REGIONE TOSCANA

Laboratori del Sapere Scientifico

Iniziativa realizzata con il contributo della Regione Toscana nell'ambito del progetto

Rete Scuole LSS

a.s. 2018/2019

Addizioni e sottrazioni con le frazioni: dai problemi geometrici al m.c.m

Classi II F G H
Scuola secondaria di I grado
B. Sestini - Agliana

Prof. Tiziana Biagiotti – Prof. Luisa Guarnieri - Prof. Paola Palmerini

Collocazione nel curricolo

Le frazioni costituiscono un nucleo fondante del curricolo di matematica nella scuola dell'obbligo, i cui contenuti si distribuiscono verticalmente negli anni della scuola primaria e secondaria di I grado, permettendo di attuare una vera e propria didattica a spirale. Da cinque anni nella scuola secondaria, il nostro percorso didattico sulle frazioni è così suddiviso:

Classe I

- divisione scritta come frazione
- frazione come probabilità
- frazione come percentuale
- trasformazione di numeri decimali in frazioni e viceversa

Classe II

- frazione usata nel quotidiano
- costruzione del concetto di frazione come operatore
- frazioni equivalenti
- frazione come numero
- confronto tra frazioni
- problemi con le frazioni
- operazioni tra frazioni
- m.c.m per addizione e sottrazione tra frazioni

Classe III

- frazione come rapporto

Obiettivi generici di apprendimento

- ✓ Sviluppare capacità di osservazione
- ✓ Argomentare e formulare ipotesi
- ✓ Giustificare in modo adeguato enunciazioni, distinguendo tra affermazioni indotte dall'osservazione, intuite ed ipotizzate, argomentate e dimostrate
- ✓ Riflettere sul procedimento risolutivo e confrontarlo con altre soluzioni possibili
- ✓ Documentare i disegni geometrici e rappresentare figure piane con adeguati strumenti (riga, squadre, compasso, goniometro)

Obiettivi specifici di apprendimento

- ✓ Interpretare un modello geometrico per operare con le frazioni utilizzando le frazioni equivalenti.
- ✓ Descrivere figure identificando elementi significativi e simmetrie.
- ✓ Individuare relazioni significative tra figure geometriche, procedimenti scelti e applicati nella risoluzione dei problemi.
- ✓ Eseguire addizioni e sottrazioni tra frazioni quando possibile a mente senza l'utilizzo di algoritmi.
- ✓ Eseguire addizioni e sottrazioni più complesse tra frazioni, utilizzando un multiplo comune dei denominatori, senza introdurre a priori il m.c.m.
- ✓ Individuare multipli e divisori comuni a più numeri.
- ✓ Scomporre un numero in fattori primi e conoscere l'utilità della scomposizione per diversi fini.
- ✓ Comprendere l'utilità pratica del m.c.m in caso di frazioni con denominatori molto grandi e raramente utilizzati

Metodologie adoperate

Questo percorso è strettamente collegato alla documentazione degli stessi docenti dal titolo « Frazioni: da figure geometriche equivalenti al confronto tra frazioni» ed è la sua naturale continuazione. In particolare, in questo documento presentiamo in modo dettagliato il lavoro svolto per trattare:

- Risoluzioni di problemi geometrici che portano all'introduzione delle operazioni tra frazioni senza l'utilizzo di algoritmi o m.c.m.
- Risoluzione di problemi anche non geometrici con l'utilizzo di un modello geometrico e delle operazioni tra frazioni
- Addizioni e sottrazioni con l'utilizzo di un multiplo comune tra i denominatori e di frazioni equivalenti.
- Utilizzo del m.c.m nel caso di operazioni con denominatori grandi.

Entrambi i percorsi sono caratterizzati da alcune principali caratteristiche:

- costruzione di un modello geometrico per il concetto di frazione come divisione di un intero in parti equivalenti e non semplicemente uguali;
- utilizzo del modello geometrico per la soluzione di problemi e per il progressivo apprendimento della procedura di addizione tra frazioni;
- situazioni problematiche reali o problemi del Rally Matematico Transalpino per consolidare concetti già affrontati o per introdurne di nuovi;
- scomposizione in fattori primi e m.c.m. non trattato a priori, né in classe prima, né in classe seconda, ma introdotti soltanto al termine della trattazione di tutte le operazioni tra frazioni;
- *Cooperative-learning* come prassi pressoché quotidiana, per promuovere un apprendimento quanto più attivo e individualizzato in ciascun alunno;
- Verifica scritta formativa di gruppo, seguita da una verifica scritta individuale.

Durante tutto il percorso, è stato adoperata una didattica partecipativa a carattere prevalentemente induttivo, in cui si è cercato costantemente di sollecitare l'autonomia degli allievi nella costruzione delle conoscenze e nella ricostruzione delle sintesi cognitive. I ragazzi hanno lavorato in gruppi eterogenei stabiliti dall'insegnanti all'inizio del primo percorso e mantenuti fino alla fine, anche durante le verifiche di gruppo.

Prerequisiti

- ✓ Descrivere figure, identificando elementi significativi e simmetrie in particolare di triangoli e quadrilateri
- ✓ Distinguere le trasformazioni geometriche e le diverse figure a cui possono dare origine
- ✓ Distinguere perimetro e area di una figura
- ✓ Stabilire relazioni di equivalenza tra figure geometriche.
- ✓ Definire, riconoscere e applicare il concetto di frazione come suddivisione di un intero in parti equivalenti e non semplicemente uguali.
- ✓ Saper costruire modelli geometrici per operare con le frazioni.

Fasi del percorso

Il percorso è articolato come segue:

FASE I Tombola delle frazioni

FASE II Risoluzione di problemi del RMT.

FASE III Risoluzione di problemi non geometrici con l'utilizzo di un modello geometrico.

FASE IV Scomposizione in fattori primi

FASE V Ricerca del m.c.m nelle addizioni e sottrazioni con denominatore grande

Materiali

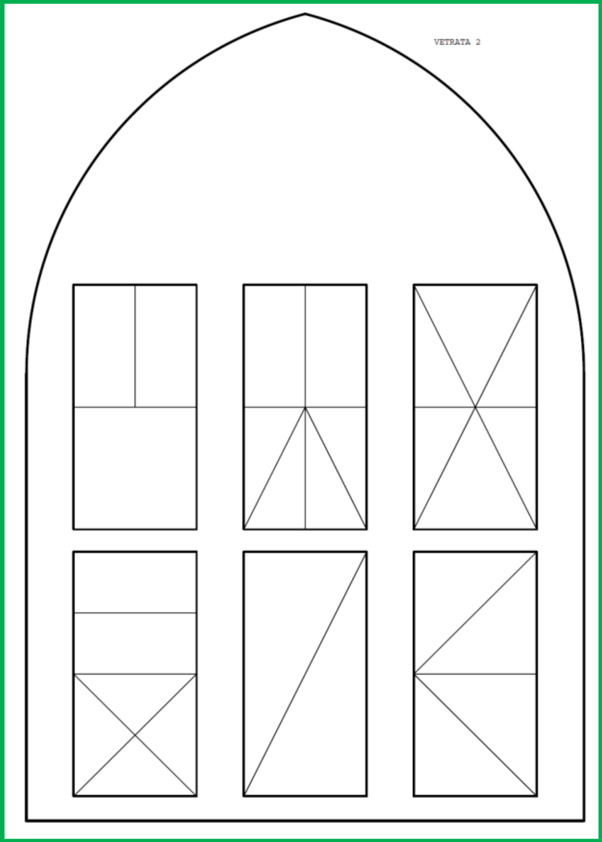
- Strumenti per disegno geometrico: riga, squadra
- Forbici, colla, scotch, cartoncino, matite colorate
- Tombola delle vetrate
- Problemi RMT, Rally Matematico Transalpino

