

REGIONE
TOSCANA



Prodotto realizzato con il contributo della Regione Toscana nell'ambito dell'azione regionale di sistema

Laboratori del Sapere Scientifico

Scienza e musica (dalla scuola pitagorica alla musica moderna)

Una sperimentazione per
l'inserimento nei curricoli
del liceo scientifico di contenuti
legati alla musica



Percorso effettuato in una terza del Liceo Scientifico
dell'istituto di istruzione superiore "G. Carducci" di
Volterra

Collocazione del percorso nel curricolo

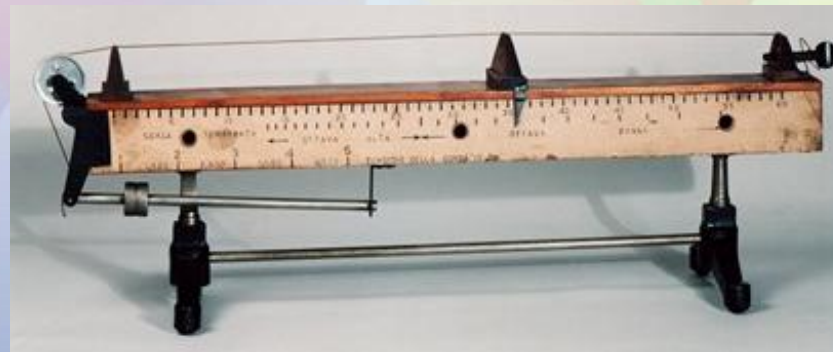
I contenuti sono stati sviluppati nel secondo quadrimestre dell'anno scolastico

E' stata principalmente coinvolta la matematica in tutto il periodo del percorso e c'è stata un'interazione con fisica e filosofia in diversi momenti-chiave

Obiettivi di apprendimento

Applicazione di concetti teorici di matematica
compatibili con il percorso curricolare del Liceo Scientifico
(costruzione di una scala musicale) e loro uso pratico
(strumenti musicali a corda)

Studio sperimentale di un sistema fisico (corda vibrante) e legame
con le proprietà matematiche investigate



Collegamento tra il percorso effettuato e il pensiero filosofico
(la scuola pitagorica) nell'ottica della didattica per competenze

Elementi salienti dell'approccio metodologico (1)

Semplici misure dirette su sistemi fisici “di grandi dimensioni” con evidenze sperimentali. (molle elicoidali)

Basandosi su un principio di analogia formale, costruzione di ipotesi su sistemi fisici di dimensioni ridotte (corde vibranti)

Verifica sperimentale con un sistema di misura complesso

Prima formalizzazione teorica



Elementi salienti dell'approccio metodologico (2)

A partire da misure dirette su molle elicoidali, è stato condotto uno studio sperimentale di un sistema fisico su cui si articola il percorso (la corda vibrante) e dei suoni da esso prodotti con un apparato adatto a tale scopo (visual analyser)

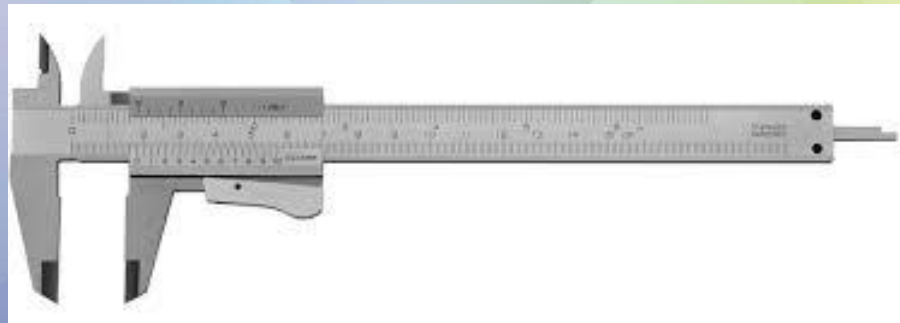
Dai dati sperimentali ottenuti è stata costruita una teoria matematica (scala temperata) indispensabile per la musica e per il funzionamento degli strumenti musicali moderni

