

REGIONE
TOSCANA



**Iniziativa realizzata con il contributo della Regione
Toscana nell'ambito del progetto**

Rete Scuole LSS

a.s. 2016/2017

Da un problema di termodinamica
alla quadratura dell'iperbole

LA SCOPERTA GEOMETRICA DEL NUMERO e

Motivazione del percorso

- I libri di testo di matematica non danno nessuna indicazione su come si possa calcolare l'area sottesa a un'iperbole e, in generale, a una funzione qualsiasi se non dopo aver trattato il calcolo infinitesimale.
- Introducono il numero di Nepero e senza alcuna giustificazione oppure definendolo come limite di successione, senza che gli studenti conoscano tale operazione.
- Non lasciano comprendere perché sia utile ricorrere ai logaritmi naturali piuttosto che a quelli in altre basi.
- Nei testi di fisica le formule per il calcolo del lavoro termodinamico (isoterme ed adiabatiche) vengono introdotte senza alcuna dimostrazione.
- Con un approccio multidisciplinare abbiamo cercato di costruire un percorso che superi le problematiche sopra esposte.

Collocazione nel curriculum verticale

- Il percorso è stato collocato nell'ultima parte del terzo anno di un liceo scientifico opzione scienze applicate, prima di cominciare lo studio dei logaritmi in matematica e all'inizio dello studio della termodinamica in fisica.
- Un fattore di forza è stata la presenza dell'insegnamento di informatica che ha consentito di implementare al calcolatore alcune procedure in C++.
- Il percorso, per la sua trasversalità e per il fatto di includere argomenti che non sempre vengono affrontati negli stessi periodi dell'anno, si presta a essere sviluppato anche in momenti temporalmente distanti (ad esempio a cavallo tra il terzo e il quarto anno).

Obiettivi

- Rafforzare il significato fisico di area e introdurre il concetto di integrale a partire dal suo significato grafico.
- Introdurre il calcolo integrale con metodi numerici.
- Fare apprendere un metodo numerico per calcolare il lavoro di forze non costanti.
- Fare comprendere la necessità di un trattamento numerico e conseguente uso della programmazione.
- Rendere consapevoli che i problemi matematici non hanno sempre soluzioni analitiche.
- Introdurre in maniera intuitiva i concetti di convergenza di successione, di limite e il teorema del confronto.
- Giustificare l'utilizzo di e come base privilegiata di esponenziali e logaritmi.

Elementi salienti dell'approccio metodologico

- Didattica per problemi: vengono assegnate delle schede di lavoro. Dall'esecuzione dei compiti assegnati emergono i concetti teorici da veicolare.
- Ribaltamento dell'approccio analitico:
 1. Si parte dal grafico per approdare al calcolo numerico dell'integrale senza l'uso di tecniche di integrazione.
 2. Si ricava e come limite a partire da un problema geometrico di cui lo stesso numero è soluzione.
- Uso di metodi numerici implementati attraverso la programmazione del calcolatore.

Materiali, strumenti e apparecchi utilizzati

- Software GeoGebra, Excel, linguaggio di programmazione C++.
- Uso della LIM in classe e nel laboratorio.
- Schede di lavoro.
- Dispense autoprodotte.

Ambienti in cui si è sviluppato il percorso

- Aula.

- Aula di informatica.

Tempo impiegato

- Messa a punto preliminare nel gruppo LSS: 5 ore.
- Progettazione specifica: 20 ore (verifica dei materiali e degli strumenti; realizzazione preliminare delle esperienze con GeoGebra; ricerca dei testi storici; redazione delle dispense, delle schede di laboratorio e di lavoro; definizione del percorso).
- Periodo: maggio.
- Tempo-scuola di sviluppo del percorso: 15 ore (7 matematica, 3 fisica, 4 informatica, 1 per la verifica finale).
- Documentazione del percorso: 30 ore.

Descrizione del percorso didattico

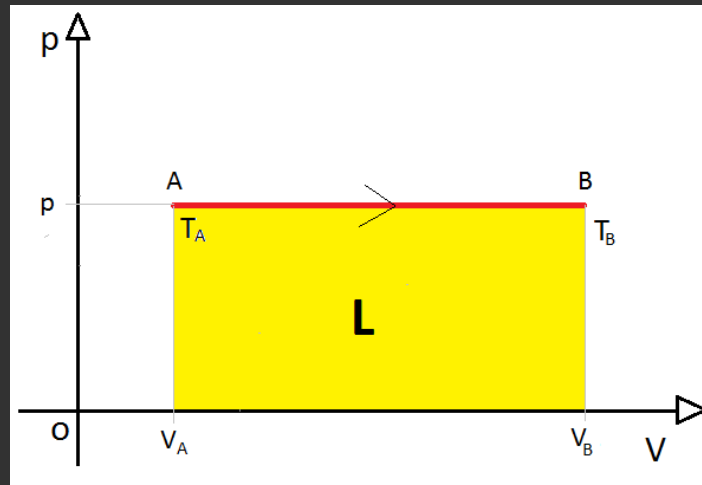
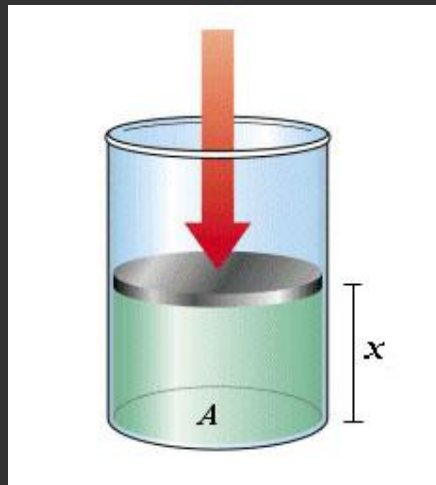
- Nella prima parte del percorso si affronta il problema dell'integrazione numerica, con una riflessione sulle procedure da adottare e si cercano i metodi più efficaci per minimizzare l'errore.
- Nella seconda parte si presenta il metodo di Gregorio di San Vincenzo e si giunge alla definizione geometrica di e .

Prerequisiti

- **Fisica**: concetto di lavoro, lavoro di una forza non costante.
- **Geometria**: proprietà delle dilatazioni e contrazioni.
- **Algebra**: caratteristiche delle successioni aritmetiche e geometriche.
- **Informatica**: conoscenza del linguaggio C++ e utilizzo dei cicli.

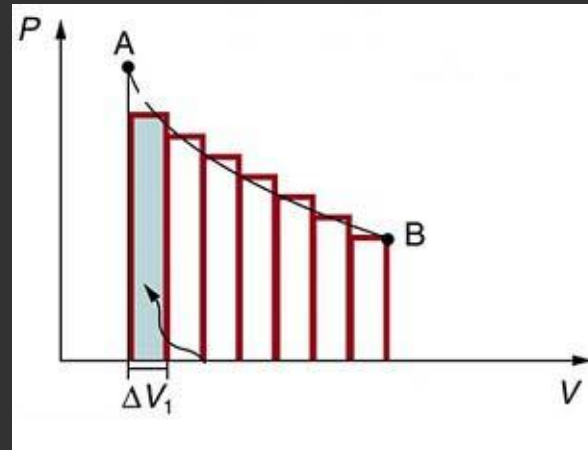
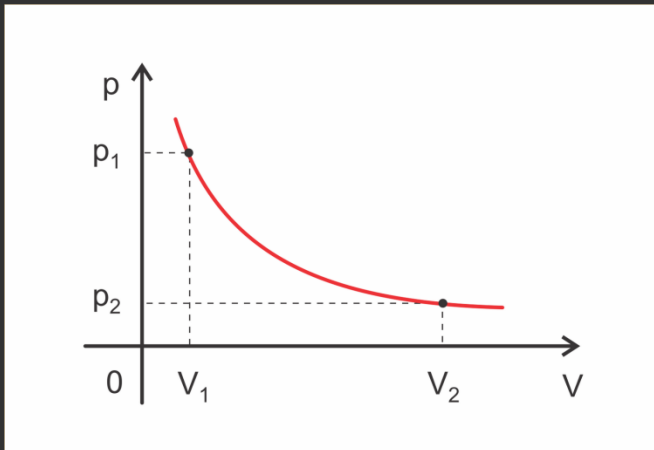
Punto di partenza: il lavoro

- Quando comprimiamo isobaricamente un gas compiamo un certo lavoro L che corrisponde sul piano pV all'area di un rettangolo.



Lavoro in una trasformazione isoterma

- Nel caso di una trasformazione isoterma abbiamo, sul piano pV un'iperbole.
- Il lavoro sarà dato dall'area sottesa al grafico tra i punti di ascissa V_1 e V_2 .