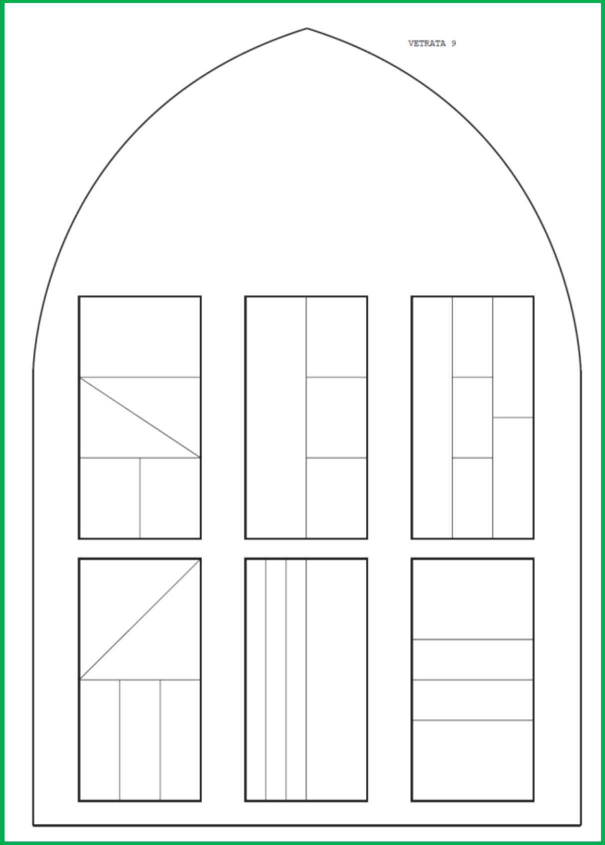
Tempo impiegato indicativamente

- 6 ore di formazione nel gruppo LSS
- 4 ore di studio e sperimentazione tra docenti in piccolo gruppo
- 2 ore per la progettazione specifica e dettagliata delle prove di verifica
- 12 ore circa per lo svolgimento in classe
- 10 ore circa ore per la documentazione

I FASE: LA TOMBOLA DELLE VETRATE

http://specchi.mat.unimi.it , http://www.matematita.it





Dopo aver lavorato con le frazioni equivalenti che rappresentano un punto nodale nella costruzione del concetto di frazione, viene utilizzata la tombola delle vetrate e alcuni problemi del Rally Matematico Transalpino per iniziare ad introdurre le operazioni tra frazioni.

Nella tombola delle frazioni, si gioca con due diverse modalità: a) tombola normale, coprendo ogni parte di vetrata con tessera di valore corrispondente a quella estratta; b) coprire con una sola tessera corrispondente alla somma di più parti coincidente con la tessera estratta.

Può essere svolta in gruppo o da soli e aiuta gli alunni a cambiare registro semiotico, per non associare le frazioni solo al quadrato. Nell’immagine sono riportate le immagini di alcune vetrate.

Vengono introdotte anche frazioni non presenti nell’attività del quadrato, come 1/3 1/6 e 1/9.

I FASE: LA TOMBOLA DELLE VETRATE

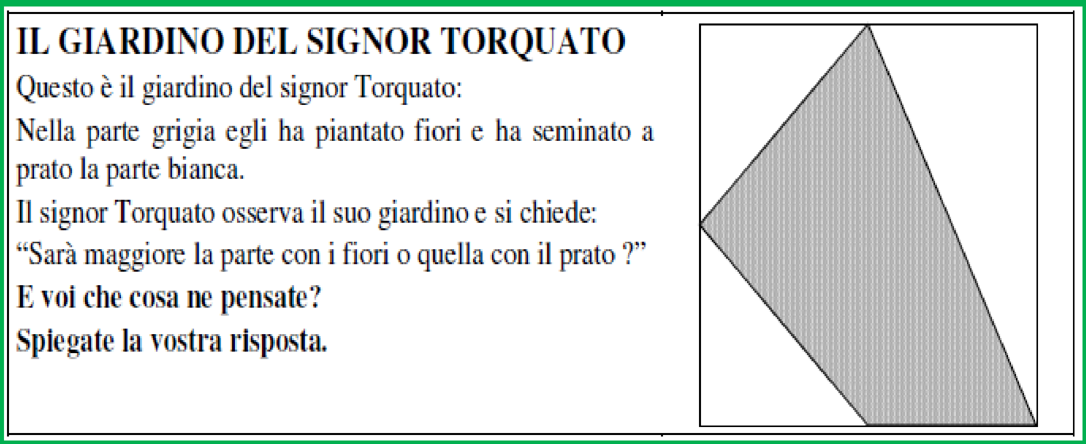
Ad ogni gruppo viene consegnata una scheda che rappresenta una vetrata, come nella diapositiva precedente insieme a tessere di valore diverso.
L'insegnante introduce l'attività come un gioco, usando la prima modalità: cioè estrae da un sacchetto una frazione, come ad esempio $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, e gli alunni, come nel gioco della tombola devono prima ricercare la tessera corrispondente alla frazione e poi ricoprire le porzioni di vetrata corrispondenti esattamente alla tessera in loro possesso; questa prima parte è finalizzata al ripasso di quanto svolto in precedenza e in particolare al riconoscimento di parti corrispondenti ad un determinato valore di frazione. Inoltre permette di lavorare con valori di frazioni non presenti normalmente nell'attività «Piegando il quadrato», come $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{9}$.

Successivamente si passa alla seconda modalità di gioco; gli alunni possono coprire una porzione di vetrata equivalente alla somma di più parti coincidente al valore della frazione estratta. Dopo averli fatti giocare per un po', per fargli acquisire il meccanismo, si richiede la verbalizzazione del procedimento seguito, come mostrato nell'immagine a fianco. In questo modo si inizia ad introdurre intuitivamente la somma tra frazioni.

FASE II: Problemi del RMT e avvio alle operazioni

IL GIARDINO DEL SIGNOR TORQUATO

Si assegna ad ogni gruppo il problema RMT «il giardino del signor Torquato» che apparentemente è un problema di categoria bassa ma che può essere utilizzato per iniziare ad operare con le frazioni. I ragazzi vengono lasciati liberi di risolvere il problema con la strategia che ritengono più opportuna. Durante la discussione finale si confrontano le diverse strategie.



IL GIARDINO DEL SIGNOR TORQUATO

Questo è il giardino del signor Torquato:

Nella parte grigia egli ha piantato fiori e ha seminato a prato la parte bianca.

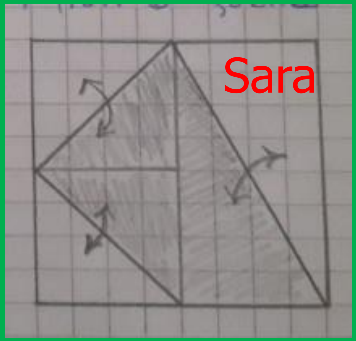
Il signor Torquato osserva il suo giardino e si chiede:

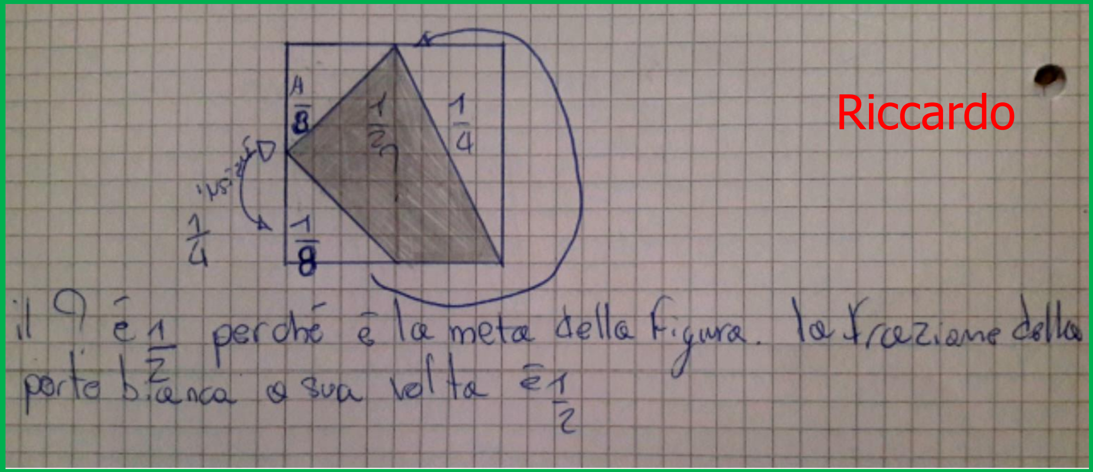
"Sarà maggiore la parte con i fiori o quella con il prato ?"

E voi che cosa ne pensate?

Spiegate la vostra risposta.

In alcuni gruppi si rimane ancora legati allo spostamento dei pezzi mediante isometria come nel gruppo di Sara, che non fa cenno alle frazioni ma, dopo aver adeguatamente diviso la figura mostra parti congruenti per dare la risposta.

