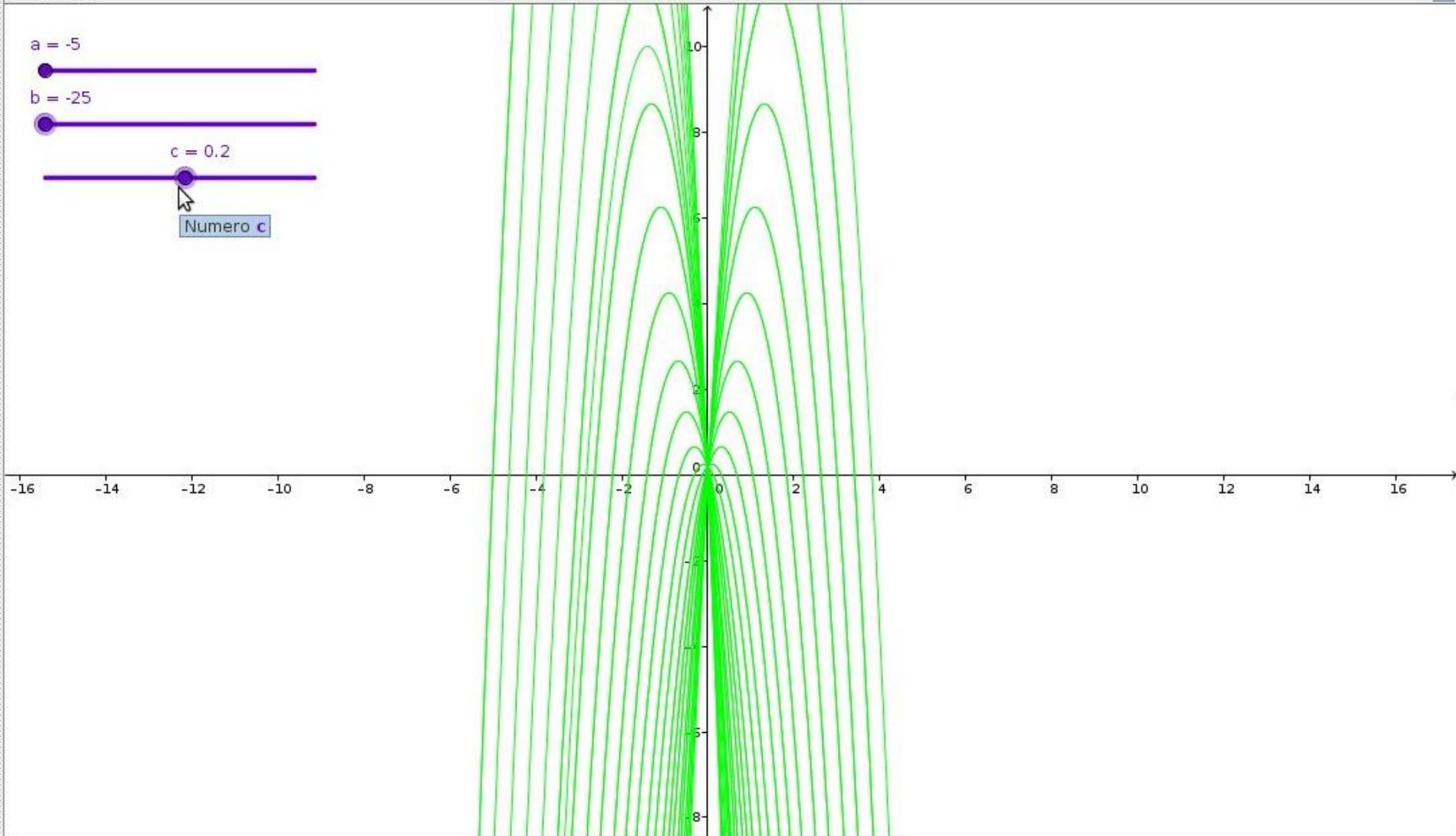
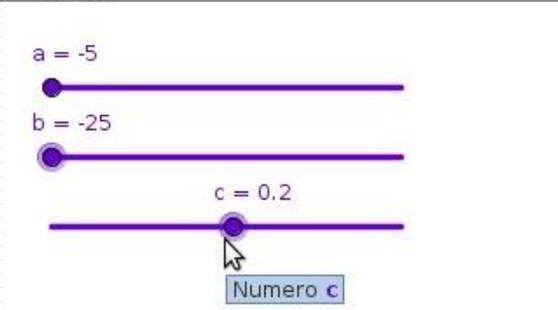
muovere il punto A:
il punto P traccia la
parabola con fuoco F



