

REGIONE
TOSCANA



**Iniziativa realizzata con il contributo della Regione Toscana
nell'ambito del progetto**

Rete Scuole LSS

a.s. 2016/2017

LANCIO DI n DADI

Calcolo delle probabilità

Classe 4 A Liceo Classico

IIS “Carducci” Volterra (PI)

COLLOCAZIONE DEL PERCORSO EFFETTUATO NEL CURRICOLO VERTICALE

Dalle Indicazioni Nazionali emerge:

Saranno obiettivi dello studio: [...] un'introduzione ai concetti di base del calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica.

Lo studente apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica.

Lo studente apprenderà le caratteristiche di alcune distribuzioni di probabilità (in particolare, la distribuzione binomiale e qualche esempio di distribuzione continua).

OBIETTIVI ESSENZIALI DI APPRENDIMENTO

- Riconoscere l'importanza della conoscenza del calcolo della probabilità nella vita di tutti i giorni.
- Conoscere il concetto di evento distinguendo le varie definizioni di probabilità
- Individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l'uso del calcolo delle probabilità.
- Riconoscere situazioni aleatorie e rappresentare graficamente i risultati sperimentali
- Recuperare o introdurre, nell'ambito della probabilità, altri concetti matematici: frazioni, percentuali, tabelle e grafici.
- Avviare alla comprensione della legge dei grandi numeri, facendo vedere in uno schema di prove ripetute, che eventi casuali, al crescere del numero delle prove, seguono una “ crescente regolarità”.

ELEMENTI SALIENTI DELL'APPROCCIO METODOLOGICO

Il metodo proposto nel lavoro con le classi è inizialmente quello del *problem solving*, in cui le risposte non vengono date dall'insegnante, ma scoperte dagli alunni attraverso la costruzione, la manipolazione, la verbalizzazione e la discussione.

Si cerca di adottare il metodo sperimentale in cui si parte dall'esperienza (lancio ripetuto di n dadi) e si cerca successivamente di individuare la distribuzione teorica di probabilità.

MATERIALI, APPARECCHI E STRUMENTI IMPIEGATI

Dadi esaedrici

Calcolatrice scientifica

Software: foglio elettronico

AMBIENTE IN CUI È STATO SVILUPPATO IL PERCORSO

Aula della classe

Esterno (ogni studente a casa propria)

TEMPO IMPIEGATO

- Per la messa a punto preliminare nel Gruppo LSS: 2 ore
- Per la progettazione specifica e dettagliata nella classe: 1 ora
- Tempo-scuola di sviluppo del percorso: 3 ore

ALTRE INFORMAZIONI

Era stato progettato anche il lancio di dadi non esaedrici, ma per motivi di tempo il lavoro si è focalizzato solo sui dadi esaedrici.

Per il futuro si prenderanno in considerazione lanci di dadi con un numero di facce diverse, per evidenziare l'esistenza di distribuzioni non simmetriche.

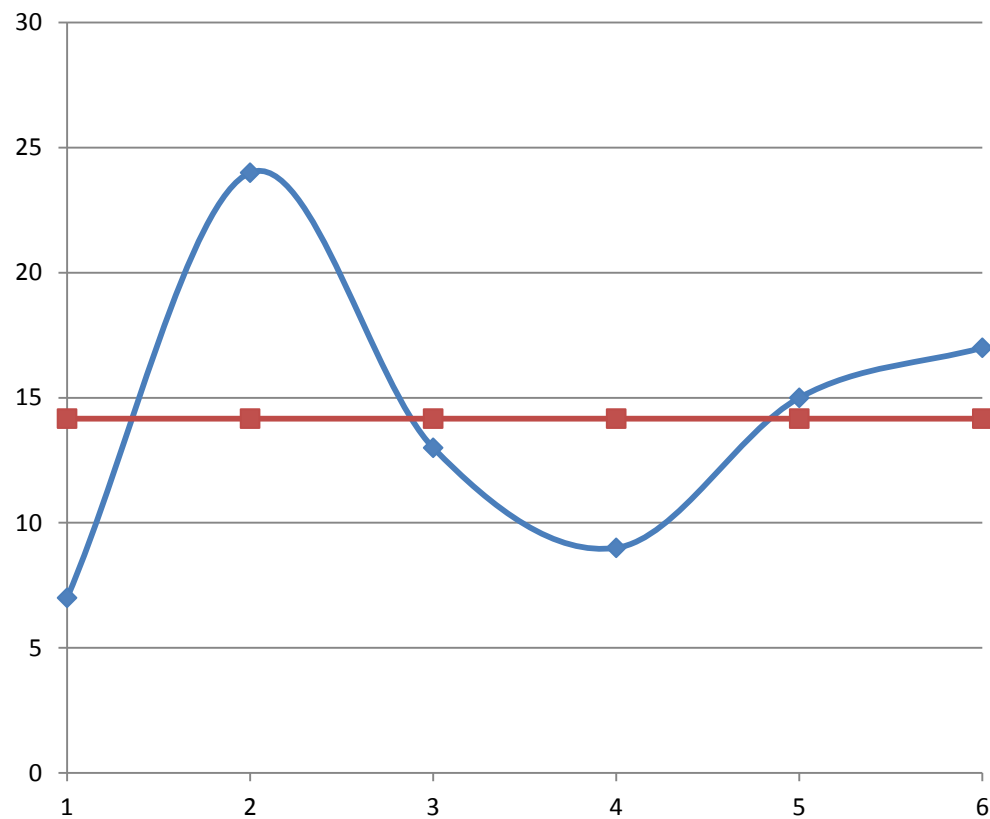
DESCRIZIONE DEL PERCORSO

DIDATTICO

I 17 ragazzi della classe lanciano ognuno un dado per 5 volte, annotando i risultati che successivamente riuniti in una unica tabella. Viene chiesto loro di prevedere la distribuzione dei risultati e successivamente di confrontare tale previsione i risultati reali.