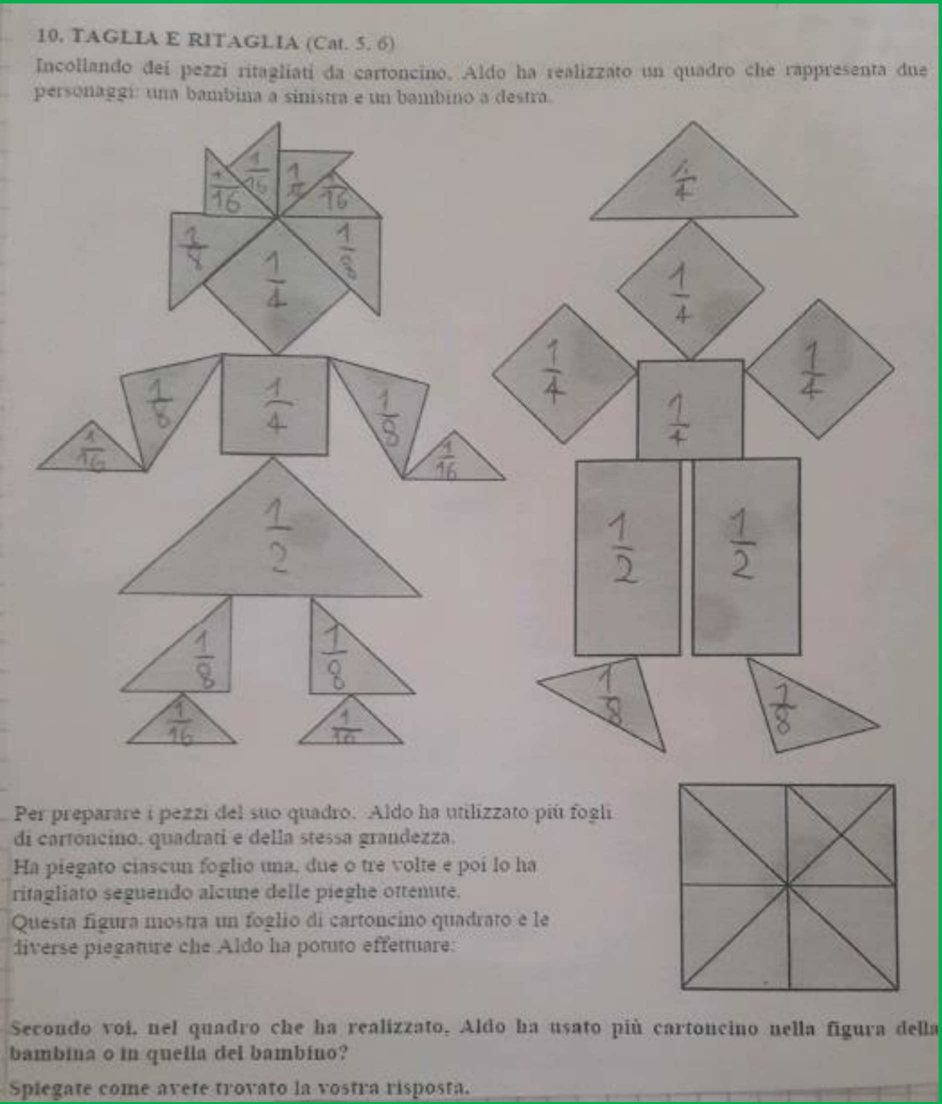




Nel gruppo di Riccardo invece, come vediamo nell'immagine, vengono individuate le frazioni corrispondenti alle porzioni bianche che poi vengono «intuitivamente sommate», senza uso di operatori aritmetici: 1/8 e 1/8 insieme sono ¼, e ¼ e ¼ insieme formano ½; quindi, poiché le due porzioni, quella colorata e quella bianca, insieme formano un intero, la porzione colorata deve essere anch'essa ½.

TAGLIA E RITAGLIA

Si assegna ai gruppi un altro problema del RMT «Taglia e ritaglia». Come prima cosa quasi tutti assegnano ad ogni porzione del disegno una frazione.



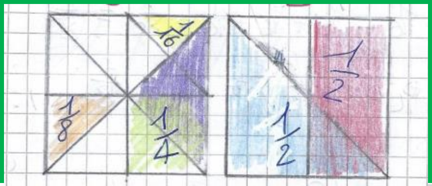
10. TAGLIA E RITAGLIA (Cat. 5, 6)

Incollando dei pezzi ritagliati da cartoncino, Aldo ha realizzato un quadro che rappresenta due personaggi: una bambina a sinistra e un bambino a destra.

Per preparare i pezzi del suo quadro, Aldo ha utilizzato più fogli di cartoncino, quadrati e della stessa grandezza.
Ha piegato ciascun foglio una, due o tre volte e poi lo ha ritagliato seguendo alcune delle pieghe ottenute.
Questa figura mostra un foglio di cartoncino quadrato e le diverse piegature che Aldo ha potuto effettuare:

Secondo voi, nel quadro che ha realizzato, Aldo ha usato più cartoncino nella figura della bambina o in quella del bambino?

Spiegate come avete trovato la vostra risposta.



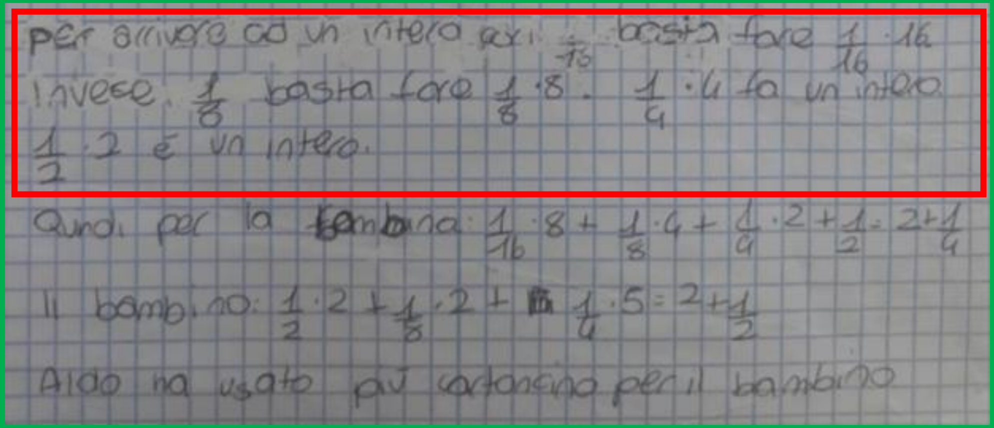
PARTE ROSSA = rappresenta $\frac{1}{2}$ perché è metà del cartoncino quadrato intero.
PARTE CELESTE = rappresenta $\frac{1}{2}$ perché è metà della figura intera
PARTE VERDE = rappresenta $\frac{1}{4}$ perché è una quadrato dei 4 che formano l'intero (il cartoncino).
PARTE ARANCIONE = rappresenta $\frac{1}{8}$ perché è la metà di $\frac{1}{4}$
PARTE GIALLA = rappresenta $\frac{1}{16}$ perché è la metà di $\frac{1}{8}$.
Per capire quanti cartoncini ha usato Aldo basta addizionare le frazioni che ci sono per formare il bambino e quelle per formare la bambina.

Alcuni risolvono in modo «grafico» unendo le diverse parti per ricostruire i cartoncini quadrati da cui Aldo è partito per costruire i due personaggi.

Noi siamo partiti dal fatto che Aldo ha usato un quadrato:
Quindi abbiamo provato a unire tutte le parti per formare il quadrato iniziale.
Risultato: bambina uguale $2\frac{1}{4}$ e bambino $2\frac{1}{2}$
è più grande il bambino.

TAGLIA E RITAGLIA

Romina



per arrivare ad un intero con i $\frac{1}{16}$ basta fare $\frac{1}{16} \cdot 16$ invece $\frac{1}{8}$ basta fare $\frac{1}{8} \cdot 8$. $\frac{1}{4} \cdot 4$ fa un intero $\frac{1}{2} \cdot 2$ è un intero.