Materiali, apparecchi e strumenti impiegati

Materiali: normale dotazione di laboratorio

Apparecchi: sistema acquisizione dati per rivelazione di onde sonore

Strumenti: strumenti per la produzione di suono (strumenti musicali, diapason, voce umana), strumenti di misura di lunghezza (righello, calibro ventesimale)



Ambienti in cui è stato sviluppato il percorso



Aula

Laboratorio di Fisica



Stanza contenente
pianoforte in dotazione
alla scuola



Tempo impiegato

Per la messa a punto preliminare del gruppo LSS:

1 mese (settembre 2015)

Per la progettazione specifica nella classe:

1 mese (gennaio 2016)

Tempo-scuola di sviluppo del
percorso:

febbraio-giugno 2016



Per documentazione: attività aggiornamento nei mesi di
novembre 2015 e gennaio 2016

Introduzione al percorso sperimentato

Sono nominato dall'inizio di questo a. s. nella classe 3A per matematica. Collaborazione eccellente con il collega di fisica con totale condivisione degli obiettivi.

Ottenuti nel biennio risultati definiti non completamente soddisfacenti dai colleghi sia in matematica che in fisica (classe numerosa, con livelli diversificati di coinvolgimento)

Stato attuale delle conoscenze necessarie per il percorso:

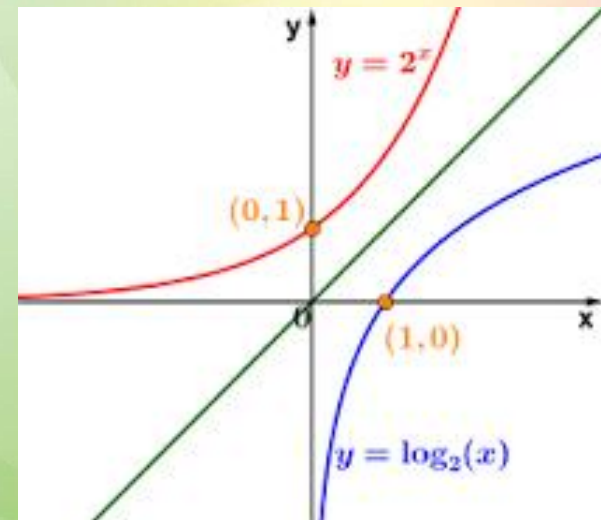
- a) Matematica: prima distinzione tra numeri razionali e irrazionali
- b) Fisica: studio del pendolo e parametri del moto armonico semplice

Introduzione percorso matematica

Necessità di usare le proprietà dei numeri razionali e irrazionali
nella teoria musicale

Esigenza di un maggiore spazio per la trattazione dell'insieme dei
numeri reali nella classe terza scientifico innescata dal dibattito ormai
pluriennale tra i docenti