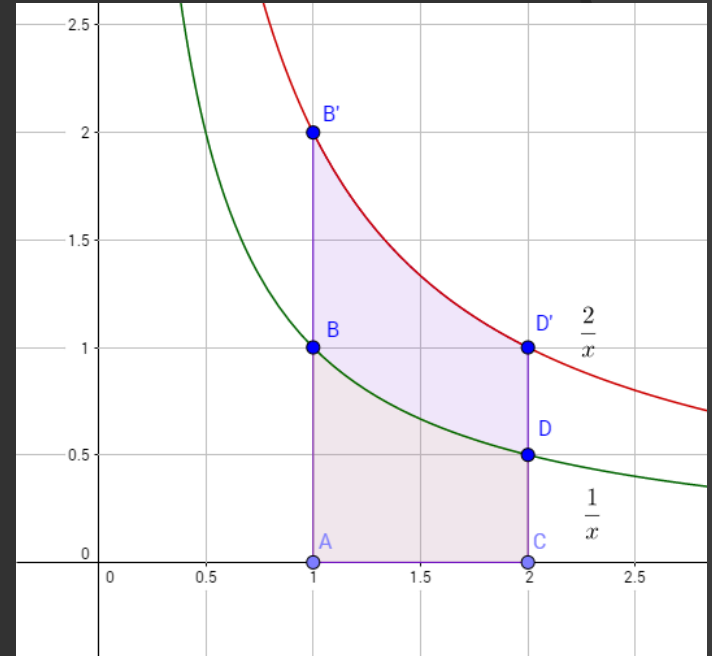


Il problema matematico

- Come possiamo calcolare l'area sottesa a un'iperbole?
- Quale errore commettiamo? L'idea è quella di calcolare il lavoro approssimando la trasformazione isoterma con una sequenza di brevi trasformazioni isobare.
- Operazioni analoghe sono già state fatte per il calcolo dello spazio percorso sul grafico s-t e per il lavoro della forza elastica.
- Siamo in presenza del calcolo di un'area che non è assimilabile a quella di un triangolo o di un trapezio ma a una regione mistilinea chiamata *trapezoide*.

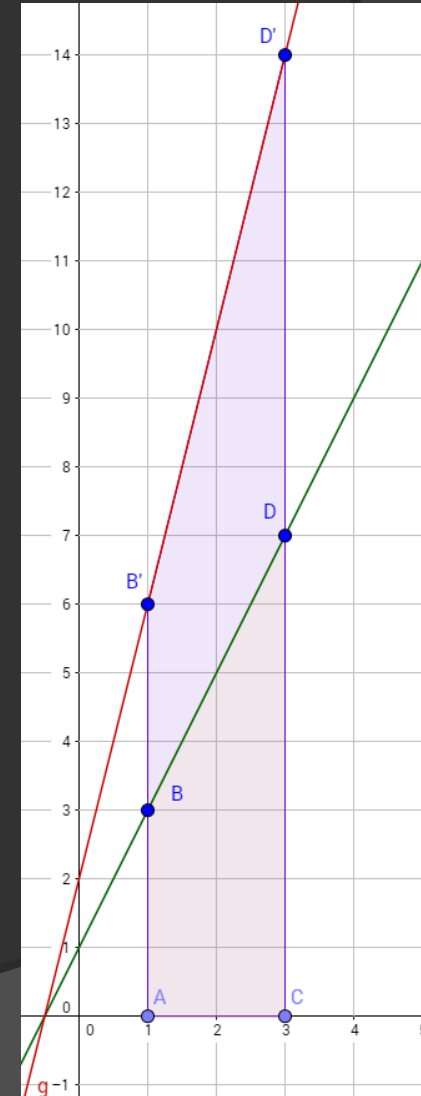
Il problema matematico

- Usando le variabili canoniche x e y in luogo di p e V e ricordando che il prodotto nRT è costante la nostra legge diventa $xy = k$.
- Come varia l'area sottesa a $y=k/x$ al variare di k ?



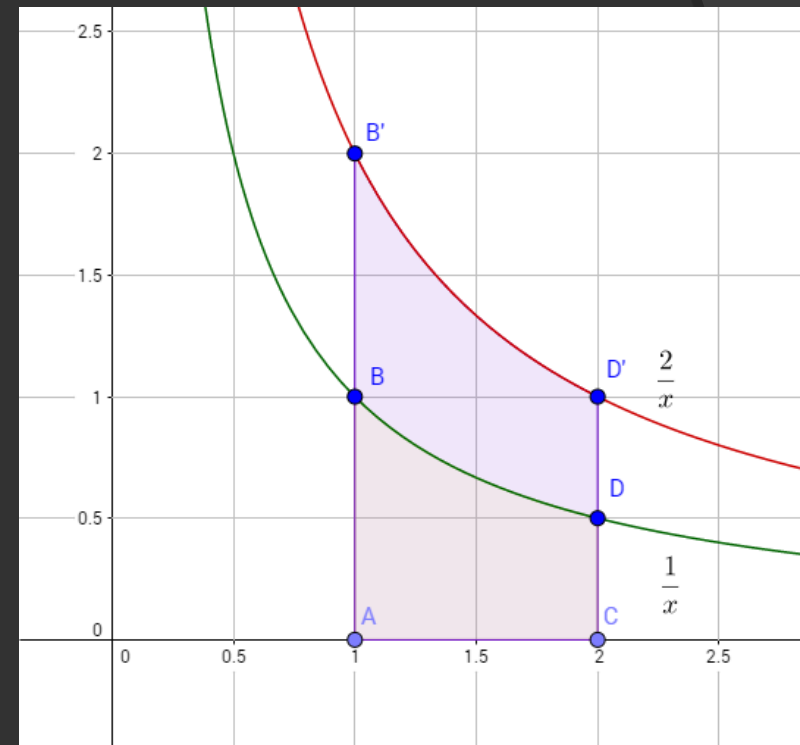
Facciamo un esempio

- Nella scheda di lavoro assegnata viene richiesto di confrontare l'area sottesa alla funzione $f(x) = 2x+1$ tra due estremi $x_0 = 1$ e $x_1 = 3$ e la funzione $g(x) = 2f(x)$ ovvero $y = 4x+2$.
- Otteniamo nel primo caso il trapezio di vertici $A(1,0)$, $B(1,3)$, $C(3,0)$, $D(3,7)$.
- Nel secondo caso il trapezio di vertici $A(1,0)$, $B'(1,6)$, $C(3,0)$, $D'(3,14)$.
- L'area del secondo trapezio è il doppio del primo.



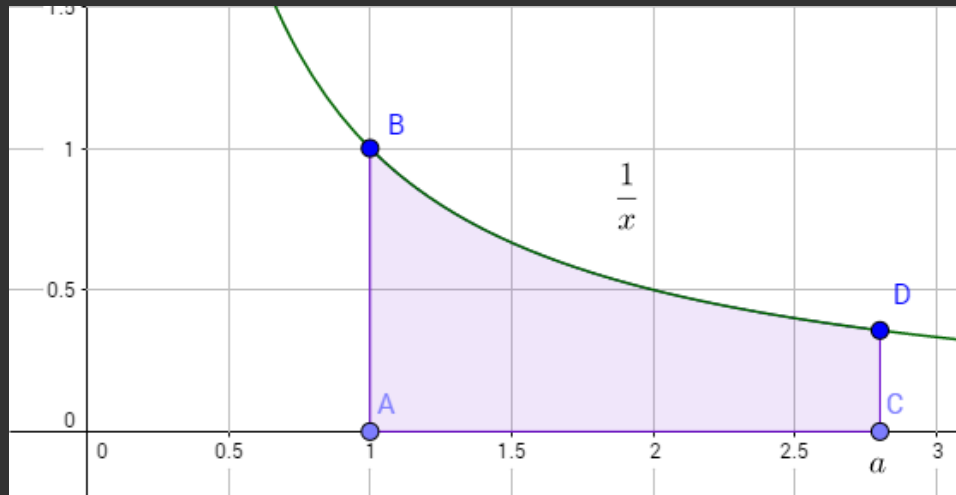
Ritorniamo all'iperbole

- Viene chiesto agli studenti cosa si aspettino nel caso dell'iperbole.
- Congetturano in maniera convinta che l'area sottesa a $y=1/x$ sia la metà di quella sottesa a $y=2/x$ e un terzo di quella sottesa a $y=3/x$: una dilatazione lungo l'asse y provoca una uguale dilatazione dell'area sottesa.



Semplifichiamo il problema

- Prendiamo allora per comodità $k = 1$ e cerchiamo di calcolare l'area sottesa all'iperbole equilatera delimitata dall'asse x e dalle rette $x=1$ e $x=a$ (ovvero integrare la funzione $y=1/x$ tra gli estremi 1 e a).
- Cercheremo poi di generalizzare i risultati ottenuti.