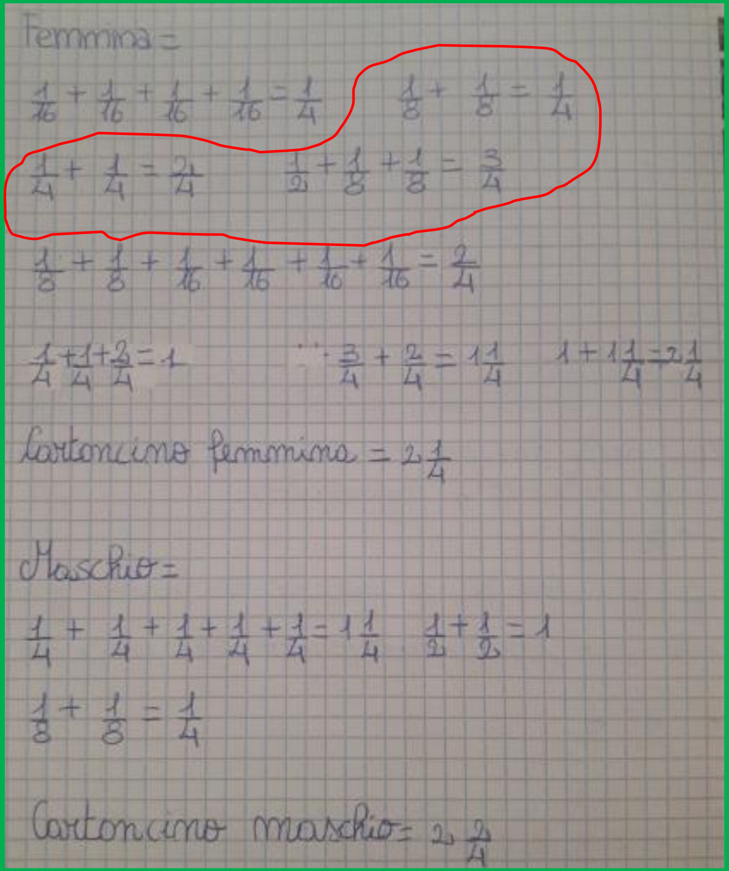
Quindi per la bambina $\frac{1}{16} \cdot 8 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 + \frac{1}{4}$

Il bambino: $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 5 = 2 + \frac{1}{2}$

Aldo ha usato più cartoncino per il bambino

Molti dopo aver trovato le frazioni corrispondenti ad ogni porzione dei bambini, iniziano a sommarle. Nella risoluzione del problema Azzurra con il suo gruppo ha proceduto accorpando le frazioni e utilizzando le frazioni equivalenti.

Azzurra



Femmina =

$\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{2}{4}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = 1$ $\quad \frac{3}{4} + \frac{2}{4} = 1\frac{1}{4}$ $\quad 1 + 1\frac{1}{4} = 2\frac{1}{4}$

Cartoncino femmina $= 2\frac{1}{4}$

Maschio =

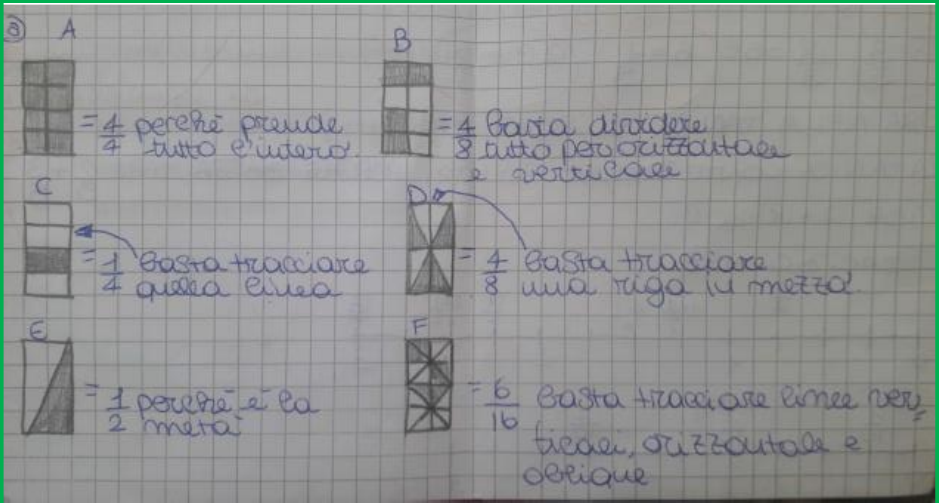
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$

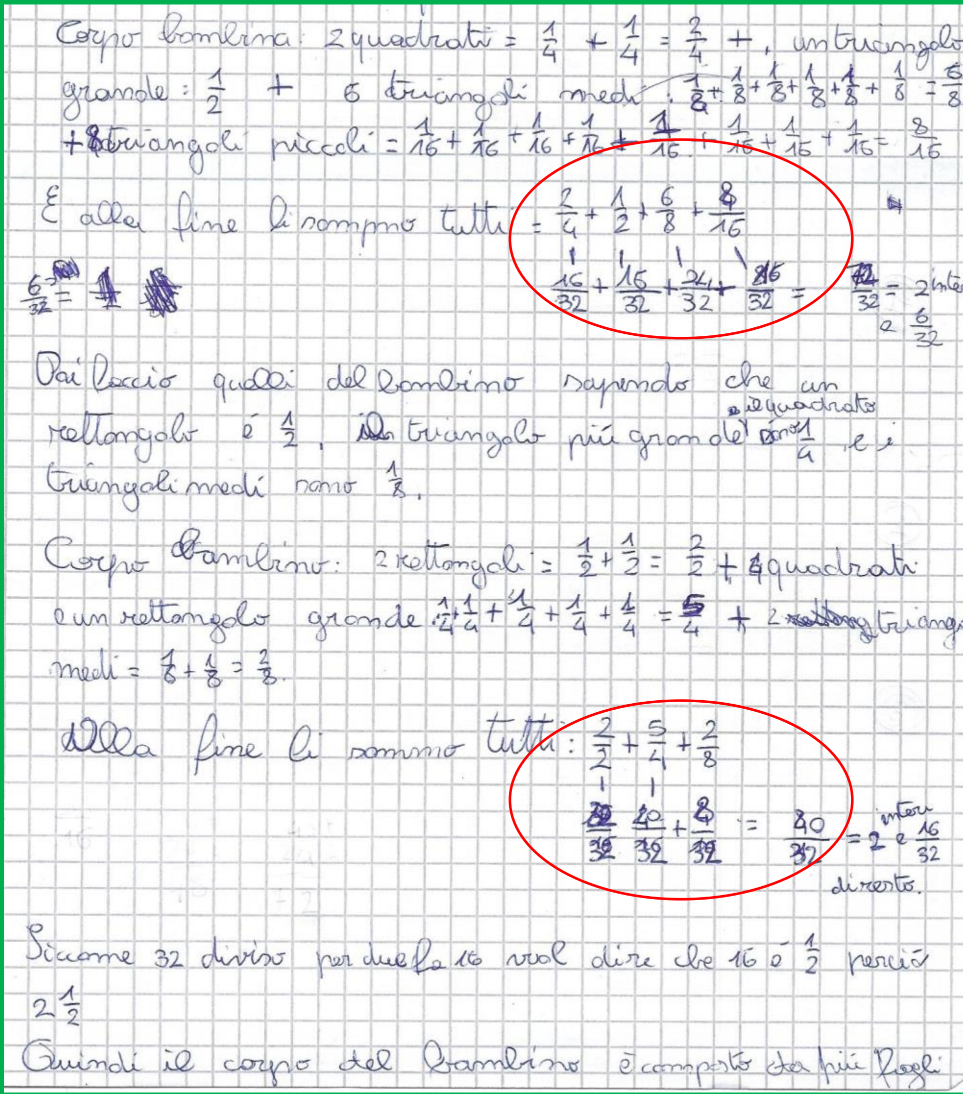
Cartoncino maschio $= 2\frac{2}{4}$

Romina invece, accorpando, inizia a fare delle moltiplicazioni che la portano a ricostruire l'intero. Anche lei non sente l'esigenza di portare tutte le frazioni ad un unico denominatore che sia il più piccolo.

Questo approccio è in contraddizione con il loro modo di procedere negli esercizi in cui sia richiesto di riconoscere la parte di figura colorata: come si vede nell'esercizio dell'immagine sottostante, in questo caso tendono invece a ricercare l'unità frazionaria più piccola.