Necessità di inserire la trattazione di
esponenziali e logaritmi al terzo anno

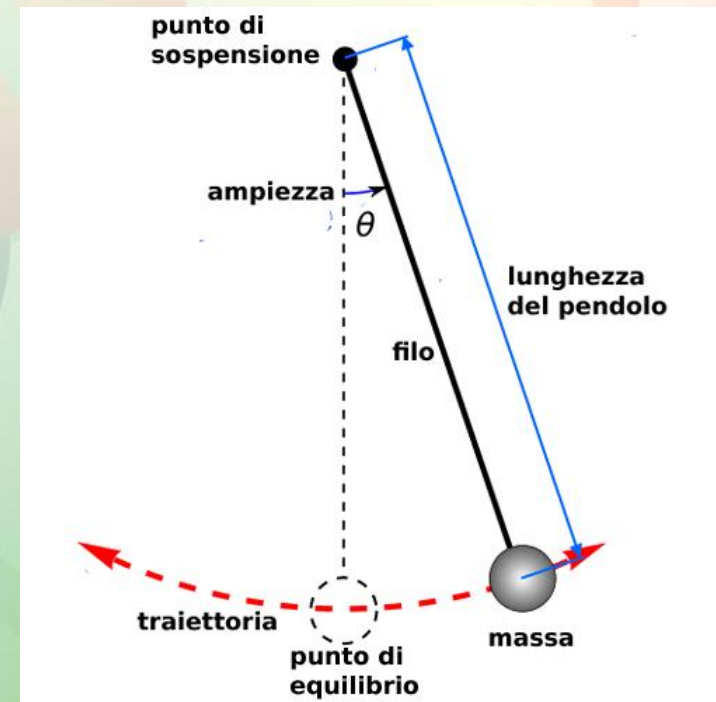


Interazione con il docente di Fisica

Il contatto con il docente di fisica (neoimmesso in ruolo) è strettissimo

La sperimentazione sarà realizzata nella prima parte del secondo quadrimestre

Le nozioni di fisica occorrenti sono quelle relative al moto armonico (ampiezza, periodo, frequenza) già in possesso della classe dal biennio per cui almeno per il percorso sperimentato in terza un coordinamento stretto con il programma di fisica non è comunque necessario



Interazione con docente di Filosofia

Stretta collaborazione con il docente fin dall'inizio dell'attività LSS

Un momento cruciale del percorso è lo studio della scuola Pitagorica: viene effettuato nel primo quadrimestre da cui la necessità di conciliare i tempi di esecuzione dei programmi di matematica e filosofia

Con Pitagora, la teoria dei numeri e il monocordo prende origine il percorso, che si chiuderà nel mese di aprile



Percorso scelto per la classe in ordine cronologico

Geometria analitica del piano

Geometria sintetica del piano

Teoria dei numeri reali con introduzione ai limiti delle
successioni

Matematica e Musica; la costruzione della scala
temperata

Esponenziali e Logaritmi

Il concetto di infinito e l'interazione con la Filosofia

Si pone in modo “naturale” la definizione di limite finito di una successione reale una volta definita una successione infinitesima

Insieme ad esso si pone quella di limite infinito di una successione.

Le definizioni generano esercizi sulla verifica di limiti.

Questa attività ha stimolato gli studenti al dialogo educativo sul problema dell'infinito affrontato con il docente di filosofia

Sistemi fisici oscillanti e frequenza di oscillazione

Il pendolo: frequenza $f=1/T$ di oscillazione dipende solo dalla lunghezza L (e dalla gravità) ed è inversamente proporzionale alla radice quadrata di L .

Non si possono ottenere frequenze maggiori di qualche Hz (Hz=1/sec)

La corda vibrante (monocordo): la frequenza minima ottenibile (prima armonica) è proporzionale a $1/L$. da cui l'ottava corrisponde a una frequenza doppia, come da noi verificato sperimentalmente (vedi nel seguito). f dipende anche dalla tensione della corda (scoperta dello stesso Pitagora)

Con il monocordo si possono ottenere facilmente frequenze dell'ordine di 100Hz o superiori

Frequenza di oscillazione e suono emesso

Dato sperimentale: l'oscillazione di un sistema fisico è trasmessa all'aria circostante ottenendosi un'onda sonora che si propaga

L'orecchio umano può percepire un'onda sonora se $f = 16 \text{ Hz}$



Di conseguenza:

- a) È impossibile percepire il suono emesso da un pendolo
- b) È possibile percepire il suono emesso da un monocordo

Vi sono altri sistemi oscillanti a frequenze fisse utilizzate come riferimento detti diapason e da noi spesso utilizzati (328 Hz e 440 Hz)

Il nostro sistema di misura di frequenza di onde sonore

Microfono e mixer per convertire l'onda sonora in segnale elettrico

Software per elaborazione dati (Visual analyser) realizzato dal Dipartimento di Fisica Univ. Roma Tor Vergata e disponibile sul Web

Computer con schermo per leggere la frequenza e visualizzare la forma d'onda

Lunghezza di una corda e frequenza di oscillazione

Abbiamo studiato sperimentalmente questo legame sia per una molla elicoidale (slinky) che per la corda vibrante (monocordo): è stata misurata la frequenza variando la lunghezza di entrambi i sistemi

Nel primo caso abbiamo fatto una misura diretta sia della lunghezza che della frequenza misurando i periodi con un cronometro