Risultati con 85 lanci complessivi

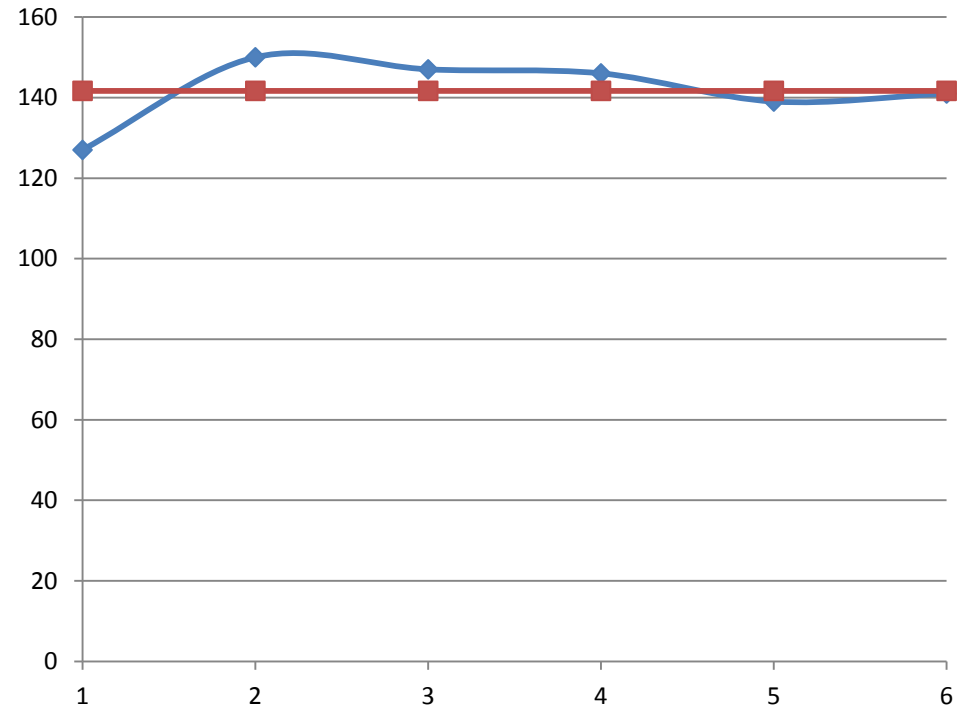
faccia	risultati	teorica	errore %
1	7	14,17	50,59
2	24	14,17	69,41
3	13	14,17	8,24
4	9	14,17	36,47
5	15	14,17	5,88
6	17	14,17	20,00



I ragazzi scoprono che vi è una notevole differenza tra i risultati empirici e le frequenze teoriche. Tutto ciò è fondamentale per il nostro percorso didattico, in quanto fa riflettere lo studente sull'importanza di eseguire un notevole numero di prove per poter ottenere dei risultati “*vicini*” a quelli teorici.

A questo punto si aumenta il numero di lanci a 50 per ogni studente, per un totale di 850.

faccia	risultati	teorica	errore %
1	127	141,67	10,35
2	150	141,67	5,88
3	147	141,67	3,76
4	146	141,67	3,06
5	139	141,67	1,88
6	141	141,67	0,47



Si nota subito come gli errori percentuali si siano notevolmente ridotti rispetto al caso precedente.

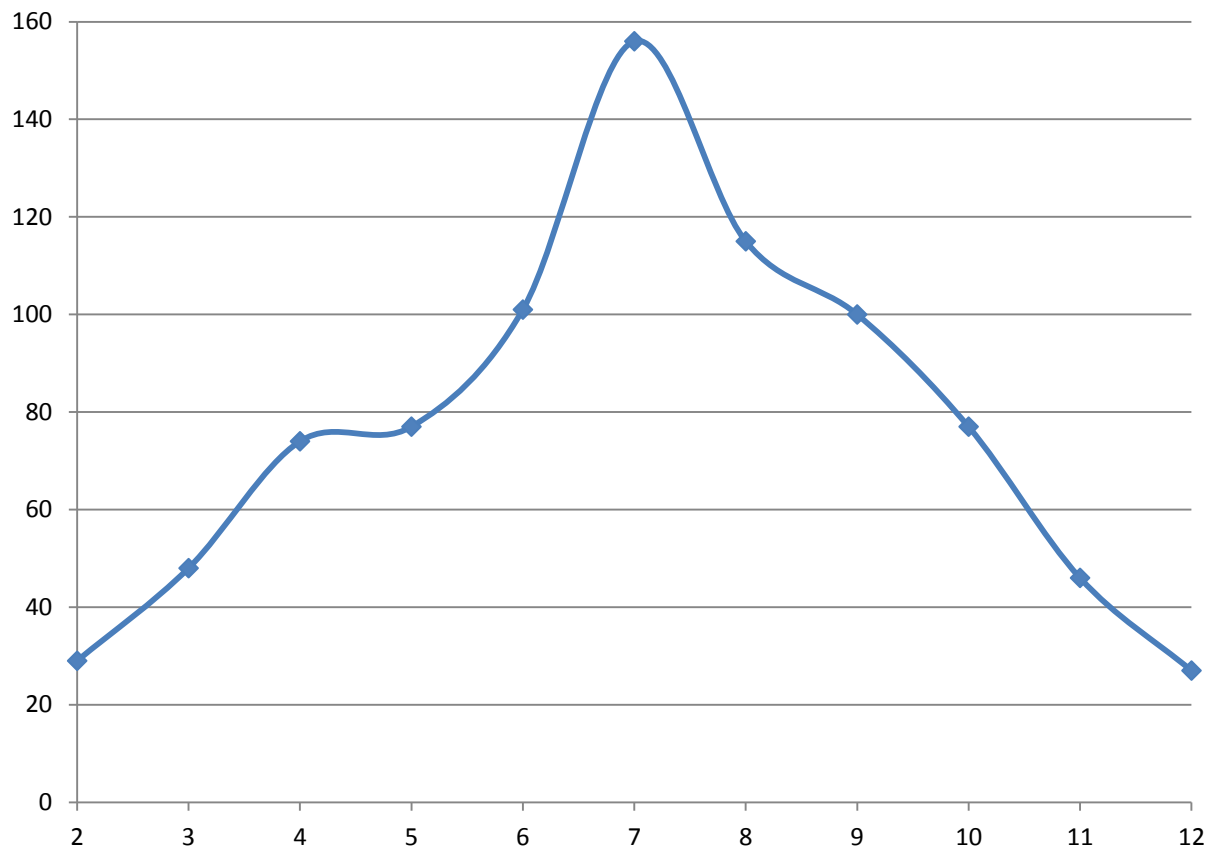
Gli studenti sapevano già che la distribuzione di probabilità è uniforme (ogni faccia ha la stessa probabilità di uscita).

Passando al lancio di due dadi l'intera faccenda si complica...

L'idea di base è quella di far arrivare gli studenti alla distribuzione teorica a partire dai risultati ottenuti lanciando complessivamente 850 volte una coppia di dadi.