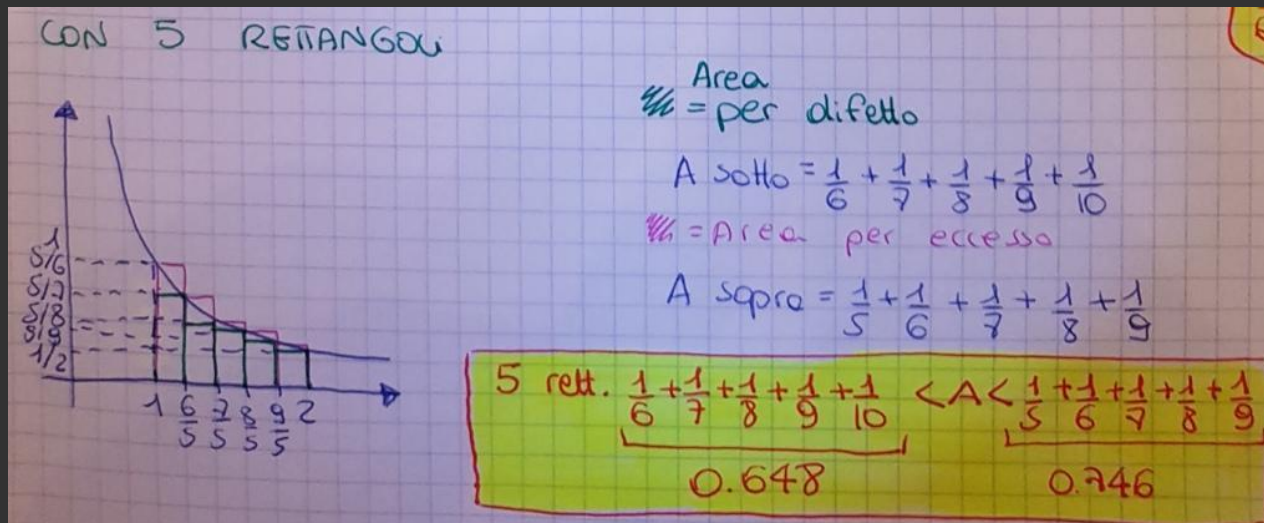


Meglio rettangoli o trapezi?

- Come fare? La maggioranza degli studenti propone di usare rettangoli, due propongono di usare dei trapezi.
- Quale altezza assegnare ai rettangoli?
- Alcuni propongono di utilizzare come altezze le ordinate dei punti medi.
- Altri di fare la media tra le aree dei rettangoli inscritti e circoscritti (**affiora in maniera intuitiva il metodo del confronto**)

Un po' di calcolo a mano

- Si pone $a=2$ e si calcola l'area dei rettangoli che approssimano la regione A per eccesso e per difetto con numero di rettangoli e di trapezi pari a 1, 2, 5.



Deduciamo le formule generali

- Viene chiesto agli studenti di ricavare le formule generali per calcolare l'area.
- Si procede insieme a scriverle in maniera formale.

NEU' AREA DEI TRAPEZI TUTTI I TERMINI HANNO $/2$ E $\times \frac{1}{5}$

⇒

$$\frac{(1 + 2 \cdot \frac{5}{6} + 2 \cdot \frac{5}{7} + 2 \cdot \frac{5}{8} + 2 \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{5}}{2}$$

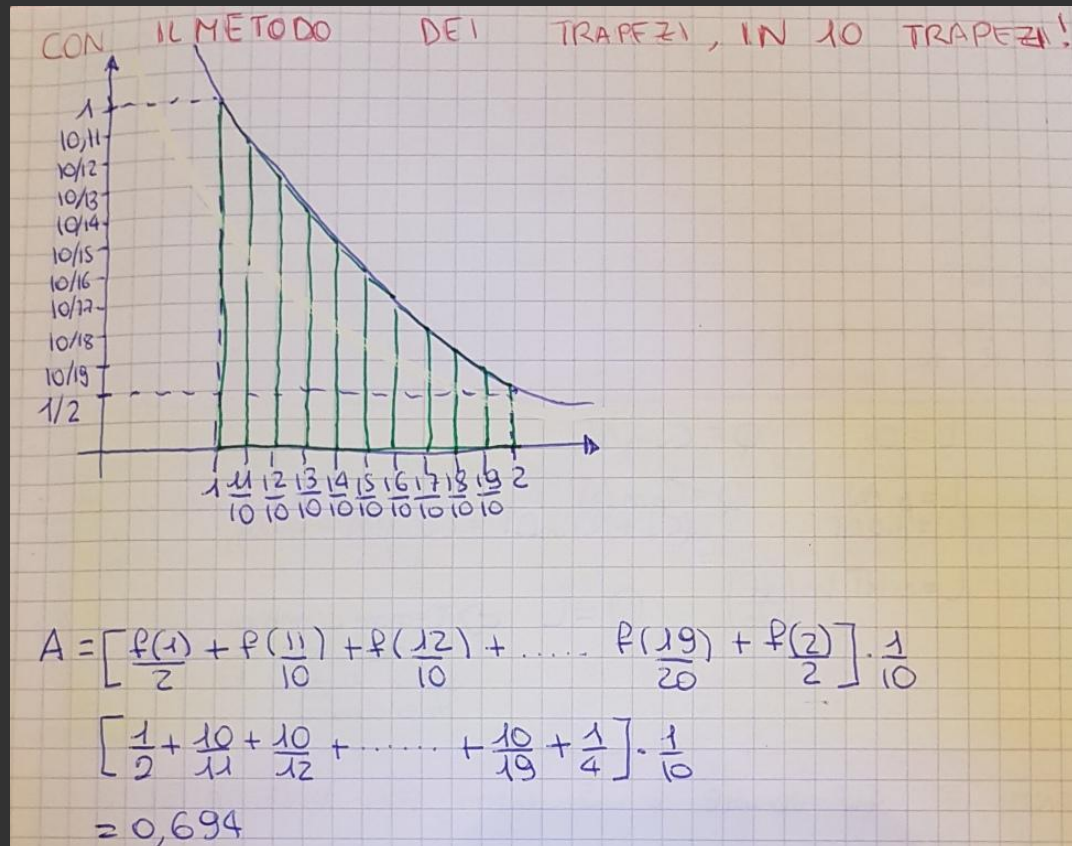
DIVISO PER 2

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9} + \frac{1}{4} \right) \cdot \frac{1}{5} \rightarrow \text{altezza trapezi}$$

$\frac{f(1)}{2}$ $f(5/6)$ $f(5/7)$ $f(5/8)$ $f(5/9)$ $\frac{f(2)}{2}$

$\dots \rightarrow f(5/8)$

- Si scrive la formula generale e si calcola l'area a mano nel caso di 10 rettangoli o trapezi.



- Al termine si confrontano i vari metodi.

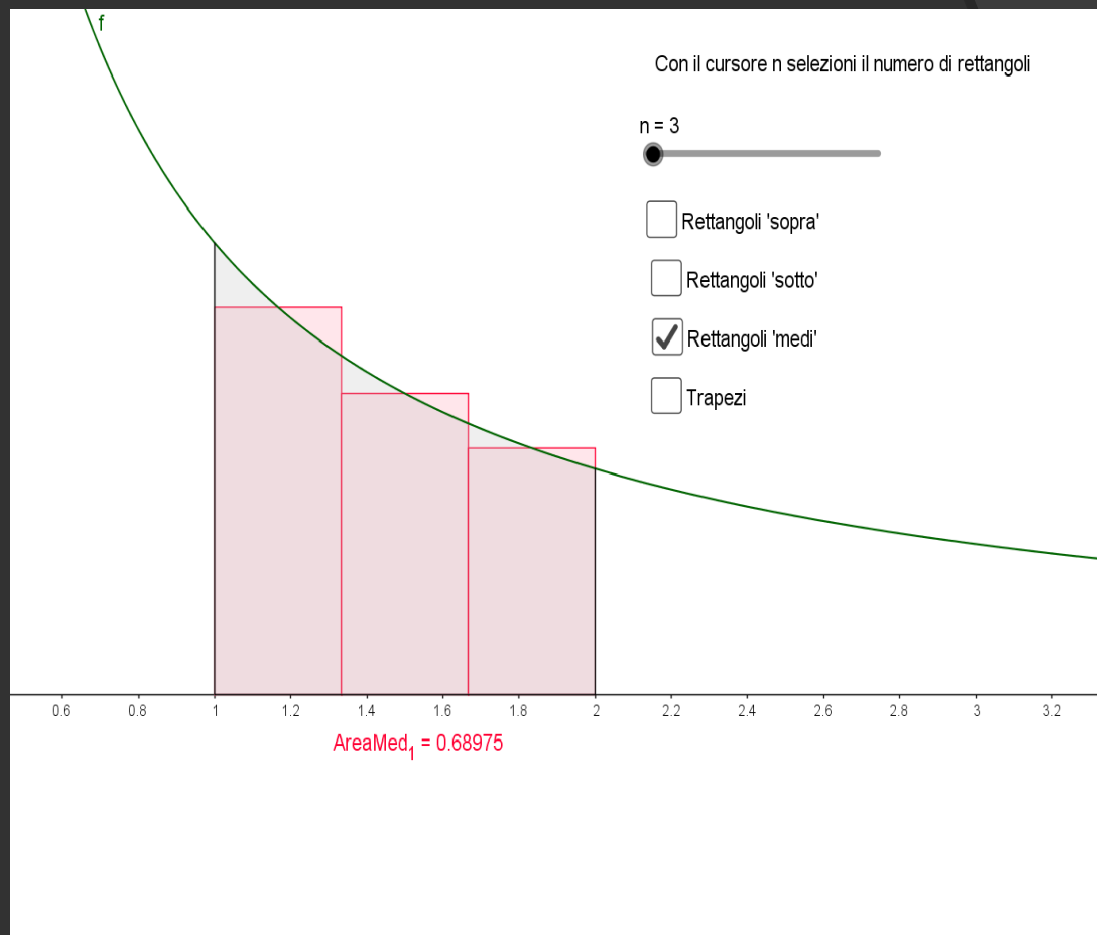
Necessità di utilizzare il calcolatore

- Emerge subito la consapevolezza che per minimizzare l'errore abbiamo bisogno di un numero molto grande di rettangoli: ciò porta all'esigenza di creare un procedimento automatizzato che gestisca un alto numero di operazioni.
- Da questo punto in poi lavoreremo usando in classe GeoGebra con le funzioni rettangolo e trapezio e in aula di informatica programmando idonee procedure di calcolo.