Nel secondo caso abbiamo dovuto ovviamente utilizzare Visual analyser

Si è trovato in entrambi i casi che la frequenza f è inversamente proporzionale alla lunghezza L , come già detto in precedenza per il monocordo

Con la molla elicoidale: $L=220$ cm; $T=0,72$ s



Con la molla elicoidale: $L=220$ cm; $T=0,72$ s



Con la molla elicoidale: $L=220$ cm; $T=0,72$ s



Con la molla elicoidale: $L=110$ cm; $T=0,35$ s



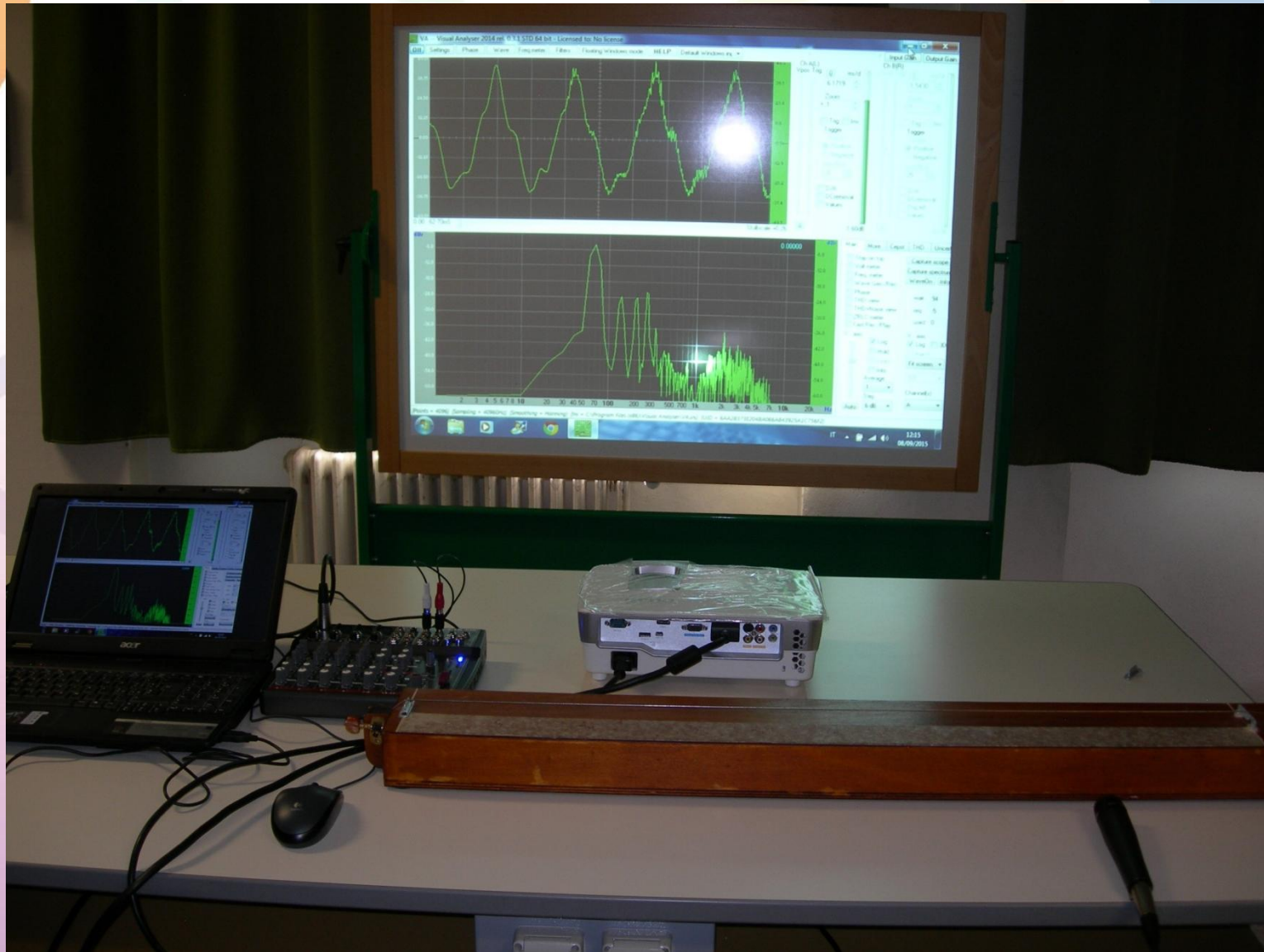
Con la molla elicoidale: $L=110\text{ cm}$; $T=0,35\text{ s}$