RISULTATI DI 850 LANCI DI DUE DADI

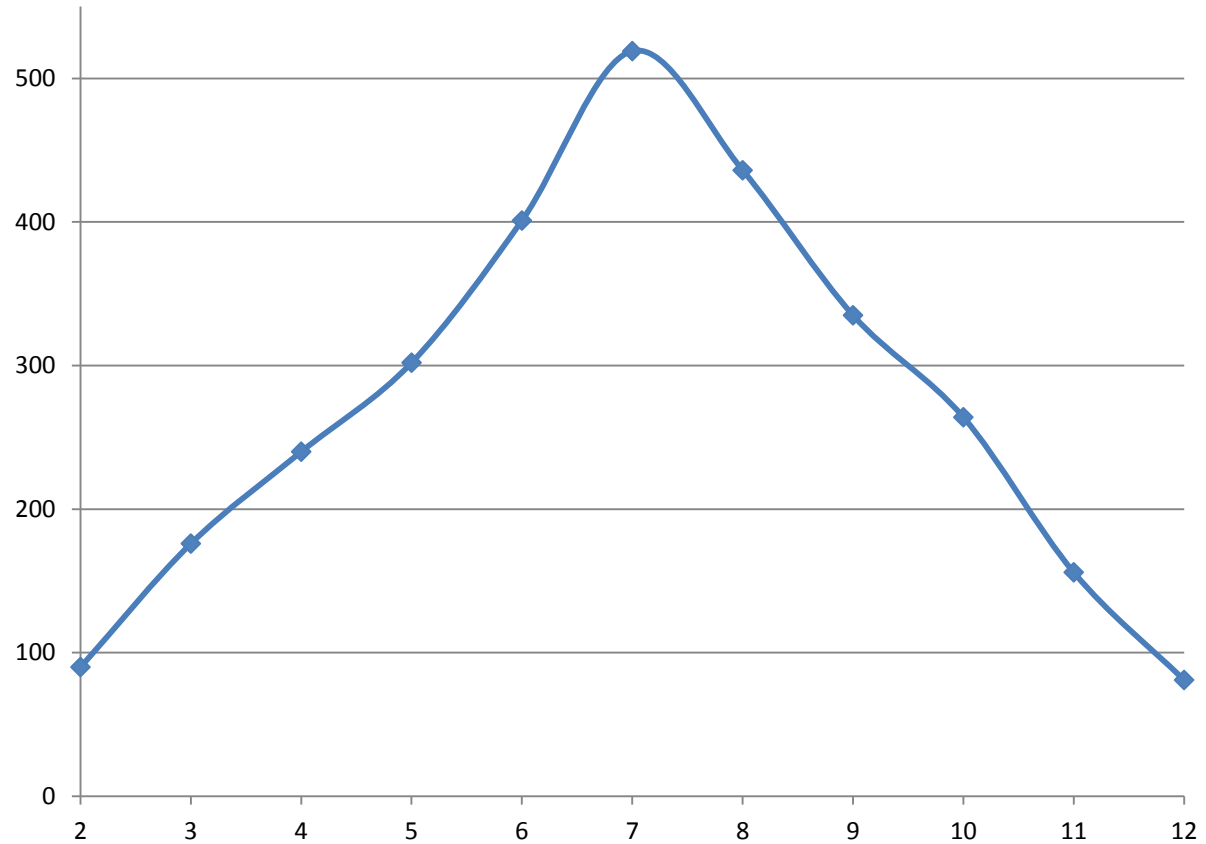
somma	empirica
2	29
3	48
4	74
5	77
6	101
7	156
8	115
9	100
10	77
11	46
12	27



I ragazzi non hanno idea di quale possa essere la distribuzione teorica in quanto, dal grafico dei risultati, non emerge un andamento chiaro e riconoscibile. Si suggerisce allora di aumentare il numero dei lanci, fino a 3000.

RISULTATI DI 3000 LANCI DI DUE DADI

somma	empirica
2	90
3	176
4	240
5	302
6	401
7	519
8	436
9	335
10	264
11	156
12	81



In questo caso l'andamento del grafico suggerisce, per le somme fino a 7, una linearità crescente della probabilità; per quanto riguarda invece le somme maggiori di 7 si ha una linearità decrescente.

$$2 \rightarrow \frac{90}{3000} \rightarrow 3\%$$

$$12 \rightarrow \frac{81}{3000} \rightarrow 2,7\%$$

$$3 \rightarrow \frac{176}{3000} \rightarrow 5,9\%$$

$$11 \rightarrow \frac{156}{3000} \rightarrow 5,2\%$$

$$4 \rightarrow \frac{240}{3000} \rightarrow 8\%$$

$$10 \rightarrow \frac{264}{3000} \rightarrow 8,8\%$$

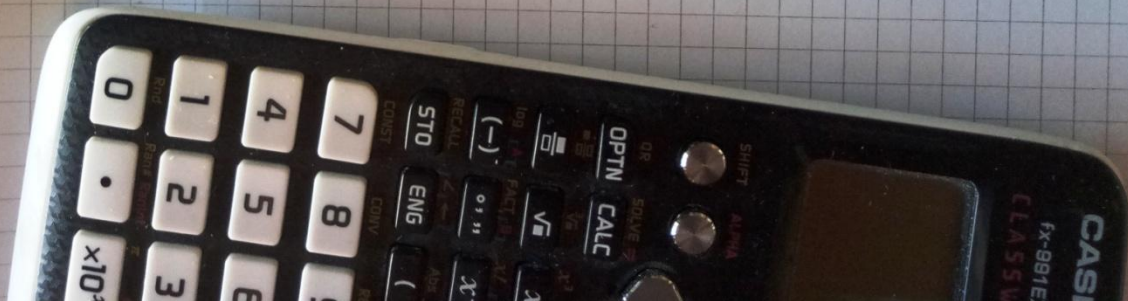
$$5 \rightarrow \frac{302}{3000} \rightarrow 10,1\%$$