TAGLIA E RITAGLIA


Corpo bambina: 2 quadrati = $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2}{4}$ + , un triangolo grande: $\frac{1}{2}$ + 6 triangoli medi: $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{6}{8}$ + 8 triangoli piccoli = $\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{8}{16}$

E alla fine li sommo tutti: $\frac{2}{4}+\frac{1}{2}+\frac{6}{8}+\frac{8}{16}$

$\frac{16}{32}+\frac{16}{32}+\frac{24}{32}+\frac{16}{32}=\frac{72}{32}$ = 2 interi e $\frac{6}{32}$

$\frac{6}{32}$ =

Poi lascio quelli del bambino sapendo che un rettangolo è $\frac{1}{2}$, il triangolo più grande e il quadrato sono $\frac{1}{4}$, e i triangoli medi sono $\frac{1}{8}$.

Corpo bambino: 2 rettangoli = $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$ + 4 quadrati e un rettangolo grande $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$ + 2 triangoli medi = $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{2}{8}$.

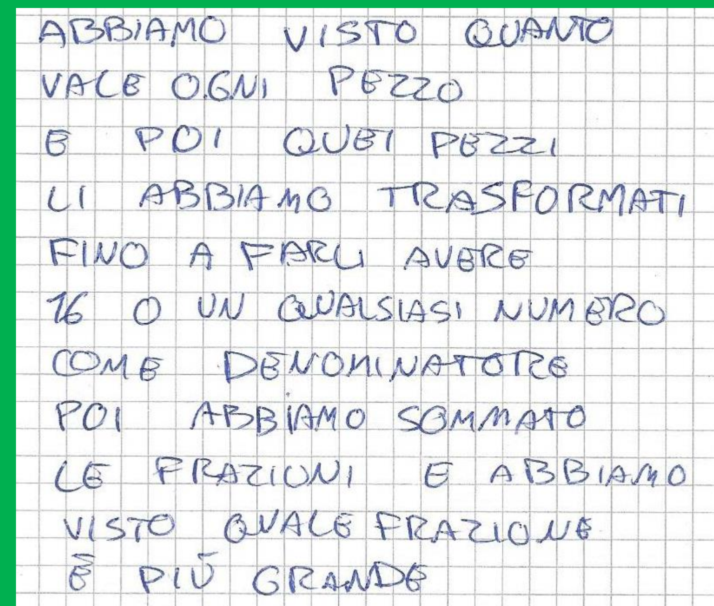
Alla fine li sommo tutti: $\frac{2}{2}+\frac{5}{4}+\frac{2}{8}$

$\frac{32}{32}+\frac{40}{32}+\frac{8}{32}=\frac{80}{32}$ = 2 interi e $\frac{16}{32}$ diventa.

Siccome 32 diviso per due fa 16 vuol dire che 16 è $\frac{1}{2}$ perciò $2\frac{1}{2}$

Quindi il corpo del bambino è composto da più fogli

In alcuni gruppi, come vediamo nelle immagini, invece compare una modalità risolutiva delle addizioni con l’uso di un multiplo comune tra i denominatori, non necessariamente il più piccolo!


ABBIAMO VISTO QUANTO VALE OGNI PEZZO E POI QUEI PEZZI LI ABBIAMO TRASFORMATI FINO A FARLI AVERE 16 O UN QUALSIASI NUMERO COME DENOMINATORE POI ABBIAMO SOMMATO LE FRAZIONI E ABBIAMO VISTO QUALE FRAZIONE È PIÙ GRANDE

Tutte le modalità di risoluzione sono state confrontate tra gli alunni, con la mediazione dell’insegnante, in una discussione di classe.
Questa attività è stata prevalentemente funzionale a raggruppare opportunamente le frazioni anche con denominatore diverso (e quindi sommarle) in modo da raggiungere l’intero, senza quindi l’ausilio di un multiplo comune tra i denominatori, di cui ha sentito l’esigenza soltanto qualche gruppo.

L'AIUOLA DI TULIPANI

Dopo «taglia e ritaglia» si assegna ai gruppi il problema RMT «L'aiuola dei tulipani» con la richiesta di disegnare un modello.

13. L'AIUOLA DI TULIPANI (Cat. 7, 8, 9, 10) ©ARMT 2013 - 21° - I prova

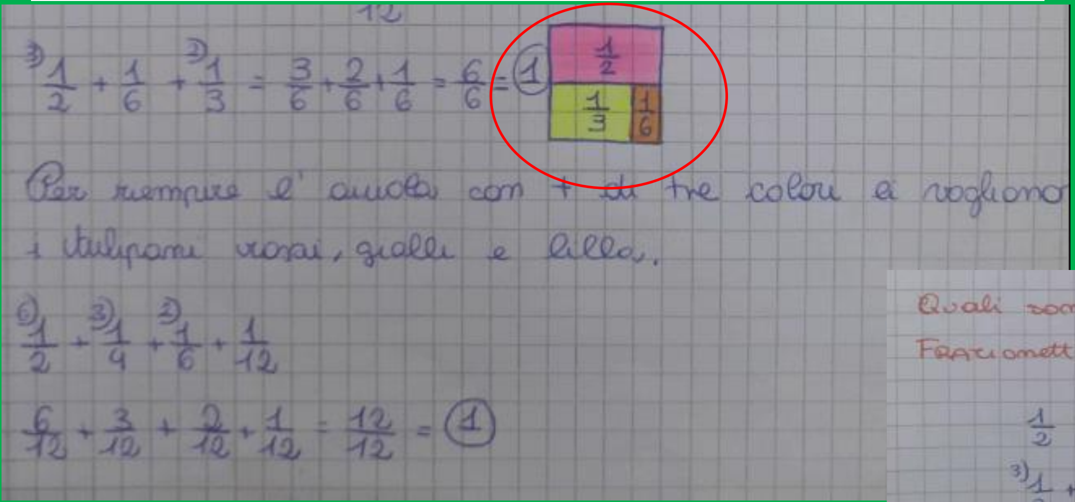
La Signora Frazionetti decide di piantare tulipani di diversi colori in una grande aiuola del suo giardino.
Ha a disposizione tulipani di otto colori diversi: rosso, giallo, arancione, bianco, lilla, viola, rosa, salmone.
Con i tulipani rossi può "riempire" $\frac{1}{2}$ dell'aiuola, con i gialli $\frac{1}{3}$ dell'aiuola, con gli arancioni $\frac{1}{4}$, con i bianchi $\frac{1}{5}$, con i lilla $\frac{1}{6}$, con i viola $\frac{1}{8}$, con i rosa $\frac{1}{9}$, con i salmone $\frac{1}{12}$.
La signora Frazionetti vuole "riempire interamente" la sua aiuola e, per ogni colore scelto, vuole utilizzare tutti i tulipani a disposizione ma, per far questo, deve scegliere i colori in modo opportuno.
Si rende conto di poter scegliere tulipani di tre colori ma, per esempio, di non poter utilizzare contemporaneamente tulipani rossi, gialli e arancioni.

Quali sono i tre colori di tulipani con cui la signora Frazionetti può "riempire" interamente la sua aiuola?

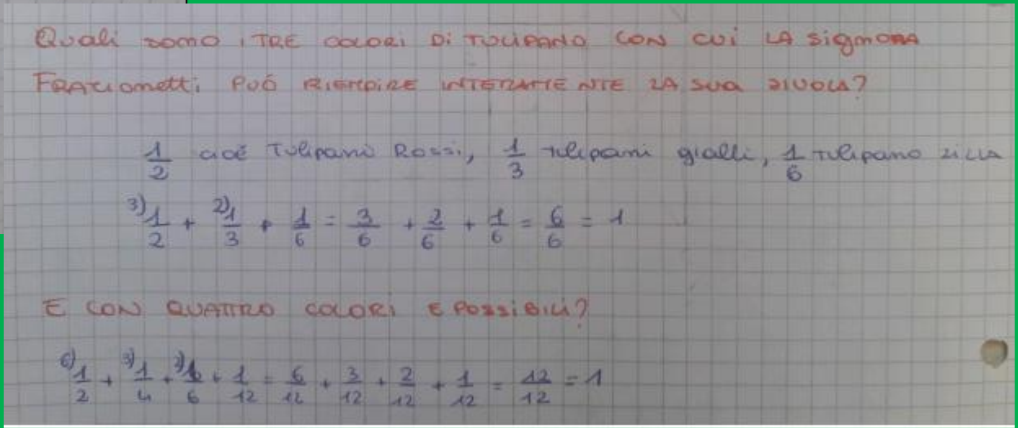
E con quattro colori è possibile riempire l'aiuola? Quali?