Con la molla elicoidale: $L=110$ cm; $T=0,35$ s



...e con il monocordo



Ripresa della dottrina della scuola pitagorica

Il concetto di numero per i pitagorici

Il legame tra suono, lunghezza e tensione della corda nel monocordo

Il teorema di Pitagora e le prime incongruenze tra numeri razionali e irrazionali: il mistero di Ippaso di Metaponto

La scala pentafonica

I suoni di un monocordo si trovavano modificando i rapporti tra le lunghezze per il fattore $1/2$ (cioè dimezzando la lunghezza) e il fattore $2/3$, cioè usando appunto i $2/3$ della corda, che sono i rapporti più semplici possibile, in coerenza con la dottrina pitagorica

Partendo da una lunghezza L di riferimento e volendo ricercare i suoni per lunghezze da L a $L/2$ (intervallo in seguito chiamato di un'ottava) che corrispondevano a suoni "uguali" si prendevano i $2/3$ ed eventualmente si raddoppiava la lunghezza dovendo rimanere all'interno dell'intervallo iniziale

Si ottenne così un intervallo di 5 suoni per 5 lunghezze:

L , $8/9 * L$, $64/81 * L$, $2/3 * L$, $16/27 * L$

chiamato scala pentafonica (che Pitagora portò a 7 suoni aggiungendo $3/4 * L$ e $128/243 * L$ da cui la scala pitagorica)

Importanza della scala pentafonica

Con le regole appena fissate è facile ottenere le 5 note della scala pentafonica; ciò è stato realizzato dalla classe con un righello e il monocordo in dotazione alla nostra scuola

A partire dalla nota detta con la terminologia moderna DO si ottiene la seguente corrispondenza tra lunghezze e frequenze (note):

f	$9/8*f$	$81/64*f$	$3/2*f$	$27/16*f$
DO	RE	MI	SOL	LA

Questa scala, scoperta indipendentemente e contemporaneamente nella musica orientale (mongoli, cinesi), è usata nella musica folk (celtica e dei nativi americani), jazz e anche classica (Debussy)

Il monocordo e la scala pentafonica



Il monocordo e la scala pitagorica



Costruzione della scala musicale temperata: i requisiti

Scala musicale: in un'ottava con frequenze in ordine crescente note

$$f_0, \dots, f_m \text{ con } f_m = 2 f_0$$

Definizione di melodia: successione di note (frequenze sonore)

Requisito fondamentale: una melodia deve poter essere riprodotta, cioè deve poter iniziare da una nota qualunque

Si dimostra che per riprodurre una melodia le frequenze devono essere in progressione geometrica

Problemi con la scala pitagorica

Riporto qui sotto le frequenze delle 7 note della scala pitagorica:

f $9/8*f$ $81/64*f$ $4/3*f$ $3/2*f$ $27/16*f$ $243/128*f$

Come si vede, non sono in progressione geometrica!

Verso il 1500 il teorico musicale Gioseffo Zarlino introdusse una seconda scala (detta scala naturale) che sostituì quella pitagorica: ma anche per essa le note non erano in progressione geometrica

La conseguenza più grave delle due scale: c'erano grossi problemi nell'accordare tra loro gli strumenti musicali

La scala temperata: impostazione del calcolo

Si richiede (come Pitagora!) che la frequenza $3/2*f$ (detta quinta giusta) appartenga alla scala sempre perché richiesta nella costruzione di una composizione musicale (armonia tra le note f e $3/2*f$)

Chiamo $f = f_0$ e $2f = f_m$ il numero di frequenze contenute in un'ottava ($f;2f$) con f arbitraria (p.es. DO5=523 Hz) e n numero naturale ; chiamo $3/2*f = f_n$ la “quinta giusta” che deve appartenere alla scala, con n numero naturale, $n < m$

Da queste ipotesi si ottiene subito che $q=2^{1/m}$ e che vale l'identità seguente: $\log_2 3/2 = n/m$

Ma dal teorema fondamentale dell'aritmetica si dimostra facilmente che il primo membro dell'espressione non è razionale!