Il lavoro con GeoGebra

Usando GeoGebra possiamo sfruttare le funzioni, già implementate nel software, Rettangoli e Trapezi per valutare l'area sottesa alla curva.

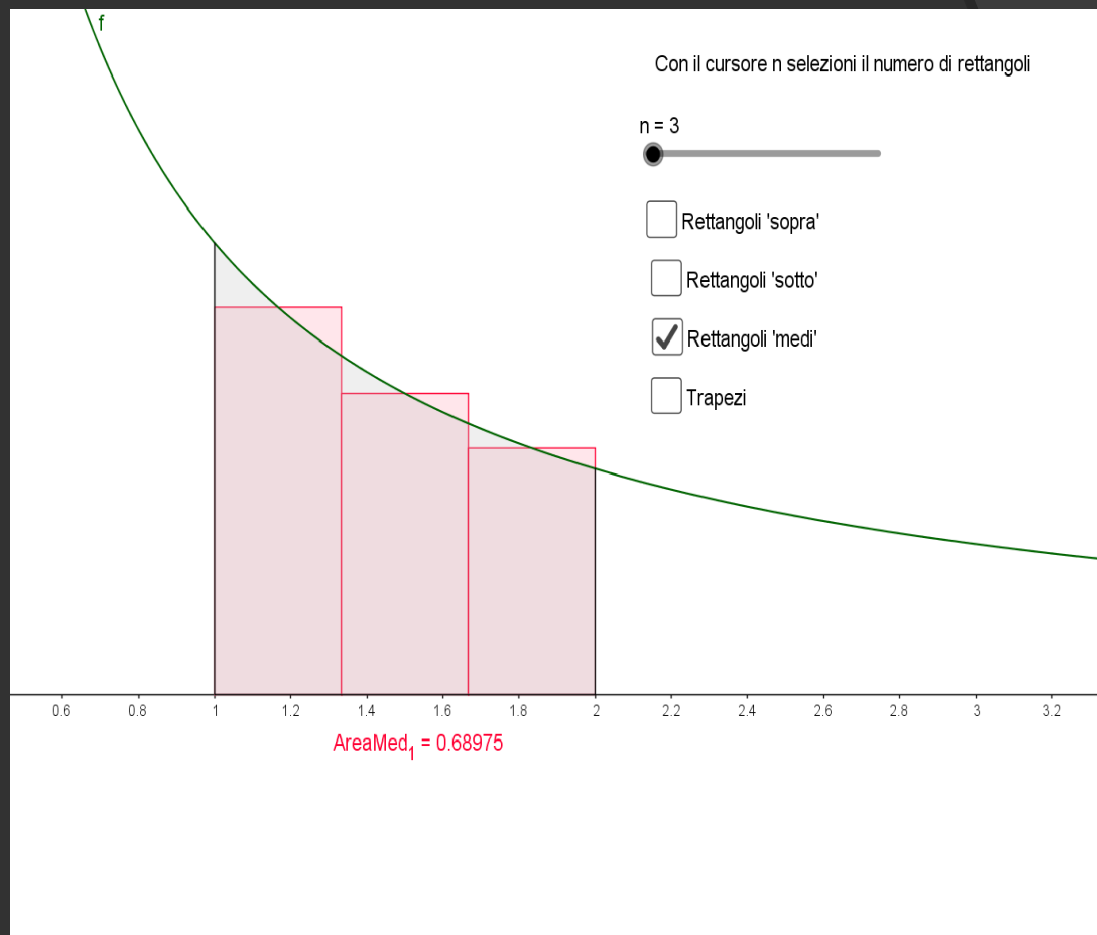
La funzione Rettangoli consente di scegliere l'altezza $f(x_0)$. L'ascissa x_0 si seleziona inserendo un numero compreso tra 0 e 1 (dove 0 corrisponde all'estremo sinistro, 1 a quello destro, 0.5 al punto medio).



Link al file in figura: <https://www.geogebra.org/m/QY85FqZt>

Il lavoro con GeoGebra

La possibilità di aumentare notevolmente il numero dei rettangoli (o dei trapezi) convince gli studenti che scegliendo n grande non cambi significativamente il risultato.



Link al file in figura: <https://www.geogebra.org/m/QY85FqZt>

Attività nel laboratorio di informatica

- Si implementano in C++ i passaggi discussi in classe per approdare al calcolo dell'area usando il metodo dei rettangoli e quello dei trapezi e confrontandone infine i risultati.
- I due metodi utilizzano un ciclo *for* già noto agli studenti.

Metodo dei rettangoli

```
1: //programma per l'integrazione numerica col metodo dei
   //rettangoli
2: //l'utente deve scegliere il primo estremo a, il secondo
   //estremo b e il numero di intervallini in cui suddividere [a,b]
3: //la funzione è data all'interno del programma
4:
5: #include <stdio.h>
6: #include <math.h>
7:
8: float funzione (float x)
9: {
10:     return exp(x)-x;
11: }
12:
13: main()
14: {
15:     float a, b, h, i, integrale=0;
16:     int n;
17:     printf("Sto considerando la funzione y=exp(x)-x: \n");
18:     printf("Inserisci il primo estremo di integrazione: ");
19:     scanf("%f",&a);
20:     printf("Inserisci il secondo estremo di integrazione: ");
21:     scanf("%f",&b);
22:     printf("Inserisci il numero di intervalli: ");
23:     scanf("%d",&n);
24:     h= (b-a)/n;
25:     for(i=a; i<b; i=i+h)
26:     {
27:         integrale = integrale + h* funzione(i);
28:     }
29:     printf("L'integrale approssimato della funzione vale: %f",
   integrale);
30: }
31:
```

Metodo dei trapezi

```
1: //programma per l'integrazione numerica col metodo dei trapezi
2: //l'utente deve scegliere il primo estremo a, il secondo
   estremo b e il numero di intervallini in cui suddividere [a,b]
3: //la funzione è data all'interno del programma
4:
5: #include <stdio.h>
6: #include <math.h>
7:
8: float funzione (float x)
9: {
10:     return exp(x)-x;
11: }
12:
13: main()
14: {
15:     float a, b, h, i, integrale=0;
16:     int n;
17:     printf("Sto considerando la funzione y=exp(x)-x: \n");
18:     printf("Inserisci il primo estremo di integrazione: ");
19:     scanf("%f",&a);
20:     printf("Inserisci il secondo estremo di integrazione: ");
21:     scanf("%f",&b);
22:     printf("Inserisci il numero di intervalli: ");
23:     scanf("%d",&n);
24:     h= (b-a)/n;
25:     for(i=a; i<b; i=i+h)
26:     {
27:         integrale = integrale + (funzione(i) +
funzione(i+h))*h/2;
28:     }
29:     printf("L'integrale approssimato della funzione vale: %f",
integrale);
30: }
31:
```

Confronto tra i due metodi

```
45:     for (n=100; n<=1000000; n=n*10)
46:     {
47:         printf("Con n=%d :\n \n", n);
48:         int_rettangoli=rettangoli(a,b,n);
49:         printf("metodo dei rettangoli: %f\n", int_rettangoli);
50:         int_trapezi=trapezi(a,b,n);
51:         printf("metodo dei trapezi: %f \n \n", int_trapezi);
52:     }
```

Si calcolano le aree con un numero di rettangoli o trapezi crescente da $n=10$ a $n=1000000$ con una progressione geometrica di ragione 10.

Si nota che all'aumentare del numero dei rettangoli o dei trapezi i valori ottenuti convergono con precisione diversa a seconda del metodo utilizzato e dall'espressione della funzione.

Gli studenti giudicano ragionevole per n grande ritenere i due metodi equivalenti.