$$9 \rightarrow \frac{335}{3000} \rightarrow 11,2\%$$

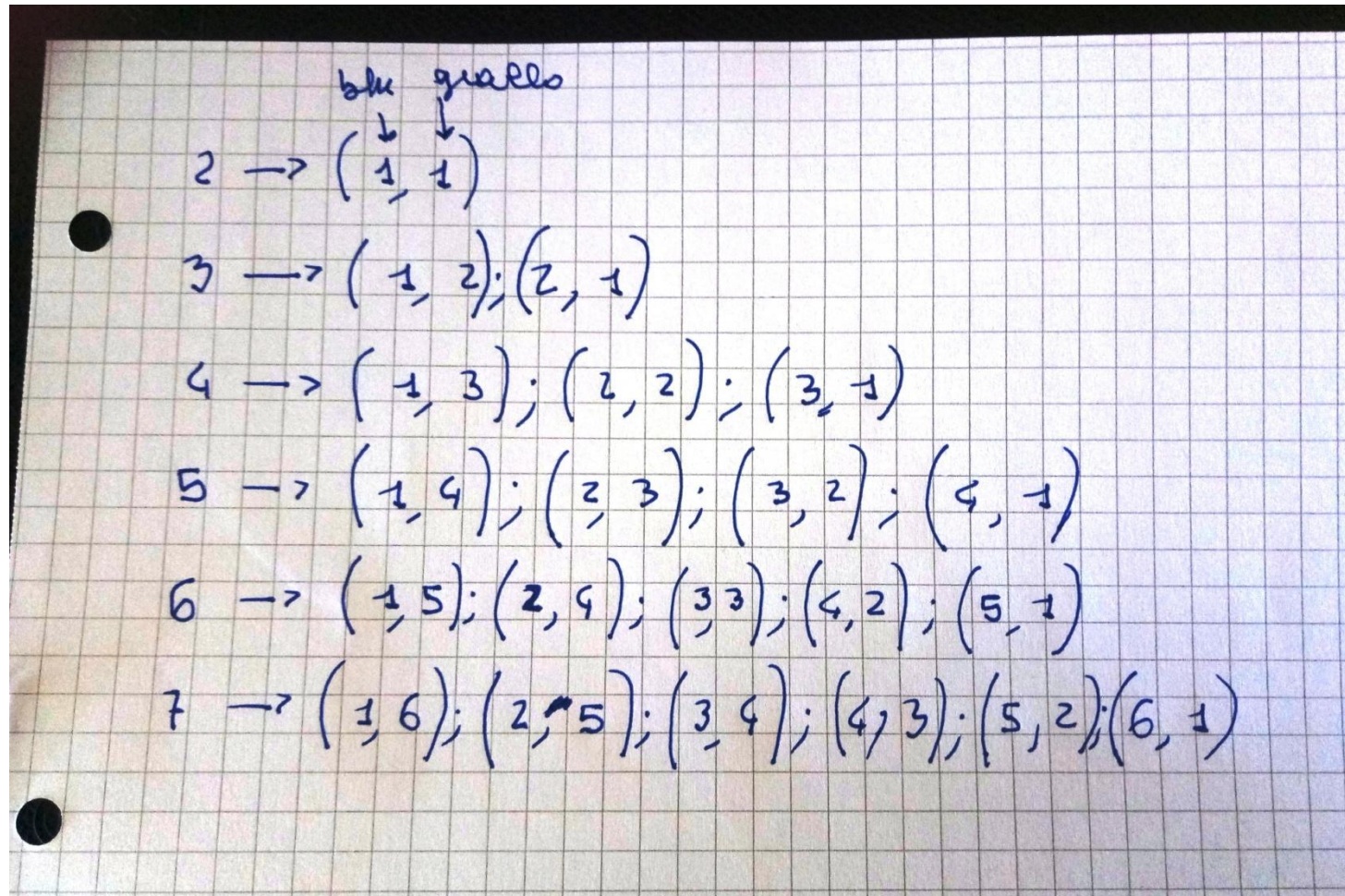
$$6 \rightarrow \frac{401}{3000} \rightarrow 13,4\%$$

$$8 \rightarrow \frac{436}{3000} \rightarrow 14,5\%$$

$$7 \rightarrow \frac{519}{3000} \rightarrow 17,3\%$$



Un primo tentativo per calcolare la probabilità: gli studenti si cimentano nell'elenco di tutti i possibili casi che si possono presentare.



Mediante una tabella a doppia entrata possiamo calcolare agevolmente tutte le probabilità nel caso del lancio di due dadi.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

BCU



+

GIALLO



	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$P(\text{opp. 7}) = \frac{6}{36}$$

$$= \frac{1}{6}$$

0,16

(16,7%)

Per calcolare, ad esempio, la probabilità di ottenere 9, è sufficiente contare il numero di volte in cui compare il “9” nella suddetta tabella e dividere per tutti i casi possibili, ossia per 36.

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

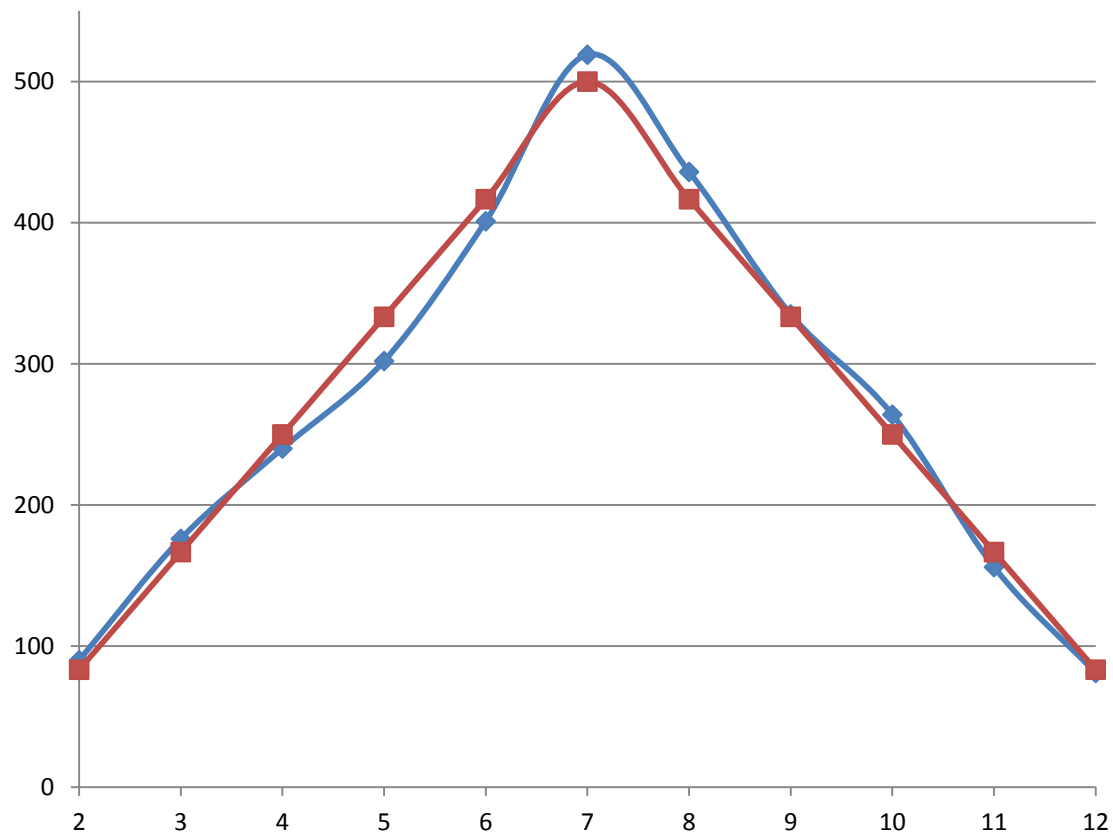
$$P(X = 9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

In definitiva le singole probabilità sono le seguenti:

somma	probabilità
2	1/36
3	2/36
4	3/36
5	4/36
6	5/36
7	6/36
8	5/36
9	4/36
10	3/36
11	2/36
12	1/36