Si deve trovare una “soluzione di compromesso”...

La soluzione approssimata di Werckmeister

Con un po' di pazienza si può trovare un'approssimazione razionale di $\log_{1/2} 3/2$ con un metodo iterativo che fornisce il risultato $7/12$ (con i ragazzi ci dobbiamo accontentare di confrontare i due numeri con una calcolatrice), cioè si ottiene finalmente:

$n=7$ e $m=12$: le “sette note” non sono 7 ma 12 (ci sono i diesis...) e la quinta giusta è la settima nota: partendo da DO si trova DO diesis, RE, RE diesis, MI, FA, FA diesis, SOL (la quinta giusta), SOL diesis, LA, LA diesis, SI, DO completando l'ottava

Ponendo $m=12$ nella formula $q=2^{1/m}$ si ottiene per q il valore approssimato 1,0595

La tastiera della chitarra

Abbiamo misurato in laboratorio con un calibro le lunghezze dei tasti di una normale chitarra folk ottenendo un'ottima approssimazione per i valori delle note di un'ottava, ovviamente in funzione di f_0

Abbiamo confrontato tale successione con quella dei valori teorici usando lo stesso valore iniziale della progressione geometrica per la scala temperata con il suo valore $q=1,0595$ in un foglio di excel (vedi diapositiva successiva)

Come si può vedere c'è un ottimo accordo tra teoria ed esperimento: le chitarra sono costruite per la scala temperata

La nostra misura sulla chitarra

	freqrif	82,4	freqteor			freqsper		Gradi
	rad12 2	1,05946	82,4	Ltasti	Lcorde	82,4		0
	Ltot=mm	648	87,3	37,3	37,3	87,4		1
			92,5	34,7	72	92,7		2
inserire in	C3!		98,0	32,95	104,95	98,3		3
nota	freq.		103,8	30,05	135	104,1		4
mi	82,4		110,0	28,65	163,65	110,2		5
la	110		116,5	26,6	190,25	116,6		6
re	146,8		123,5	25,5	215,75	123,5		7
sol	196		130,8	24,4	240,15	130,9		8
si	246,94		138,6	23,25	263,4	138,8		9
mi	329,64		146,8	21,6	285	147,1		10
			155,5	20,4	305,4	155,9		11
			164,8	19,45	324,85	165,2	ottava	12
			174,6	18,4	343,25	175,2		13
			185,0	18,05	361,3	186,2		14
			196,0	16,15	377,45	197,4		15
			207,6	15,35	392,8	209,2		16
			220,0	14,45	407,25	221,8		17
			233,1	13,15	420,4	234,6		18
			246,9	12,85	433,25	248,6		19
			261,6	12	445,25	263,4		20

Prove con pianoforte e due diapason

Anche il pianoforte (altro strumento a corda!) è costruito secondo la scala temperata; abbiamo usato il pianoforte della scuola (88 tasti, poco meno di 7 ottave)

La scala temperata (progressione geometrica) può contenere un numero arbitrario di frequenze. L'intervallo di frequenze del pianoforte ha una dinamica eccellente (27,5 Hz – 4186 Hz)

Abbiamo verificato queste proprietà confrontando varie frequenze del pianoforte con le frequenze di due diapason (328 e 440 Hz), strumenti che emettono un suono di frequenza ben determinata ed usati per accordare gli strumenti musicali

Con il pianoforte



Conclusione del percorso

Con queste misure (prove alla chitarra e al pianoforte) abbiamo concluso il nostro percorso

In quei giorni abbiamo anche misurato frequenze e forme d'onda per diversi strumenti musicali col nostro nuovo apparato sperimentale