Esempio di eseguibile

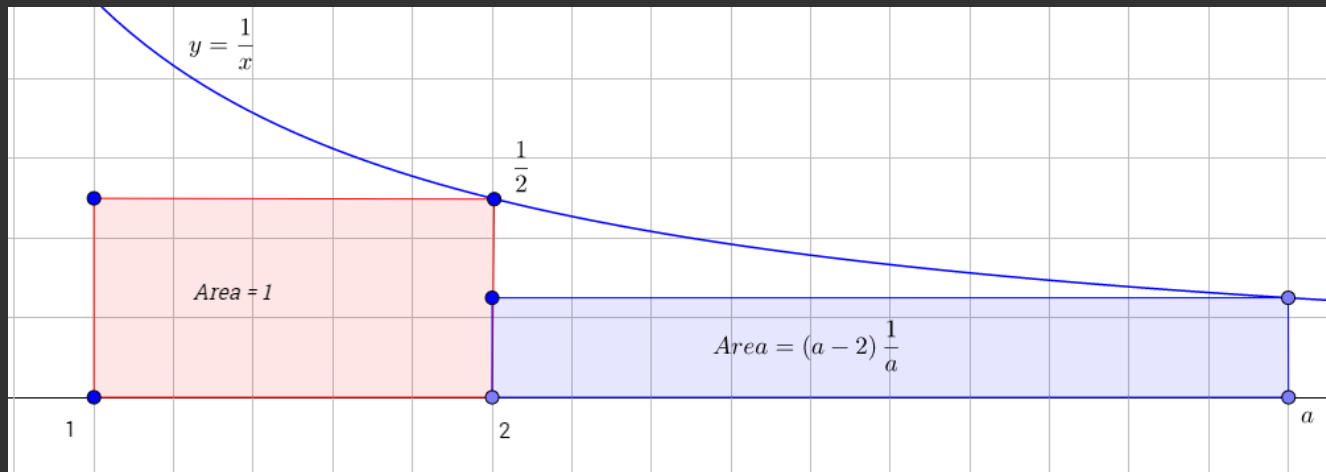
```
Sto considerando la funzione  $y=\exp(x)-x$ :  
Inserisci il primo estremo di integrazione: -3  
Inserisci il secondo estremo di integrazione: 2  
Con n=100 :  
  
metodo dei rettangoli: 10.051764  
metodo dei trapezi: 10.118464  
  
Con n=1000 :  
  
metodo dei rettangoli: 9.833493  
metodo dei trapezi: 9.839341  
  
Con n=10000 :  
  
metodo dei rettangoli: 9.840922  
metodo dei trapezi: 9.841498  
  
Con n=100000 :  
  
metodo dei rettangoli: 9.840558  
metodo dei trapezi: 9.840623  
  
Con n=1000000 :  
  
metodo dei rettangoli: 9.834571  
metodo dei trapezi: 9.834577
```

Una proposta alternativa

- Finora abbiamo utilizzato rettangoli con la stessa base o trapezi con la stessa altezza ma tra loro diversi.
- A questo punto il docente formula una nuova richiesta: **è possibile disegnare due rettangoli adiacenti che hanno la stessa area?** E in che rapporto devono essere le loro basi?

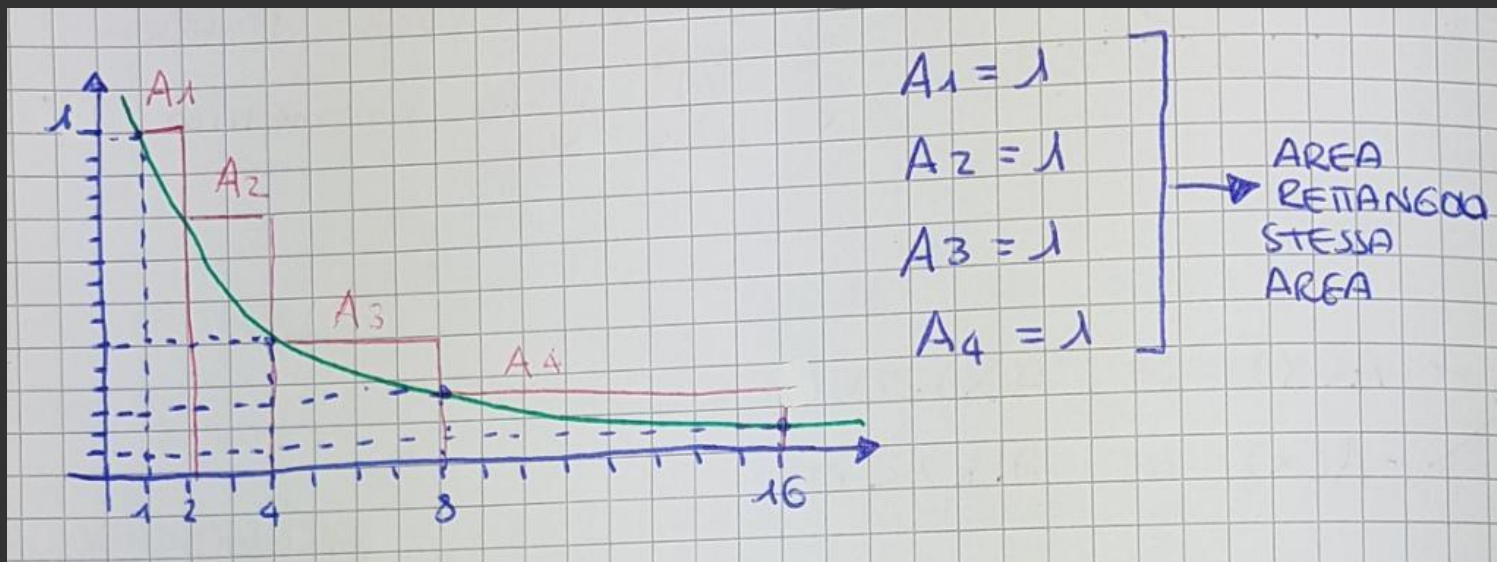
Parte la caccia al rettangolo misterioso

- Dato il rettangolo inscritto all'iperbole, con base sull'asse x ed estremi di ascissa 1 e 2, viene richiesto agli studenti di trovare il punto di ascissa a tale che il rettangolo di base compresa tra a e 2 sia equivalente al primo.



Quanto vale a ?

- Gli studenti trovano per a un valore pari a 4.
- La richiesta seguente è di cercare il rettangolo adiacente successivo di uguale area: ottengono $a = 8$.

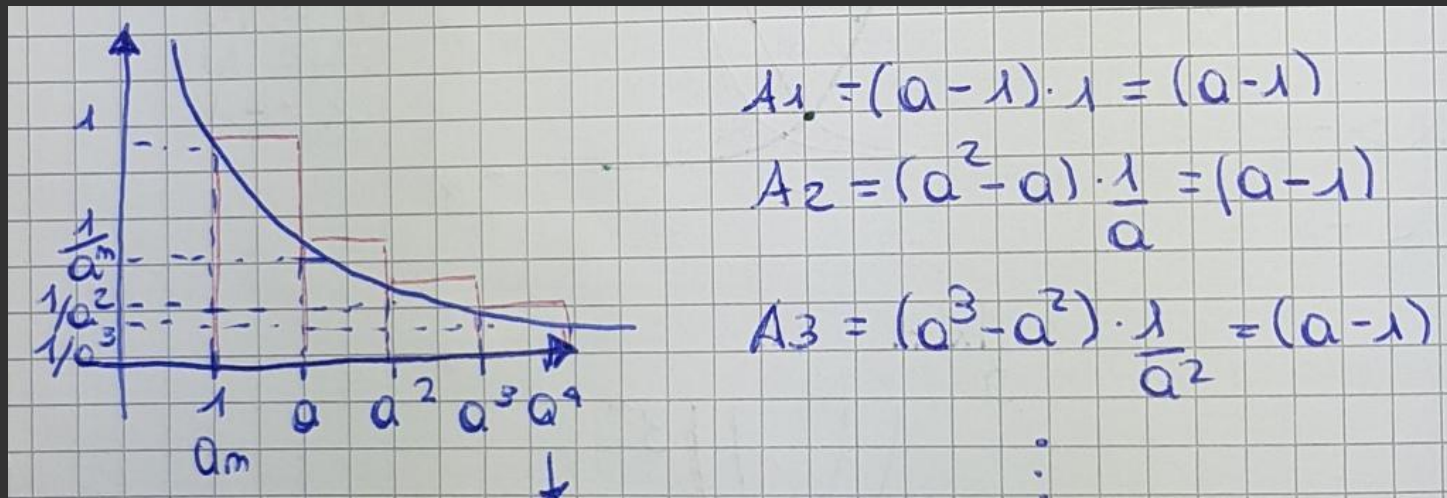


Quanto vale a ?