Si fa osservare ai ragazzi come le probabilità siano crescenti o decrescenti “con regolarità”: i numeratori aumentano di 1 fino a 7 e poi diminuiscono di 1 fino a 12.

somma	empirica	teorica	errore %
2	90	83,3	8,00
3	176	167	5,60
4	240	250	4,00
5	302	333	9,40
6	401	417	3,76
7	519	500	3,80
8	436	417	4,64
9	335	333	0,50
10	264	250	5,60
11	156	167	6,40
12	81	83,3	2,80

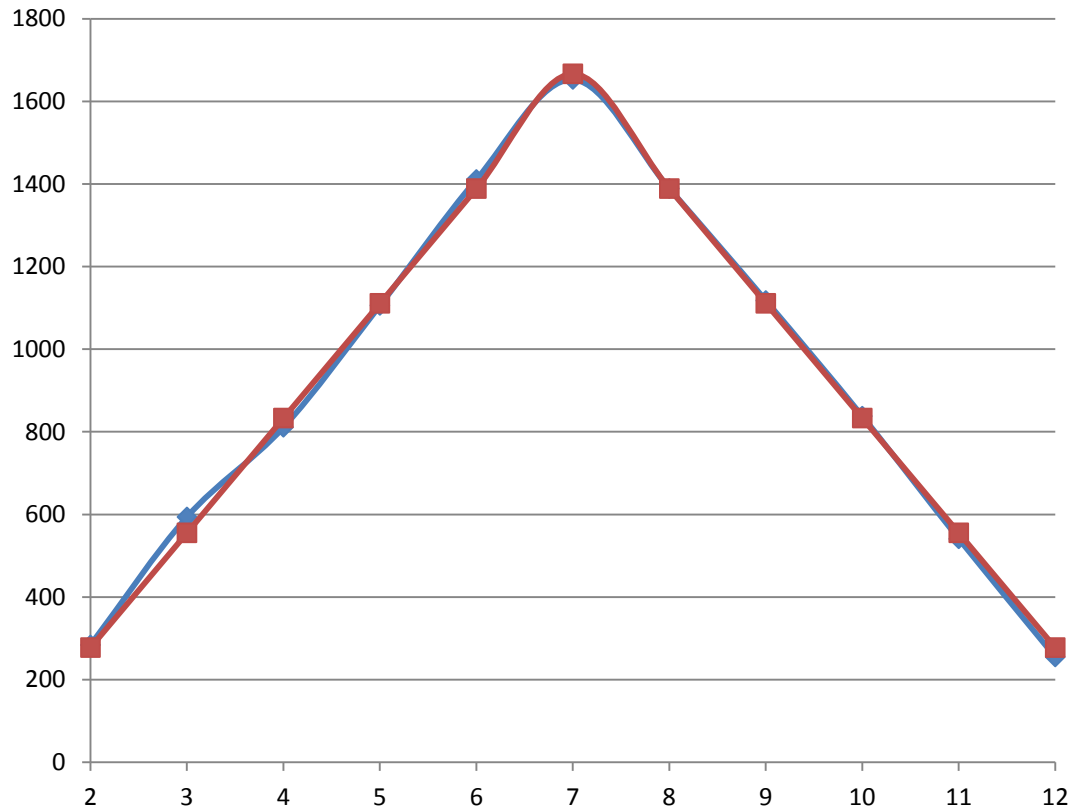


Analizzando ancora i 3000 lanci, si evidenzia il fatto che i due grafici sono molto simili. Continuando ad aumentare il numero dei lanci i due grafici tendono a sovrapporsi sempre più: è questo lo “spirito” della legge dei grandi numeri. Lo studente però deve tenere presente che la “bontà” dei risultati ottenuti va “testata” non sul numero assoluto dei risultati, ma sull’errore percentuale tra i valori ottenuti e quelli teorici.

RISULTATI DI 10000 LANCI DI DUE DADI

Con l'ausilio del foglio elettronico possiamo spingerci a 10000 lanci, ottenendo questi risultati:

	empirica	teorica	errore %
2	284	278	2,24
3	594	556	6,92
4	811	833	2,68
5	1106	1111	0,46
6	1411	1389	1,59
7	1653	1667	0,82
8	1389	1389	0,01
9	1118	1111	0,62
10	838	833	0,56
11	541	556	2,62
12	255	278	8,20



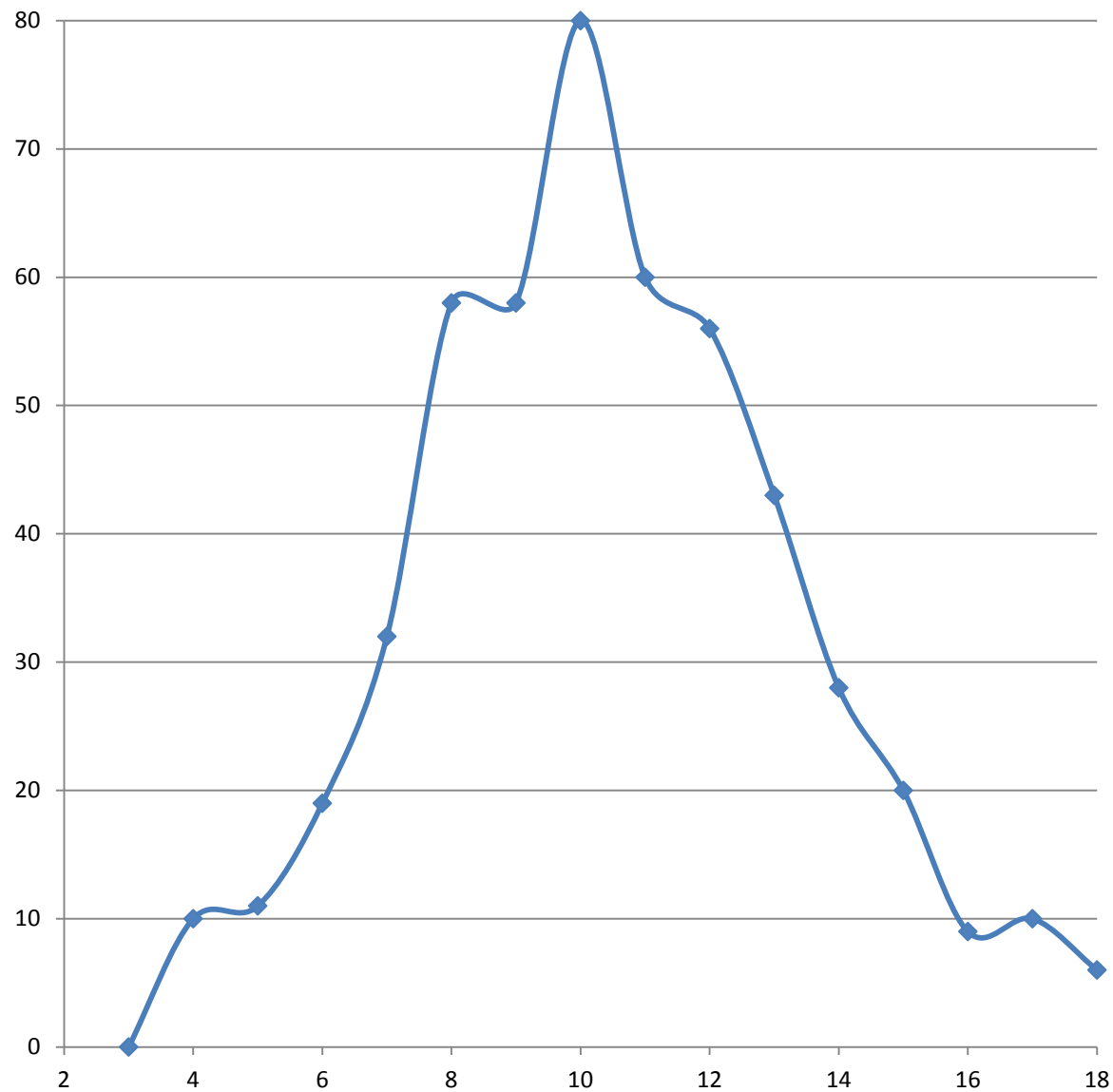
I due grafici sono quasi indistinguibili (e ciò è confermato anche dagli errori percentuali che si sono ulteriormente abbassati rispetto al caso precedente).