Spiegate le vostre risposte.

Come richiesto, ogni gruppo costruisce il modello ma in qualche caso, come evidenziato nell'immagine a sinistra, il modello è errato: disegnano un quadrato invece di un rettangolo di 12 quadretti, in questo modo le due frazioni 1/3 e 1/6 non rappresentano la corrispondente parte di intero; la risoluzione aritmetica è giusta ma, in questo caso, la costruzione del modello è stata superflua in quanto non usata come supporto alla procedura aritmetica



Una maggiore quantità di ragazzi ha in questo caso risolto il problema usando la frazione equivalente e la trasformazione di tutte le frazioni ad un unico denominatore.

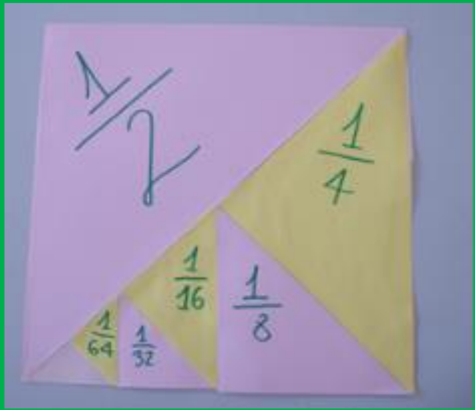


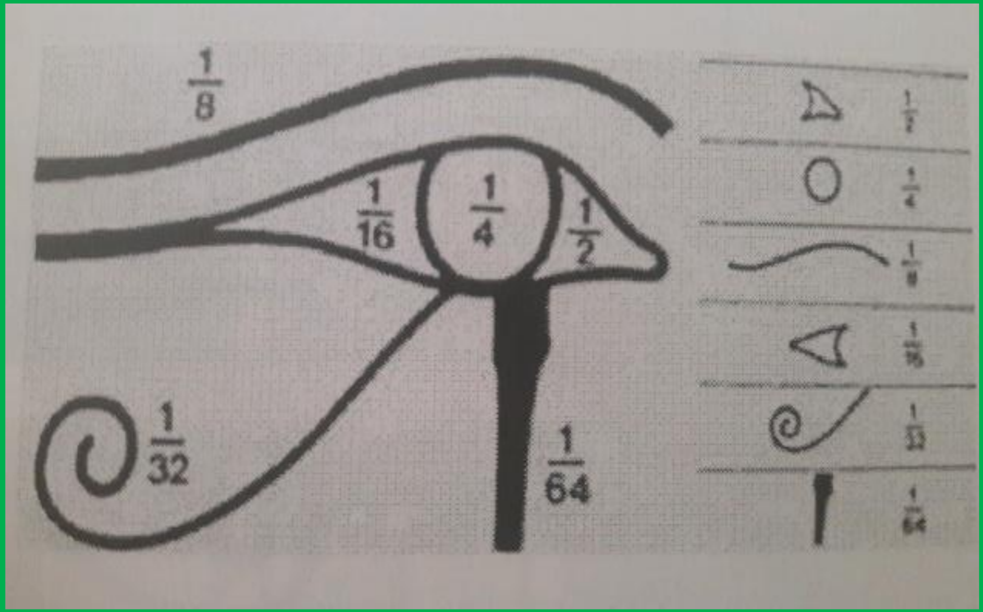
L’OCCHIO DI HORUS

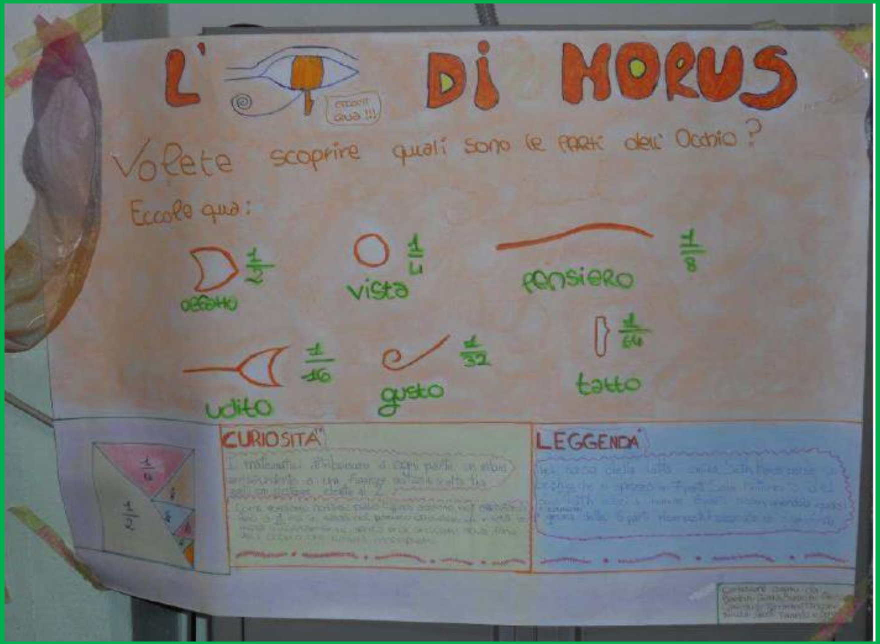
Il mito dell’occhio di Horus è un’antica leggenda egizia di cui abbiamo testimonianza nel Papyrus Rhind e che viene narrata ai ragazzi. Dopo la narrazione della leggenda si invitano gli alunni di ogni gruppo a riportare sulla superficie di un quadrato le frazioni unitarie indicate dall’occhio di Horus; si può procedere in due modi:

1) rappresentare il quadrato sul quaderno e poi dividerlo a metà e poi ancora a metà e così via;

1) procedere allo stesso modo ma utilizzando la piegatura della carta, facendo quindi un ripasso di piegando il quadrato.