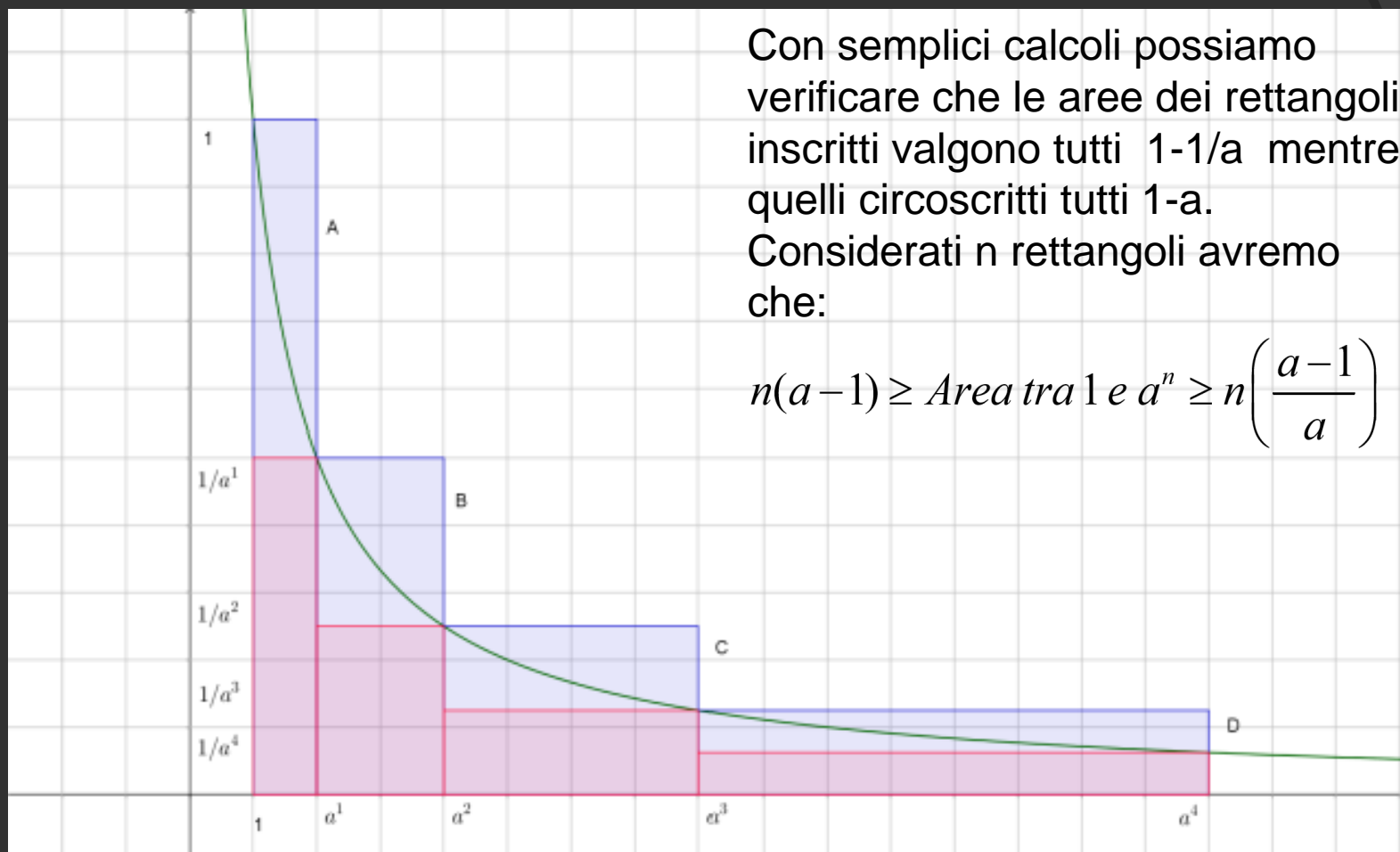
- È un caso che i valori di a siano potenze del 2?
- Il docente invita gli studenti a riprovare prendendo la base con estremi di ascissa 1 e 3.
- Si ripete lo stesso procedimento con un rettangolo di base compresa tra i punti di ascissa 1 e 3. L'area è pari a $2/3$.
- Stavolta i vertici successivi hanno ascissa 9 e 27.
- Ancora una volta i punti sono in progressione geometrica.

Quanto vale a ?

- Proviamo a generalizzare usando come ascisse di partenza 1 e un generico valore a .
- Abbiamo effettivamente una progressione geometrica di ragione a .
- Possiamo ottenere identico risultato prendendo i rettangoli circoscritti all'iperbole.



Riflettiamo sul grafico



Con semplici calcoli possiamo verificare che le aree dei rettangoli inscritti valgono tutti $1 - 1/a$ mentre quelli circoscritti tutti $1 - a$.

Considerati n rettangoli avremo che:

$$n(a-1) \geq \text{Area tra } 1 \text{ e } a^n \geq n \left(\frac{a-1}{a} \right)$$

- Cosa fare di questa scoperta? Può esserci utile?

Peccato! Siamo arrivati secondi

- ◉ Qualcuno ha già scoperto questa singolare proprietà prima di noi.
- ◉ Questo qualcuno è **Gregorio di San Vincenzo**, un matematico belga del Seicento.



Chi è Gregorio di San Vincenzo

- ◉ Matematico, nato a Bruges l'8 settembre 1584, morto a Gand il 27 gennaio 1667.
- ◉ Recatosi a Roma per ragioni di studio, si fece nel 1605 gesuita e fu discepolo di C. Clavio. Salito rapidamente in fama, fu da Ferdinando II chiamato a Praga; ed ivi, quando la Malá Strana fu occupata dagli Svedesi (1648), venne gravemente ferito e perdette molti suoi manoscritti. Passò poi alla corte di Filippo IV di Spagna, quale istitutore di Don Giovanni d'Austria; e verso la fine della sua vita tornò in patria per assumervi a Gand l'ufficio di bibliotecario.
- ◉ La rinomanza di Gregorio di San Vincenzo è dovuta soprattutto al suo voluminoso *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum conii* (Anversa 1647). Quest'opera ebbe fervidi ammiratori e fieri critici; ma le stesse polemiche da essa suscitate - protrattesi fin dopo la morte dell'autore - contribuirono a promuovere i primi sviluppi dei metodi infinitesimali. Il S. V., con un suo metodo, che egli designa col nome di *ductus plani in planum* e che presenta qualche analogia con quello *degli indivisibili* di Bonaventura Cavalieri, riesce, sia pure soltanto per via euristica, a ottenere la cubatura di solidi particolari e a farne dipendere speciali quadrature. Così determina - a quanto pare, indipendentemente dal Cavalieri - l'area della spirale di Archimede come equivalente a quella di un segmento parabolico; e riduce il calcolo di π a quello del volume di un solido compreso tra due cilindri parabolici ad assi ortogonali.
- ◉ Nell'*Opus* il S. V. dà anche, implicitamente, la proprietà dei logaritmi di misurare aree iperboliche.

Come sfruttare questa nuova proprietà?

- Gli studenti affrontano la questione importante: se vogliamo integrare tra due estremi qualsiasi, questi non saranno in generale uno la potenza dell'altro.
- C'è chi nota che invece è possibile: basta porre a come la radice ennesima dell'estremo di integrazione!

Calcoliamo l'area tra 1 e 2

- Come dobbiamo scegliere a se vogliamo integrare ad esempio tra 1 e 2?
- Scelto il numero di rettangoli n allora a deve essere la radice ennesima di 2.

The image shows a handwritten derivation on a grid background. At the top, the formula $A_{\text{totale}} = (a-1)m$ is written and highlighted in yellow. Below it, the text 'Area tra 1 e 2' is written. To the right, the equation $a^{20} = 2 \Rightarrow a = \sqrt[20]{2}$ is written. Below that, $m = 20$ is written, and the final calculation $A = (\sqrt[20]{2} - 1) \cdot 20 = 0,705$ is shown. At the bottom left, the text 'PRENDO 100 RETTANGOLI:' is partially visible.

$$A_{\text{totale}} = (a-1)m$$

Area tra 1 e 2

$$a^{20} = 2 \Rightarrow a = \sqrt[20]{2}$$
$$m = 20 \quad A = (\sqrt[20]{2} - 1) \cdot 20 = 0,705$$

PRENDO 100 RETTANGOLI:

La radice n -esima di un numero

- Quali proprietà ha la radice ennesima di un numero?
- La discussione all'interno della classe porta a dire che la radice ennesima di un numero maggiore di uno sarà molto vicino ad uno.
- Agli studenti meno convinti viene proposto di calcolare la radice ennesima sfruttando il tasto **Ans** della calcolatrice (stando bene attenti a sottolineare che stiamo considerando solo le radice n -esime con n potenza di 2).

Confrontiamo questo metodo con quelli precedenti

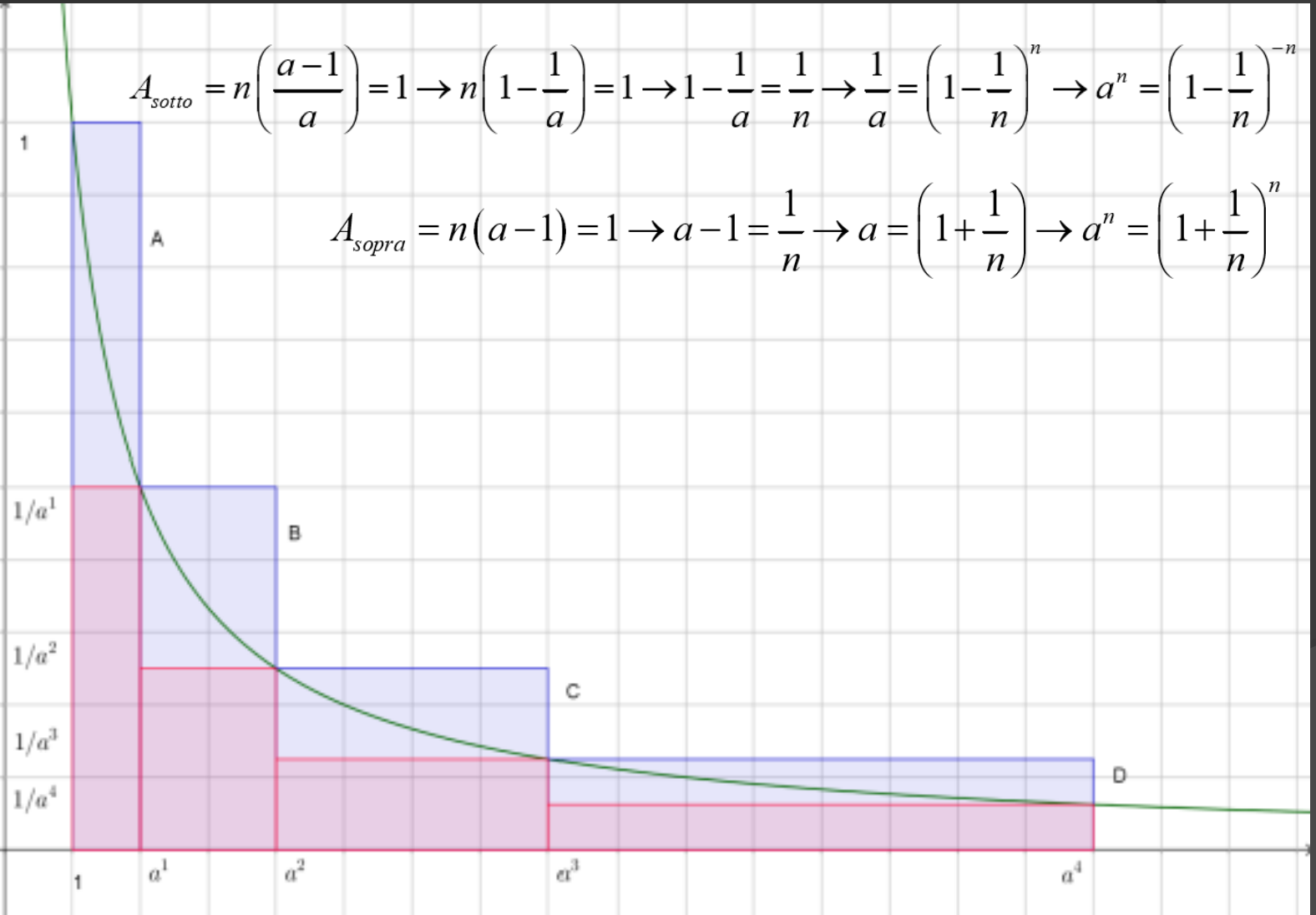
- Mettiamo a confronto i metodi visti finora, quello dei rettangoli (seconda e terza colonna) e quello di Gregorio di San Vincenzo (quinta e sesta): già con cinque rettangoli la differenza è inferiore all'1%.