LANCIO DI TRE DADI

Il passo successivo consiste nello studio del calcolo delle probabilità associato al lancio di tre dadi.

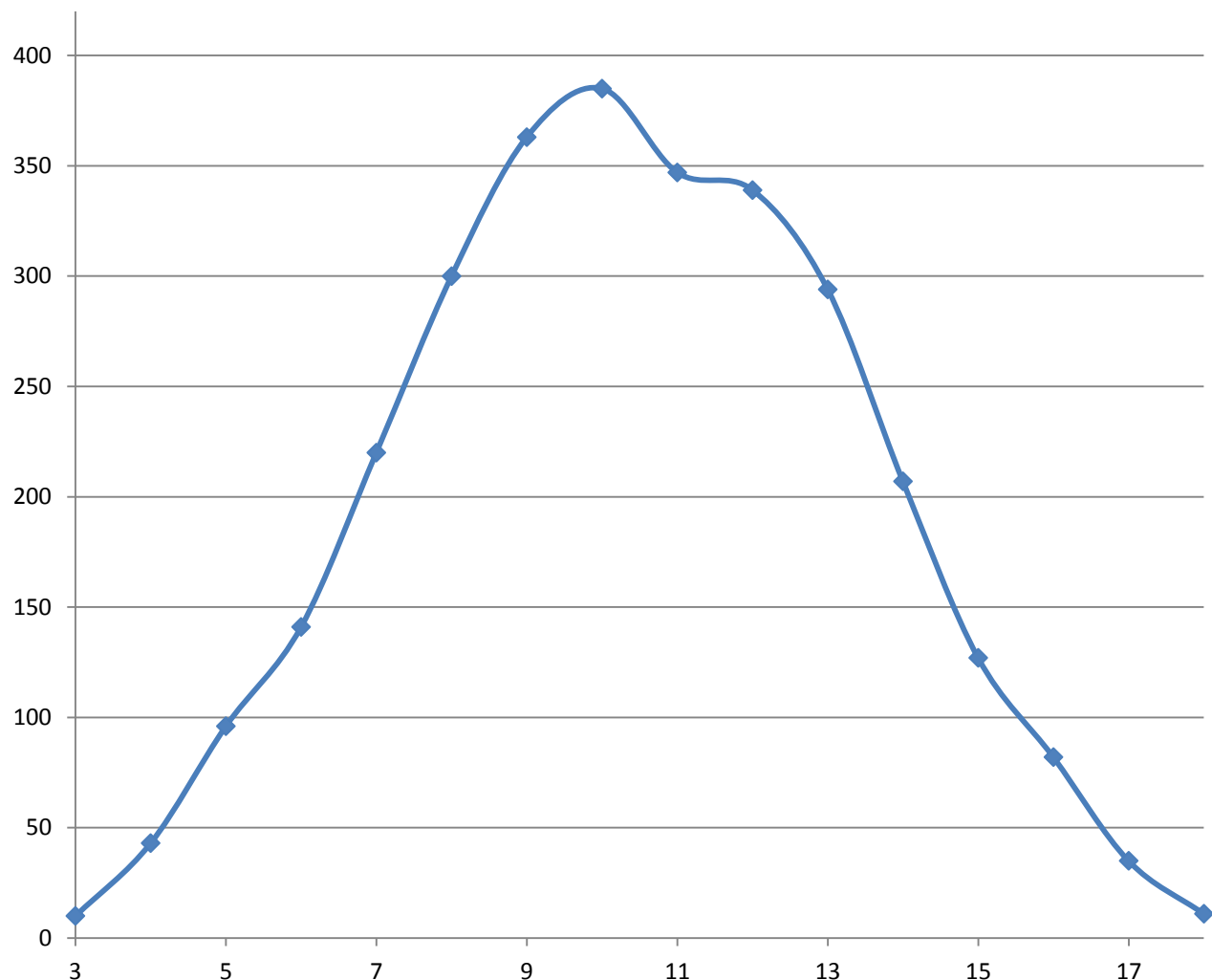
Gli studenti effettuano un totale di 500 lanci ed ottengono i seguenti risultati:

somma	empirica
3	0
4	10
5	11
6	19
7	32
8	58
9	58
10	80
11	60
12	56
13	43
14	28
15	20
16	9
17	10
18	6



I risultati non aiutano certamente ad intravedere la distribuzione teorica.
Con 3000 lanci si ottiene una distribuzione empirica più “ordinata”.