Algebra

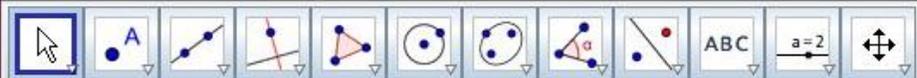
Grafici

- Conica
 - $d: y = -5x^2 - 25x + 0.2$
- Numero
 - $a = -5$
 - $b = -25$
 - $c = 0.2$

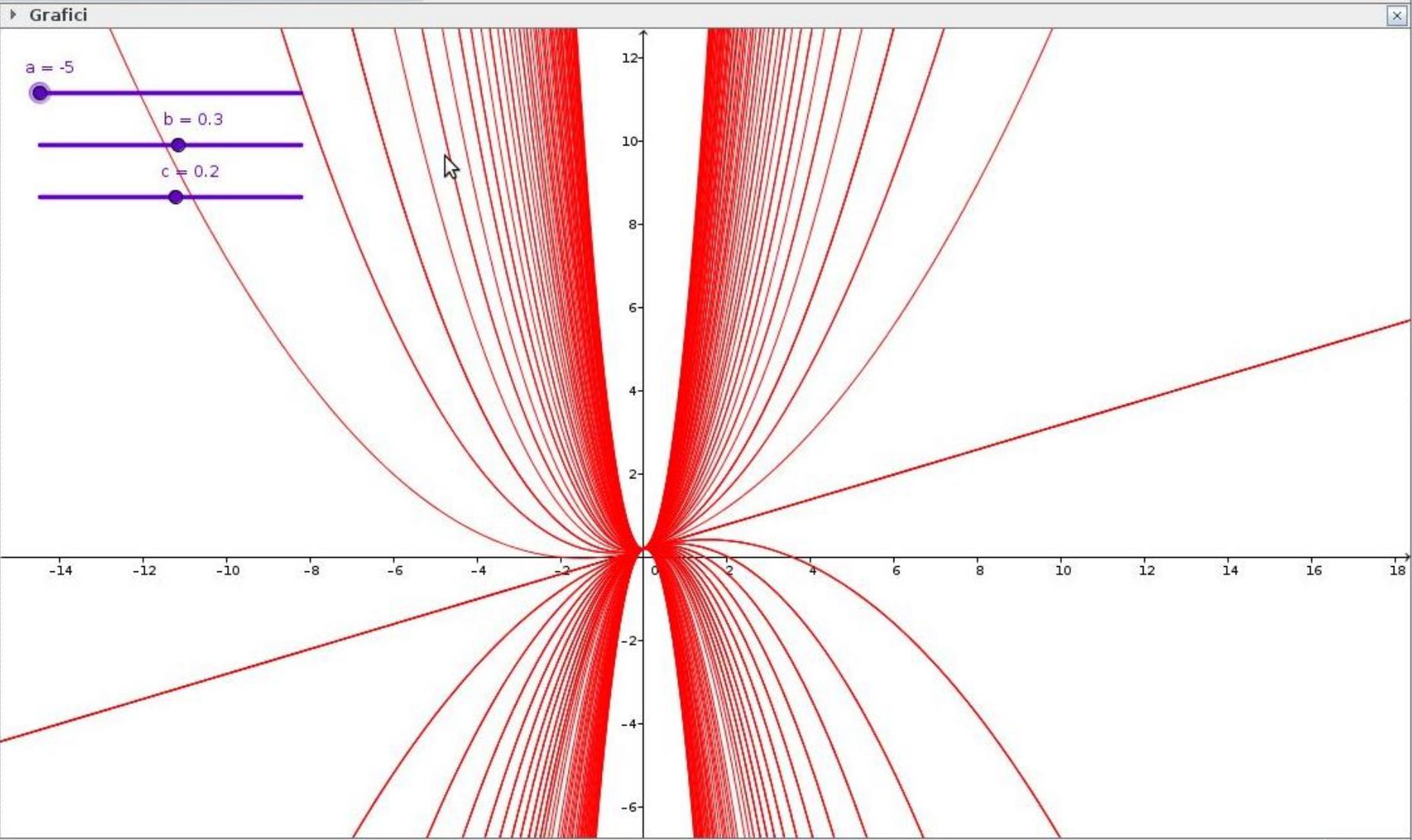


Inserimento:





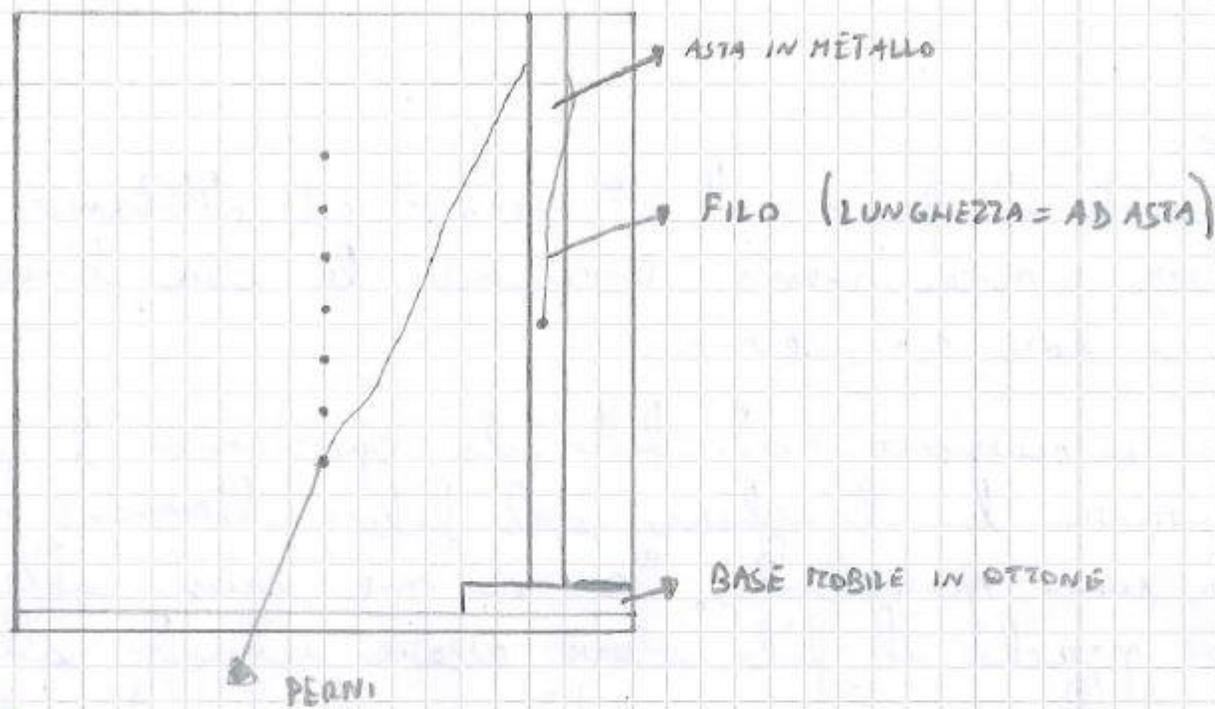
- Algebra
- Conica
 - $d: y = -5x^2 + 0.3x + 0.2$
- Numero
 - $a = -5$
 - $b = 0.3$
 - $c = 0.2$