n	Area rettangoli circoscritti	Area rettangoli inscritti	$a = \sqrt[n]{2}$	Area rettangoli circoscritti	Area rettangoli inscritti
1	1.000	0.500	2.000	1.000	0.500
2	0.833	0.583	1.414	0.828	0.586
5	0.746	0.646	1.149	0.745	0.647
10	0.719	0.669	1.071	0.718	0.670
100	0.696	0.691	1.007	0.696	0.691

Proviamo a invertire il problema

- Preso come primo estremo dell'area sottesa all'iperbole $x=1$, quanto dovrebbe valere il secondo estremo affinché l'area risulti unitaria?
- Il secondo estremo vale a^n : invertendo la formula otteniamo che questo numero deve essere compreso tra i valori di due successioni.

Cerchiamo a^n in funzione di n



Cerchiamo a^n in funzione di n

- Colpo di scena: aumentando il numero dei rettangoli a 100, 1000, 10000, 1000000, 1000000000... ci si avvicina sempre più a un numero non periodico molto particolare: questo numero ricorre spesso in matematica ed è stato chiamato e .

Handwritten table on grid paper showing the values of a^n for different values of n . The table is written in blue ink.

Es.	a^n	
	$n = 100$	2,704
	$n = 1000$	2,717
	$n = 1000000$	2,718
	$n = 100000000$	2,718
	$n = 1000000000$	2,718

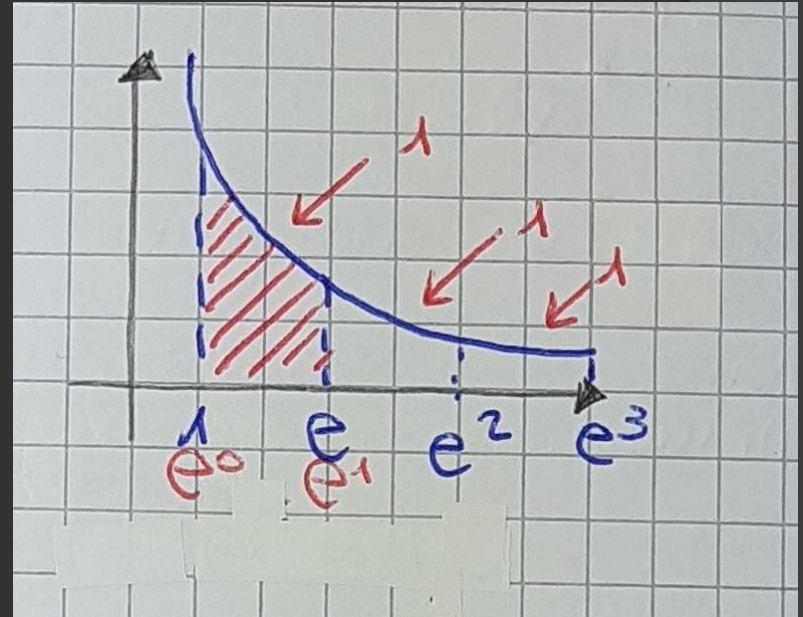
Quanto vale e ?

- Come si vede per $n = 10000000$ la differenza tra le due aree è 0.000000271 ovvero è inferiore a una parte su dieci milioni!

n	$a^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	$a^n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$
10	2.593742460	2.867971991
100	2.704813829	2.731999026
1000	2.716923932	2.719642216
10000	2.718145927	2.718417755
100000	2.718268237	2.718295420
1000000	2.718280469	2.718283188
10000000	2.718281693	2.718281964

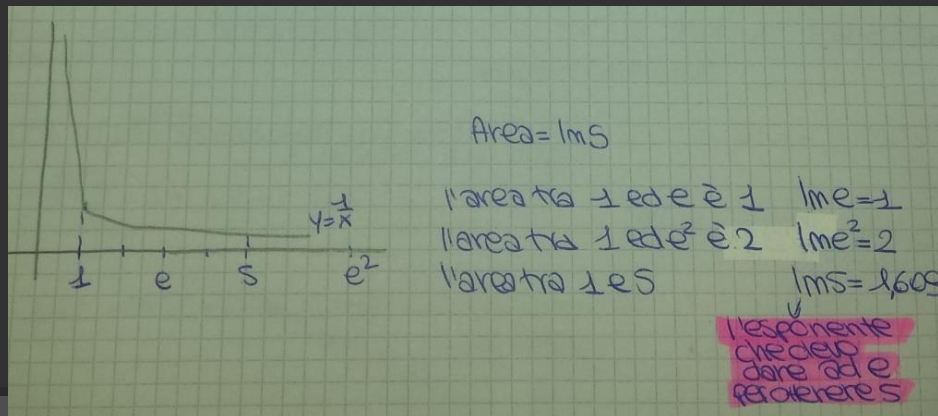
Progressioni geometriche ed aritmetiche

- Notiamo che se tra 1 ed e l'area vale 1 allora varrà 1 anche l'area tra e ed e^2 , e^2 ed e^3 eccetera.
- Pertanto l'area tra 1 ed e^2 misura 2, tra 1 ed e^3 misura 3, tra 1 ed e^4 misura 4, eccetera.
- Gli studenti riconoscono una relazione tra la progressione geometrica delle basi dei trapezoidi e la progressione aritmetica delle aree.



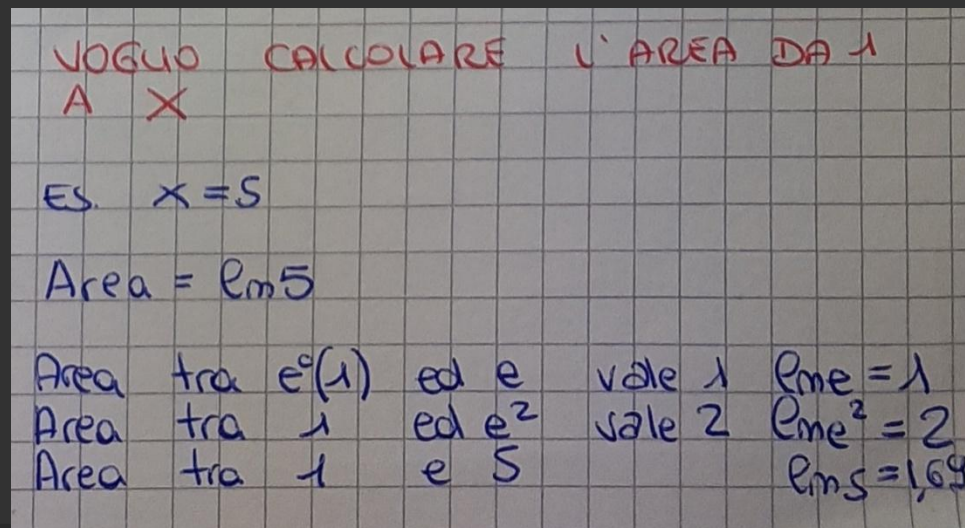
Generalizziamo

- In generale il valore numerico dell'area tra 1 ed e^x corrisponderà a x .
- Se vogliamo sapere quanto vale l'area sottesa tra 1 e 5 ci occorrerà sapere quanto vale l'esponente da assegnare ad e per ottenere 5: in pratica risolvere l'equazione $e^x = 5$.
- Il valore di x dovrà essere un numero compreso tra 1 e 2 dal momento che l'area tra 1 ed e vale 1 e tra 1 ed e^2 (che è un numero maggiore di 7) vale 2.