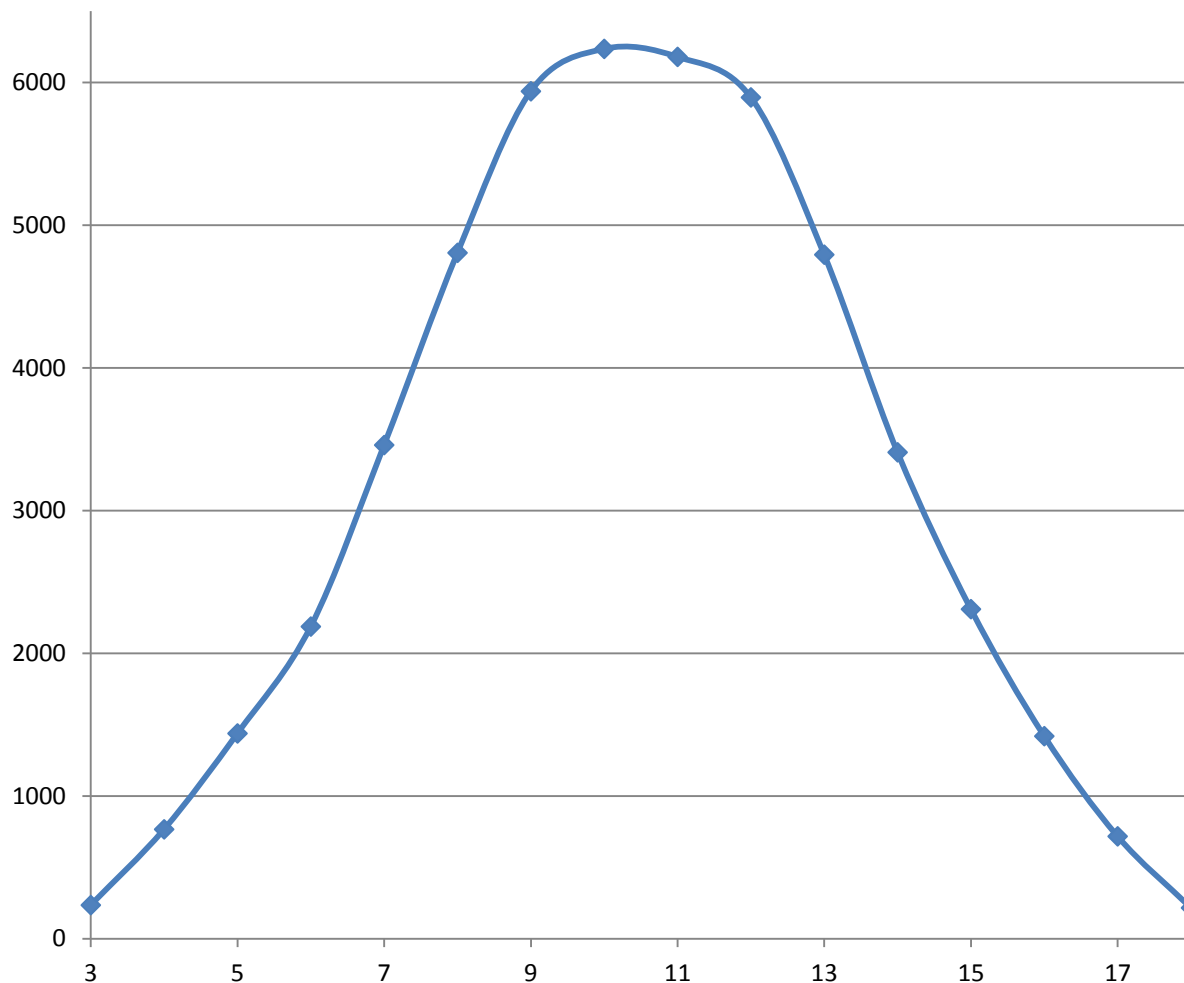
somma	empirica
3	10
4	43
5	96
6	141
7	220
8	300
9	363
10	385
11	347
12	339
13	294
14	207
15	127
16	82
17	35
18	11



50000 LANCI DI TRE DADI

Con l'ausilio del foglio elettronico possiamo agevolmente arrivare a 50000 lanci.

somma	empirica	percentuale
3	235	0,47
4	766	1,53
5	1438	2,88
6	2187	4,37
7	3459	6,92
8	4806	9,61
9	5938	11,88
10	6235	12,47
11	6179	12,36
12	5895	11,79
13	4793	9,59
14	3408	6,82
15	2309	4,62
16	1419	2,84
17	717	1,43
18	216	0,43



A questo punto si chiede agli studenti di “indovinare” la distribuzione teorica. Questa è decisamente la parte più difficile; per prima cosa si fa osservare che la crescita/decrecita non è più lineare, come visto in precedenza nel caso dei 2 dadi. Siamo di fronte a una legge più complessa. Possiamo affrontare il problema elencando tutti i casi possibili.

- 3 -> (1,1,1)
 4 -> (1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)
 5 -> (1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)
 6 -> (1,1,4), (1,4,1), (4,1,1), (2,2,2), (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1)
 ecc ...

3	4	5	6	7	8	9	10
1/216	3/216	6/216	10/216	15/216	21/216	25/216	27/216

11	12	13	14	15	16	17	18
27/216	25/216	21/216	15/216	10/216	6/216	3/216	1/216

$$3 \rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$$

$$4 \rightarrow (2, 1, 1) (1, 2, 1) (1, 1, 2) \rightarrow \frac{3}{216}$$

$$5 \rightarrow (3, 1, 1) (1, 3, 1) (1, 1, 3) (2, 2, 1) (2, 1, 2) (1, 2, 2) \rightarrow \frac{6}{216}$$

$$6 \rightarrow (2, 2, 2) (1, 2, 3) (3, 2, 1) (1, 3, 2) (2, 3, 1) (3, 1, 2) (2, 1, 3) (1, 1, 4) + 2$$

$$7 \rightarrow$$

$$8 \rightarrow$$

$$9 \rightarrow$$

$$10 \rightarrow$$

3 DADI

$$6^3 = 216$$

$$3 \rightarrow \binom{R}{1}, \binom{V}{1}, \binom{B}{1} \rightarrow \frac{1}{216}$$