Verifiche degli apprendimenti

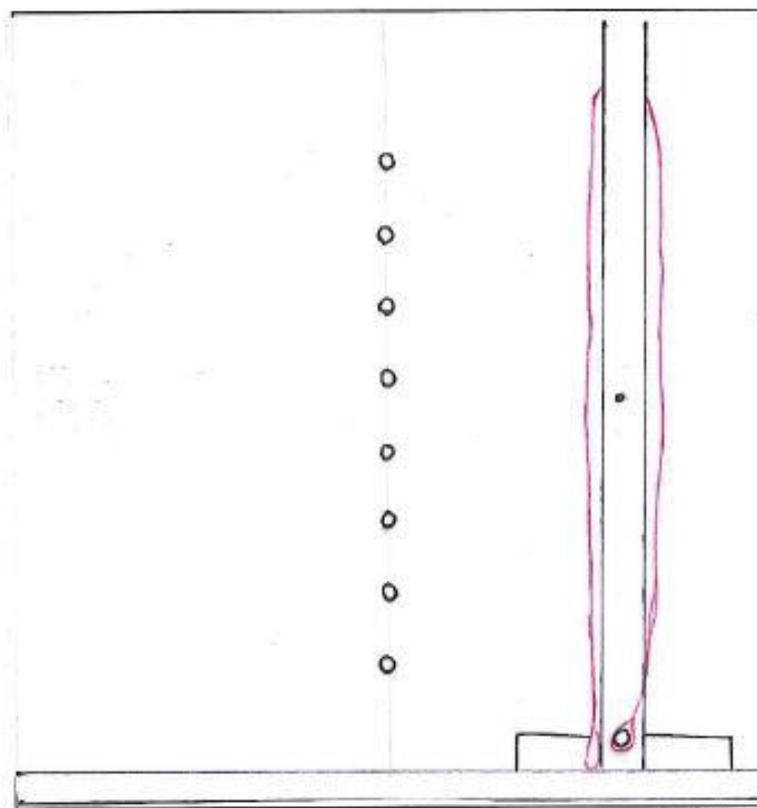
Con l'uso delle macchine, la ricerca di una spiegazione dell'«oggetto» prodotto ha permesso di rielaborare ed approfondire le conoscenze sull'argomento accennato in classe , sviluppando in autonomia percorsi che giustificassero le relazioni tra gli elementi in gioco (un punto fisso, una corda vincolata, due aste con valenze diverse)

Relazioni di alcuni gruppi di alunni



Procedimento:
grazie alla macchina sono state tracciate due linee ed
i loro rispettivi simmetrici, la prima ~~tracciata~~ ^{movendo} la
matita e lasciando l'asta ferma e la seconda muovendo
l'asta. ∇ Questi sono stati i risultati.

Per questo progetto si sono utilizzate sette strutture identiche composte da un parallelepipedo di legno con una superficie mancante, dove verrà poggiato sul tavolo da lavoro. Sulla superficie superiore viene incollata ad un vertice un pezzo di legno, che da ora in poi sarà chiamato base, su cui può scorrere un rettangolo in ottone a cui è legata un'asta di ferro. Questa asta, perpendicolare alla base, ha un foro all'estremità opposta al rettangolo d'ottone e per questo foro scorre uno spago che è legato ad una vite posta circa all'inizio del l'asta partendo dalla base. Lo spago è abbastanza lungo in modo che passando per il foro riesca nuovamente a giungere alla vite a cui è legata l'altra estremità. Sulla superficie del parallelepipedo in legno su cui si trova l'asta, che chiameremo sfondo, si trovano una serie di viti allineate l'ungo l'asse della base.



Risultati ottenuti

- L'utilizzo delle macchine ha reso possibile l'esplorazione in situazione non standard di un argomento cardine del programma, introducendo un modo di operare lontano dal normale approccio agli argomenti proposti in ambito scolastico. Il fatto di non sapere quale sarebbe stato il risultato del loro lavoro e la scoperta che ciò che hanno ottenuto era un oggetto noto creato con un percorso "anomalo", ha permesso ai ragazzi di far nascere spontaneamente problematiche e domande che in un "percorso standard" non sarebbero sicuramente emerse.
- In ultimo, l'"errore" di percorso che ha portato alla creazione dell'ellisse, è stato motivo di un ulteriore momento di studio e di confronto e l'imprevedibilità di tale errore è a conferma che l'esplorazione può essere di stimolo per l'approfondimento o lo spunto per un ulteriore percorso

Efficacia del percorso didattico

- L'esperienza è stata molto positiva perché ha permesso a tutti, indipendentemente dal grado di preparazione e dai risultati scolastici, di mettersi in gioco, di "creare" qualcosa e di tentare di giustificare l'oggetto creato in maniera del tutto libera, spontanea e soprattutto autonoma, rendendo sicuramente più incisivo quanto appreso.
- La scelta del percorso in una classe seconda, piuttosto che una terza, è risultata molto positiva per questo tipo di macchina perché i ragazzi, non conoscendo l'argomento, non hanno subordinato il percorso di scoperta alle conoscenze acquisite in classe