Un modello molto efficace per rappresentare una sinusoide (la forma d'onda del LA del diapason a 440 Hz) ci servirà efficacemente a settembre per iniziare lo studio delle funzioni goniometriche

Potenze a esponente reale

E' l'ultimo argomento dell'anno scolastico, trattato nei mesi
di aprile-maggio

Funzione esponenziale affrontata con riferimento al libro di testo

Lo stesso per la funzione logaritmica dopo opportuni richiami sulle
funzioni inverse

Verifiche degli apprendimenti: tipologie impiegate

Verifiche individuali orali alla lavagna

Verifiche scritte per l'intera classe

Verifiche individuali in laboratorio sotto la supervisione del docente e del tecnico del laboratorio di informatica

Esempio (I) di struttura di verifica scritta

Verifiche di limiti finiti e infiniti di successioni

Verifiche delle proprietà delle Scatole cinesi

Dimostrazioni per ricorrenza

Discussione e risoluzione di equazioni
esponenziali e logaritmiche

Esempio (II) di verifica di laboratorio

Prima verifica di taratura dell'apparato di misura con diapason

Determinazione sperimentale della costante k di un monocordo
nella legge $f=k/L$ della frequenza in funzione della lunghezza

Verifica della legge di cui sopra variando e misurando L

Risultati ottenuti con riferimento alle verifiche orali

Valutazione complessivamente positiva con alcuni fattori innovativi e interessanti e alcuni problematici :

introduzione di nuovi concetti (progressioni, logaritmi) a partire da esigenze concrete, con motivazione immediata della loro utilità
uso sistematico di una chitarra nelle verifiche orali, il che ha senz'altro suscitato interesse negli studenti

oggettiva difficoltà tecnica di alcuni punti della trattazione

conseguente necessità di semplificare alcuni contenuti eliminando dimostrazioni giudicate troppo impegnative

Risultati ottenuti con riferimento alle verifiche scritte

Le prove scritte sono di norma preferite dagli studenti per la possibilità di riflettere sui quesiti proposti

Le prove scritte sui nuovi argomenti hanno trattato principio di induzione, scatole cinesi e limiti delle successioni con esiti senz'altro positivi

Si è potuto lavorare rispetto all'anno scorso con maggiore tempo a disposizione consentendo alla classe di acquisire tutti i nuovi contenuti sia sul piano teorico che applicativo

Risultati ottenuti con riferimento alle attività di laboratorio

Docente e tecnico di laboratorio hanno ormai un'esperienza consolidata sull'apparato sperimentale

La classe ha svolto con interesse le prime misure in laboratorio

Le prime misure di frequenza e analisi spettrale su monocordo e strumenti a fiato hanno fornito risultati accettabili

Contiamo di far effettuare in autonomia agli studenti misure di frequenza, ovviamente con la nostra supervisione iniziale

Efficacia del percorso didattico: approfondimenti sul curriculum

La dialettica all'interno del gruppo LSS ha generato secondo l'impostazione della pedagogia del curriculum:

- a) Approfondimento sui numeri naturali e reali che ha arricchito il materiale di lavoro a disposizione della classe

- b) Interazione con la filosofia greca (scuola pitagorica) con applicazioni concrete

Efficacia del percorso didattico: introduzione di elementi di novità

Dalla riflessione su numeri naturali e reali e sulla Scuola
Pitagorica sono nati:

Introduzione sperimentale alla fisica della corda vibrante

Possibilità di ottenere importanti risultati di matematica
applicata (costruzione della scala musicale utilizzata al giorno
d'oggi)

Tutto ciò ha suscitato negli alunni una netta percezione
dell'utilità della matematica come risposta a questioni concrete
andando ad agire sulla promozione della
loro competenza di “risolvere problemi”

Riassumendo sui risultati ottenuti...

Svolto lavoro sia teorico che sperimentale su:

- Numeri naturali e monocordo
- Numeri reali e tastiere di chitarra e pianoforte

Numerose verifiche in classe usando questi strumenti

Diffusione all'esterno del lavoro svolto:

- Nelle scuole medie inferiori
- Nei laboratori della Settimana Scientifica