$$4 \rightarrow (2, 1, 1), (1, 2, 1), (1, 1, 2) \rightarrow \frac{3}{216}$$

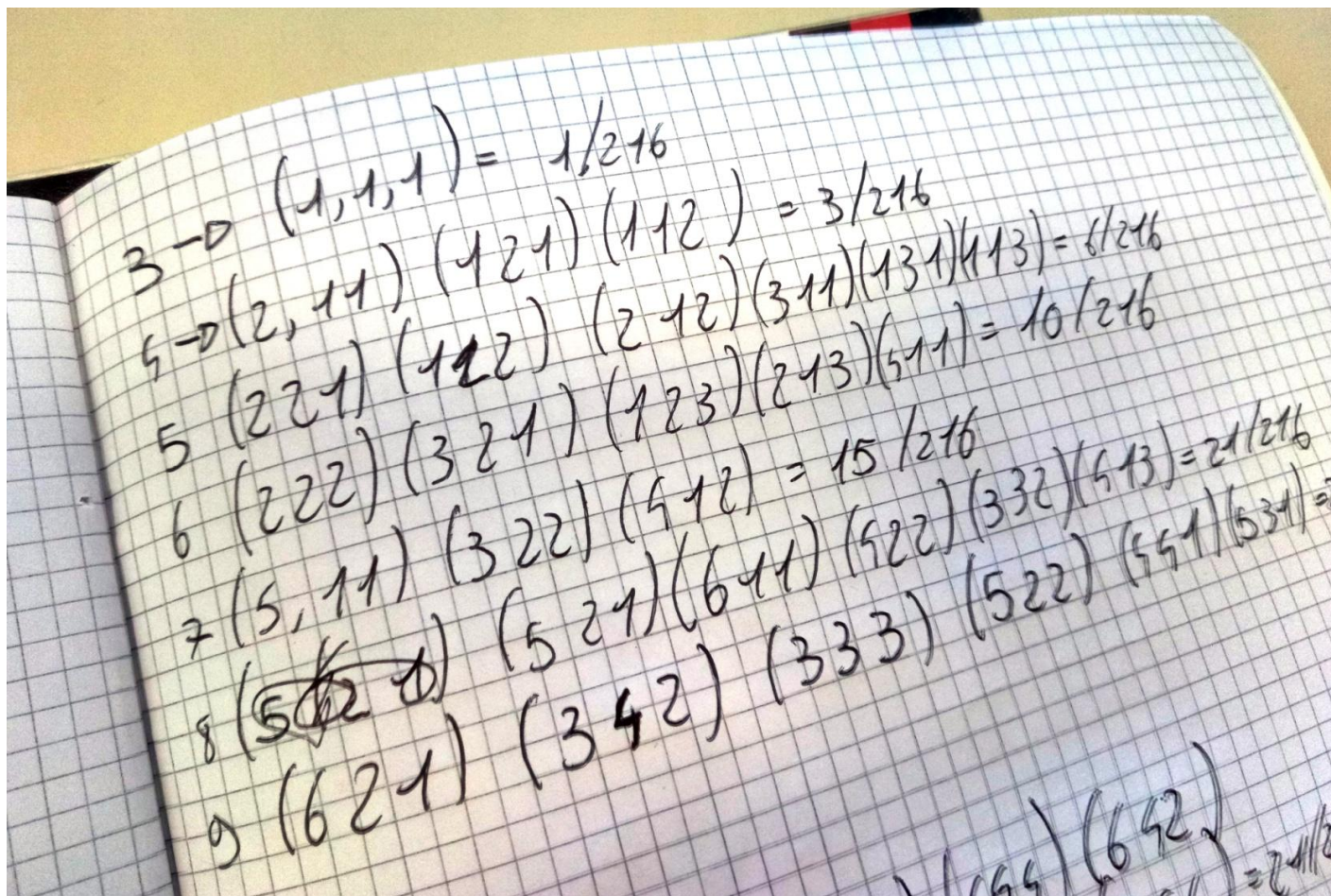
$$5 \rightarrow (2, 2, 1), (2, 1, 2), (1, 2, 2), (3, 1, 1), (1, 3, 1), (1, 1, 3) \rightarrow \frac{6}{216}$$

$$6 \rightarrow (1, 1, 4), (1, 4, 1), (4, 1, 1), (2, 2, 3), (2, 3, 2), (3, 2, 1), (3, 2, 2)$$

$$7 \rightarrow (1, 1, 5), (1, 5, 1), (5, 1, 1), (1, 2, 4), (1, 4, 2), (4, 1, 2), (4, 2, 1), (2, 1, 4)$$

$$8 \rightarrow (1, 1, 6), (1, 6, 1), (6, 1, 1), (1, 2, 5), (1, 5, 2), (2, 1, 5), (2, 5, 1), (5, 2, 1), (5, 2, 2)$$

Si fa osservare agli studenti che quando si hanno dei risultati del tipo (A,A,B) si hanno altri 2 risultati connessi (per un totale di $\text{comb}(3,2)=3$ casi), mentre quando si hanno risultati della forma (A,B,C) si hanno altri 5 risultati connessi (per un totale di $3! = 6$ casi)



VERIFICA DEGLI APPRENDIMENTI

Nella verifica scritta relativa al calcolo delle probabilità ho inserito un esercizio, suddiviso in 3 richieste.

Nella prima richiesta si è voluto testare la capacità dello studente di orientarsi all'interno dell'unità di apprendimento.

Nella seconda si è cercato di andare oltre, indagando sulle abilità riguardanti la distribuzione binomiale.

Nella terza si è cercato di spingersi ancora più in là, analizzando il processo di apprendimento più in generale: dal quesito sono emerse le difficoltà dei ragazzi in quanto erano richieste delle competenze non banali.

Riportiamo qui l'esercizio che è stato somministrato alla classe.

Si effettuano 60 lanci di una coppia di dadi, ciascuno da 6 facce.

1. *Qual è la probabilità di ottenere ``10'' **esattamente** 13 volte?*
2. *Qual è la probabilità di ottenere ``10'' **almeno** 5 volte?*
3. *Qual è la probabilità di ottenere per la **nona** volta ``10'' al **sessantesimo** lancio?*

Per quanto riguarda il primo punto i risultati sono stati più che soddisfacenti, dal momento che 15 studenti su 17 hanno risposto correttamente, fornendo una motivazione adeguata. Si trattava, in questo caso, di misurare sostanzialmente le conoscenze implicite.

I risultati del secondo punto sono stati meno convincenti, dal momento che hanno fornito la risposta giusta 11 studenti. La difficoltà qui è chiaramente maggiore rispetto alla prima richiesta (si indaga infatti sulle abilità relative alla distribuzione binomiale) e gli esiti sono stati essenzialmente in linea con le previsioni.

Solo 3 studenti, invece, sono riusciti a risolvere il terzo punto, fornendo un'adeguata motivazione e seguendo un procedimento coerente. In questa parte di esercizio la difficoltà è ancora maggiore rispetto alle due precedenti, dal momento che si fa leva anche sulle competenze e non solo sulle conoscenze e abilità dei discenti.

VALUTAZIONE DELL'EFFICACIA DEL PERCORSO DIDATTICO SPERIMENTATO IN ORDINE ALLE ASPETTATIVE E ALLE MOTIVAZIONI DEL GRUPPO DI RICERCA LSS.

Con questo percorso si è cercato di fare leva su un approccio empirico al calcolo delle probabilità.

L'esperienza dice che, al crescere del numero delle prove effettuate, tutte nelle stesse condizioni, la frequenza relativa, pur variando, tende a stabilizzarsi attorno ad un valore. Le fluttuazioni, all'inizio molto grandi e poi sempre più rare, si stabilizzano attorno al valore della probabilità dell'evento.

Il percorso ha avuto esito sostanzialmente positivo per la metodologia adottata e gli strumenti utilizzati. L'argomento affrontato ha permesso di interpretare e apprendere il calcolo delle probabilità da una prospettiva diversa da quella tradizionale.