Introduciamo il logaritmo in base e

- La funzione che associa a un numero dato b l'esponente x da assegnare alla base e per ottenere b si chiama *logaritmo naturale*.
- L'area compresa tra gli estremi 1 e il generico b varrà allora $x = \ln(b)$, dove x è l'esponente da assegnare ad e per ottenere b .

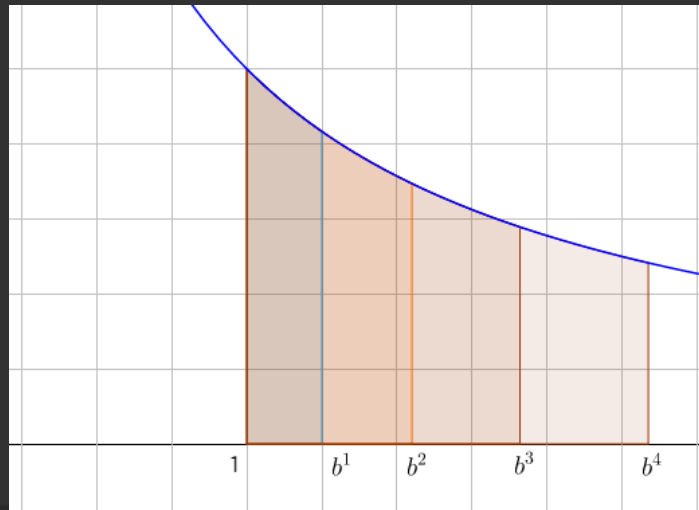


Introduciamo il logaritmo in base e

- L'operazione di trovare l'esponente x da assegnare alla base e per ottenere b diventa facile da eseguire perché i matematici hanno provveduto a calcolare in anticipo tali risultati raccogliendoli in tavole numeriche.

Proprietà del logaritmo

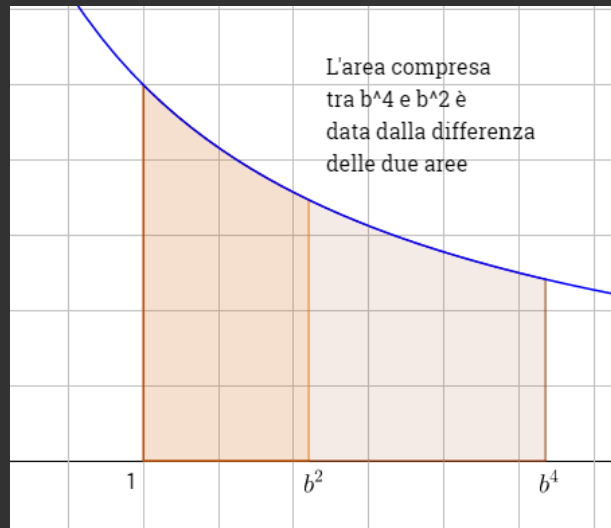
- Se l'area della regione compresa tra gli estremi 1 e il generico b vale allora $\ln(b)$ ne seguono alcune proprietà:
 - Se b è uguale a 1 allora la regione si riduce a un segmento. L'area quindi sarà nulla e pertanto: $\ln(1)=0$.
 - L'area tra 1 e b , b e b^2 , b^2 e b^3 è sempre la stessa quindi vale: $\ln(b^n) = n\ln(b)$.



Proprietà del logaritmo

- L'area tra b^n e b^m sarà uguale alla differenza delle due aree e pertanto:

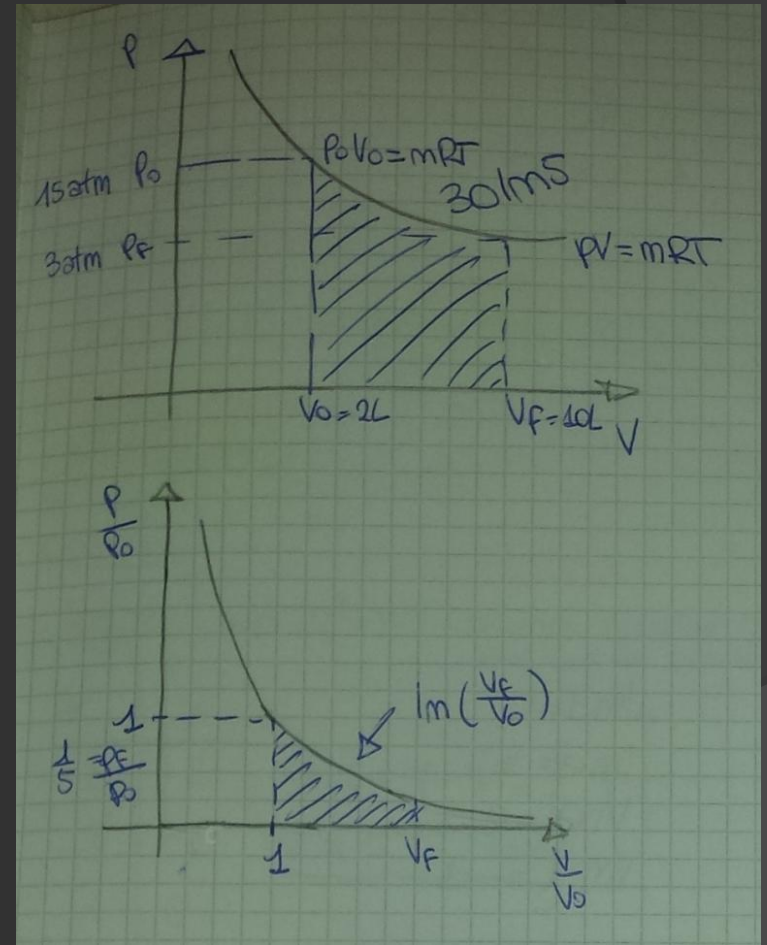
$$\ln(b^m) - \ln(b^n) = (m-n)\ln(b) = \ln(b^{m-n}) = \ln(b^m/b^n).$$



- Generalizzando la relazione precedente possiamo scrivere che $\ln(p) - \ln(q) = \ln(p/q)$.

Torniamo al problema di partenza

- Abbiamo visto che l'equazione dell'isoterma è del tipo $xy = k$ dove le due variabili x e y corrispondono a volume e pressione e la costante k , fattore di scala, è pari p_0V_0 ovvero a nRT .
- L'area sottesa sarà allora pari a k volte $\ln(V/V_0)$ ovvero:
$$L = nRT \ln(V/V_0).$$



Verifiche degli apprendimenti

- ◉ Al termine del percorso didattico è stata somministrata la prova di matematica illustrata nella slide successiva.
- ◉ I risultati sono stati soddisfacenti.

Esempio di verifica

1. Disegna la funzione $y = x^2 - 3x + 2$ e calcola l'area compresa tra l'asse x e le rette $x=1$ e $x=2$ approssimandolo con 4 rettangoli inscritti e 4 trapezi.
2. Hai visto come l'area sottesa all'iperbole $xy = 1$ compresa tra l'asse x e le rette $x=1$ e $x=e$ valga 1. A partire da questa informazione e dalle altre proprietà viste in classe:
 - (a) Spiega quanto vale la misura dell'area sottesa tra le rette $x = e^3$ ed $x = e^7$.
 - (b) Spiega quanto vale la misura dell'area sottesa all'iperbole di equazione $xy = 4$ tra le rette $x = 1$ e $x = e^7$.
 - (c) Spiega quanto vale la misura dell'area sottesa all'iperbole di equazione $xy = 4$ tra le rette $x = e^3$ ed e^7 .
3. Abbiamo definito l'area sottesa all'iperbole $xy = 1$ compresa tra l'asse x e le rette $x=1$ e $x=t$ come $\ln(t)$. A partire da questa informazione e dalle altre proprietà viste in classe:
 - (a) Spiega quanto vale la misura dell'area sottesa tra le rette $x = 4$ ed $x = 5$.
 - (b) Spiega graficamente perché $\ln(1) = 0$.
 - (c) Spiega perché $\ln(a^n) = n \ln(a)$.
4. Considera il rettangolo inscritto nella porzione di piano delimitata dall'iperbole di equazione $xy = 1$, l'asse delle ascisse e le rette di equazione $x = 2$ e $x = 3$. Trova il valore di a in modo che il rettangolo inscritto nella porzione di piano delimitata dall'iperbole, dall'asse delle ascisse e dalle rette di equazione $x = 3$ e $x = a$ abbia la stessa area.

Valutazione dell'efficacia del percorso didattico

- Al termine del percorso gli studenti si sono sentiti in grado, attraverso l'analisi numerica, di calcolare il lavoro anche in problemi più complessi.
- Hanno acquisito confidenza con il numero e e con le proprietà dei logaritmi introdotte per via grafica durante il percorso.
- Hanno esperito come l'informatica possa essere usata efficacemente per risolvere problemi di matematica.
- L'essere stati capaci di ricavare le formule del lavoro termodinamico, generalmente date senza dimostrazione, ha favorito un apprendimento attivo e non puramente mnemonico.
- Il percorso getta un ponte con argomenti futuri che saranno discussi con l'analisi (definizione intuitiva di limite di successione, teorema del confronto, integrale).