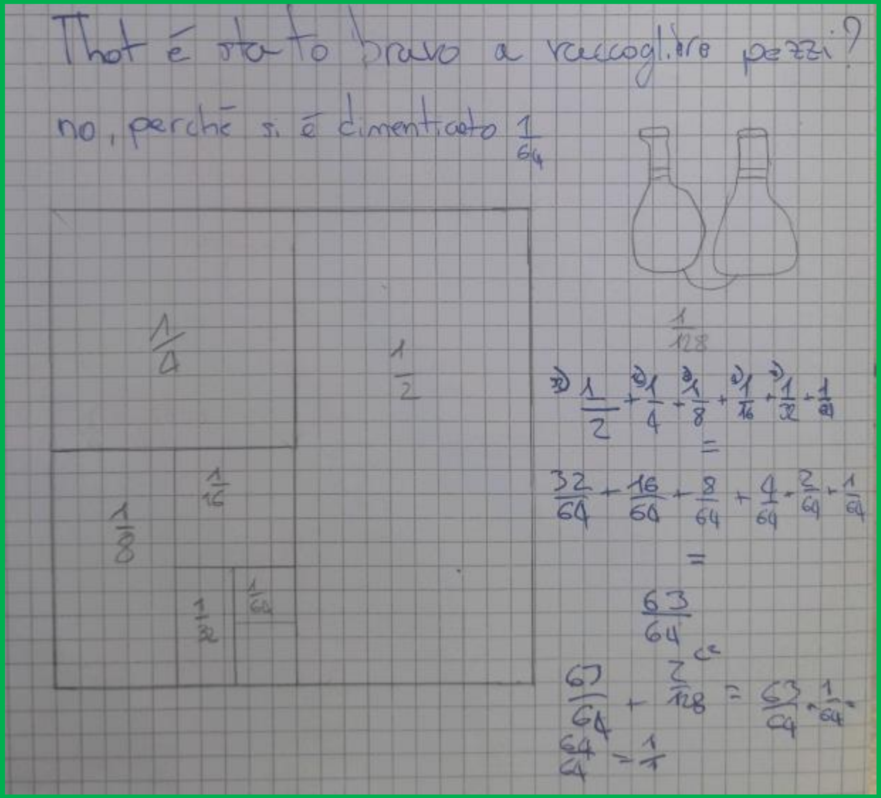


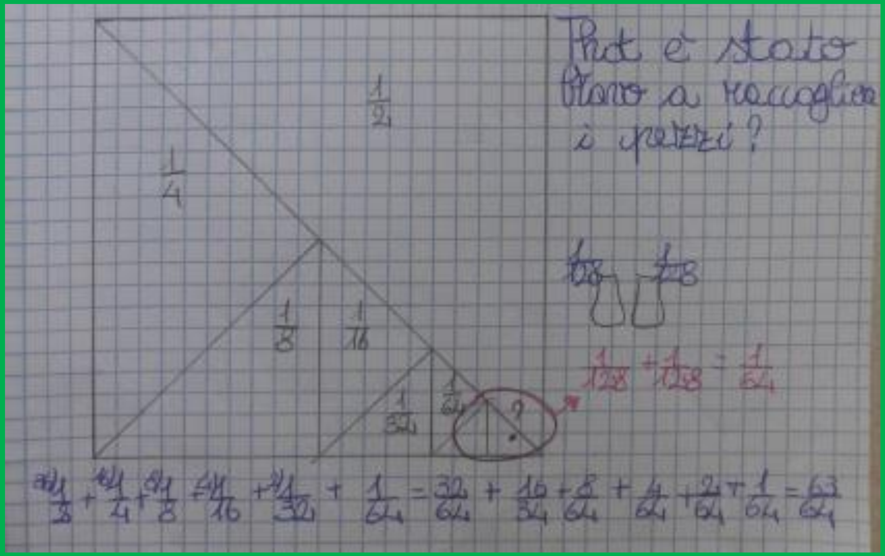


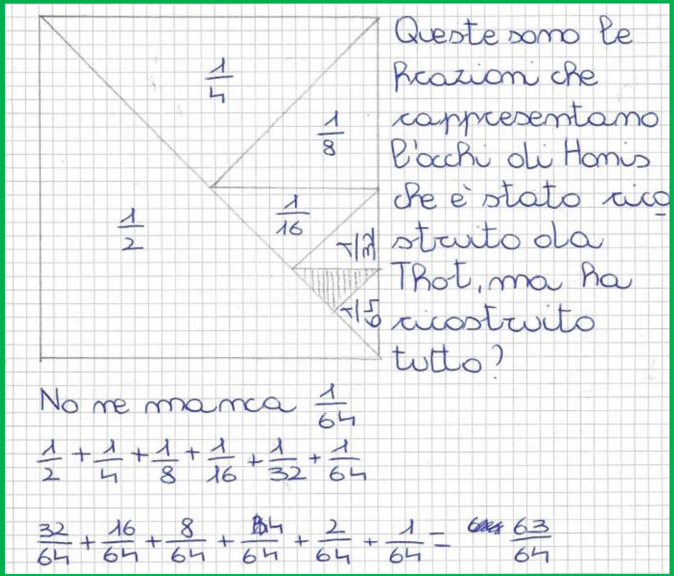
Strumento didattico inserito in documentazione LA MISTERIOSA ARTE DEI NUMERI, INDIRE GOLD 2010/2011

L’OCCHIO DI HORUS

Si chiede a questo punto se mettendo insieme tutti pezzi raccolti da Thot si ricostruisce tutto l’occhio.







I ragazzi sommano tutte le frazioni corrispondenti ai pezzi dell’occhio di Horus ed ottengono 63/64. Comprendono che per arrivare all’intero manca 1/64. Molti risolvono il problema, questa volta, portando tutte le frazioni ad uno stesso denominatore e trovando le frazioni equivalenti.

L'OCCHIO DI HORUS

Si continua a lavorare sull'occhio di Horus chiedendo ai ragazzi di osservare le relazioni tra le diverse parti dell'occhio; risulta chiaro che ogni parte è la metà della precedente

La metà = $\frac{1}{2}$

La metà della metà = $\frac{1}{4}$

La metà della metà della metà = $\frac{1}{8}$

La metà della metà della metà della metà = $\frac{1}{16}$ Perchè è $\frac{1}{6}$? PERCHÈ OGNI VOLTA CHE DIVIDO A/ MOLTIPLICO ×2 IL DENOMINATORE

La metà della metà della metà della metà della metà = $\frac{1}{32}$

La metà della metà $^{\times 4}$ = $\frac{1}{64}$

OSSERVA TUTTI I TRIANGOLI VIA VIA OTTENUTI E LE CORRISPONDENTI FRAZIONI. COSA NOTI?

NOTO CHE OGNI FRAZIONE È LA METÀ DI QUELLA PRECEDENTE COME $\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{4}$ - $\frac{1}{8}$ ecc. INCOLLANDOLI ACCANTO SE NON METTEVO DOPO ALLA FRAZIONE DELLA SUA METÀ NON RIUSCIVO A RIFARE IL QUADRATO DI PARTENZA. OGNI TRIANGOLO È LA METÀ DI QUELLO PRECEDENTE, SI VA DAL PIÙ PICCOLO AL PIÙ GRANDE LA FRAZIONE DIMINUISCE MENTRE IL DENOMINATORE AUMENTA

- SECONDO TE, NELLA PARTE "VUOTA" POSSONO ENTRARE ALTRI TRIANGOLI. QUALI? QUANTI?

NELLA PARTE VUOTA POSSONO ENTRARE TANTI ALTRI TRIANGOLI. POSSONO ENTRARE INFINITI TRIANGOLI CHE SIANO LA METÀ DI QUELLO PRECEDENTE, INFATTI AVANZA $\frac{1}{64}$ SE LO DIVIDO FORMO $\frac{1}{128}$ E COSÌ VIA. Che sono l'uno sempre metà del precedente.

- 1 da $\frac{1}{64}$
- 2 da $\frac{1}{128}$

- 4 $\frac{1}{128}$: 2 = 256 4 da $\frac{1}{256}$

....

IN PRATICA AD UN CERTO PUNTO CI SI FERMA
IN MATEMATICA: CI SI FERMA?
NO PERCHÉ I NUMERI SONO INFINITI.

Come mai se divido per 2 il triangolo raddoppia il denominatore? ☆

Perchè quando divido la frazione aumenta, perchè dico in quante parti è diviso l'intero e quindi se divido il denominatore aumenta il numero dei pezzi in cui ho diviso.

☆

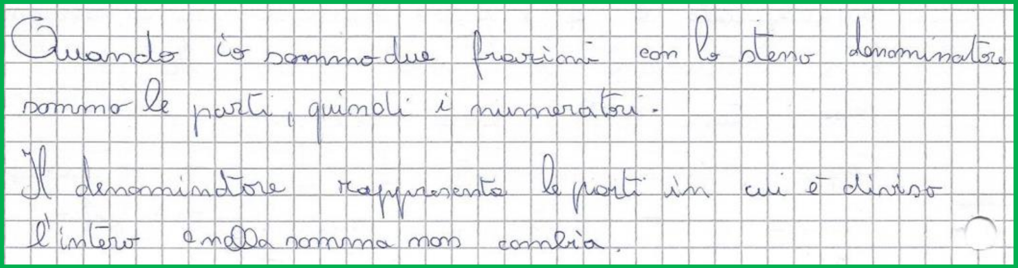
riassunto:

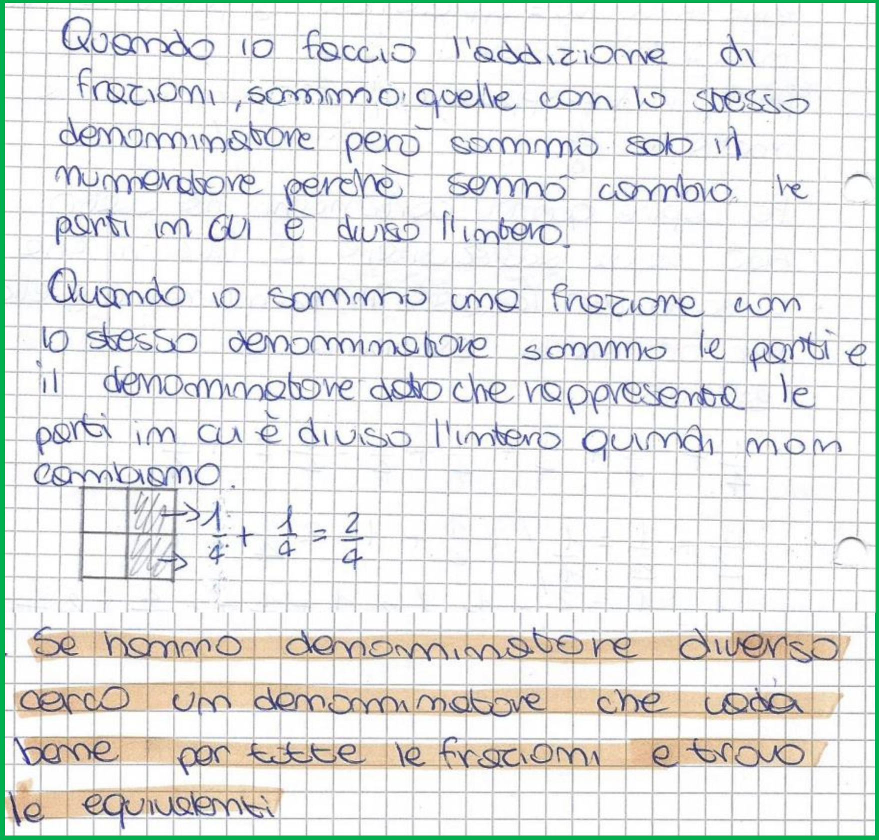
- PERCHÈ IL DENOMINATORE INDICA IL N° DI PEZZI IN CUI LO DIVIDO.

Dall'osservazione dei triangoli ottenuti emerge che ogni volta che dividono a metà, la porzione che ottengono è via via più piccola e nella frazione corrispondente il denominatore raddoppia. Si arriva infine al concetto di infinito: se continuo a dividere a metà i triangolini che ottengo, nella parte vuota entrano infiniti triangoli.

FORMALIZZAZIONE DEI CONCETTI

A questo punto del percorso si formalizzano i concetti a cui si è arrivati attraverso i problemi proposti, riguardo alle addizioni tra frazioni, e i ragazzi li verbalizzano sul proprio quaderno. Dalle verbalizzazioni emergono le motivazioni che portano a sommare i numeratori nel caso di frazioni con lo stesso denominatore, mentre è necessario portarle ad avere lo stesso denominatore nei casi più generici.


Quando io sommo due frazioni con lo stesso denominatore sommo le parti, quindi i numeratori.
Il denominatore rappresenta le parti in cui è diviso l'intero e nella somma non cambia.


Quando io faccio l'addizione di frazioni, sommo quelle con lo stesso denominatore però sommo solo il numeratore perchè sennò cambio le parti in cui è diviso l'intero.
Quando io sommo una frazione con lo stesso denominatore sommo le parti e il denominatore dato che rappresenta le parti in cui è diviso l'intero quindi non cambiamo.

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$

Se hanno denominatore diverso cerco un denominatore che vada bene per tutte le frazioni e trovo le equivalenti

Dopo la formalizzazione dei concetti si assegnano sia a scuola che a casa semplici addizioni e sottrazioni dal libro di testo «Contaci!», in modo da consolidare la procedura per svolgere queste operazioni. In classe si svolge un lavoro di potenziamento/recupero. L'insegnante individua gli esercizi e li assegna in funzione del livello dei ragazzi; i ragazzi più fragili svolgono gli esercizi assegnati sotto la guida delle insegnanti (curricolare e di sostegno) in modo da poter individuare le difficoltà ed eventualmente intervenire in modo individualizzato; gli altri ragazzi invece lavorano in gruppo, svolgendo esercizi anche più complessi. Il lavoro svolto in classe da ogni alunno viene consegnato e corretto dall'insegnante.

(c) $\frac{9}{25} + \frac{3}{10} = \frac{18}{50} + \frac{15}{50} = \frac{33}{50}$

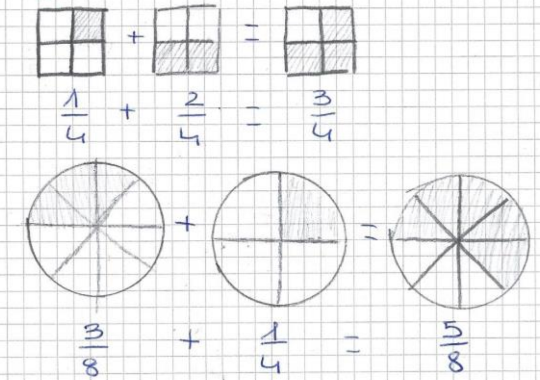
$\frac{9}{25} \xrightarrow{\cdot 2} \frac{18}{50}$

$\frac{3}{10} \xrightarrow{\cdot 5} \frac{15}{50}$

(c)

25	10
50	20
	30
	40
	50

Es 4 339



$\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$

(b) $\frac{3}{5} + \frac{1}{6} = \frac{18}{30} + \frac{5}{30} = \frac{23}{30}$

$\frac{3}{5} \xrightarrow{\cdot 6} \frac{18}{30}$

$\frac{1}{6} \xrightarrow{\cdot 5} \frac{5}{30}$

(b)

5	6
10	12
15	18
20	24
25	30
30	35

47) $2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$. 2 interi equivalgono a due volte 4 quindi 8. $8+3=11$.

48) $\frac{6}{5} + 1 = \frac{11}{5}$ 1 intero equivale a 5. $5+6=11$

Es 47 A348

$2 + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

Es 48 A348

$\frac{6}{5} + 1 = \frac{6}{5} + \frac{5}{5} = \frac{11}{5}$

Es 49 A348

$\frac{16}{21} + 2 = \frac{16}{21} + \frac{24}{21} = \frac{40}{21}$

Es 50 A348

$\frac{8}{15} + 3 = \frac{8}{15} + \frac{45}{15} = \frac{53}{15}$

ES. 42 PAG. 275

a) $\frac{3}{8} + \frac{1}{2} =$

$\frac{3}{8} + \frac{4}{8} = \frac{7}{8}$

b) $\frac{5}{8} + \frac{3}{4} =$

$\frac{5}{8} + \frac{6}{8} = \frac{11}{8}$

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{3}$

$\frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

d) $\frac{4}{5} + \frac{4}{15} =$

$\frac{12}{15} + \frac{4}{15} = \frac{16}{15}$

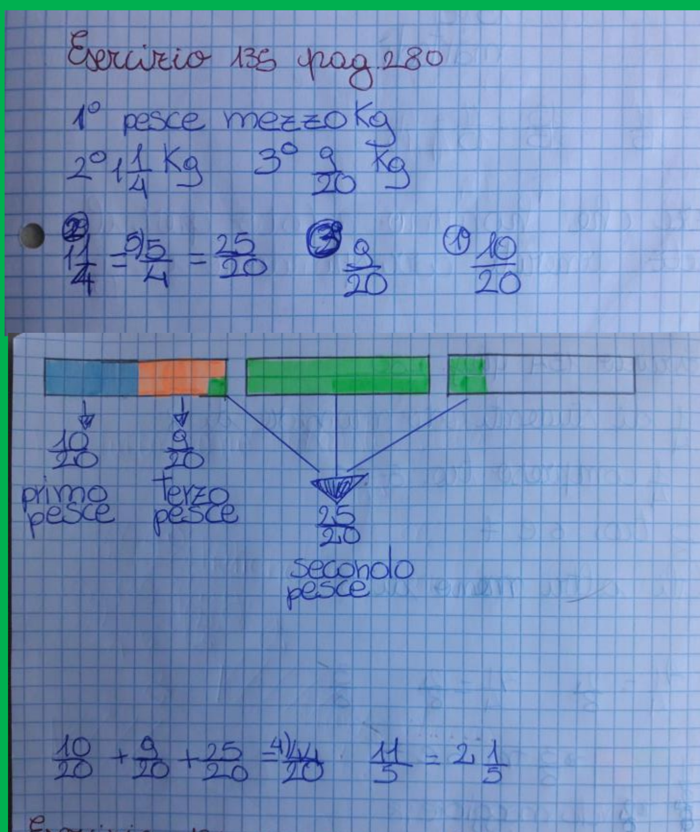
I ragazzi più fragili svolgono tutto il procedimento in modo dettagliato e per trovare un multiplo comune scrivono i multipli dei denominatori e cercano quello comune, come si può vedere dalle immagini.
In alcuni casi viene chiesto di fare il modello per svolgere le addizioni e si svolgono anche esercizi che prevedono di sommare a una frazione numeri naturali.

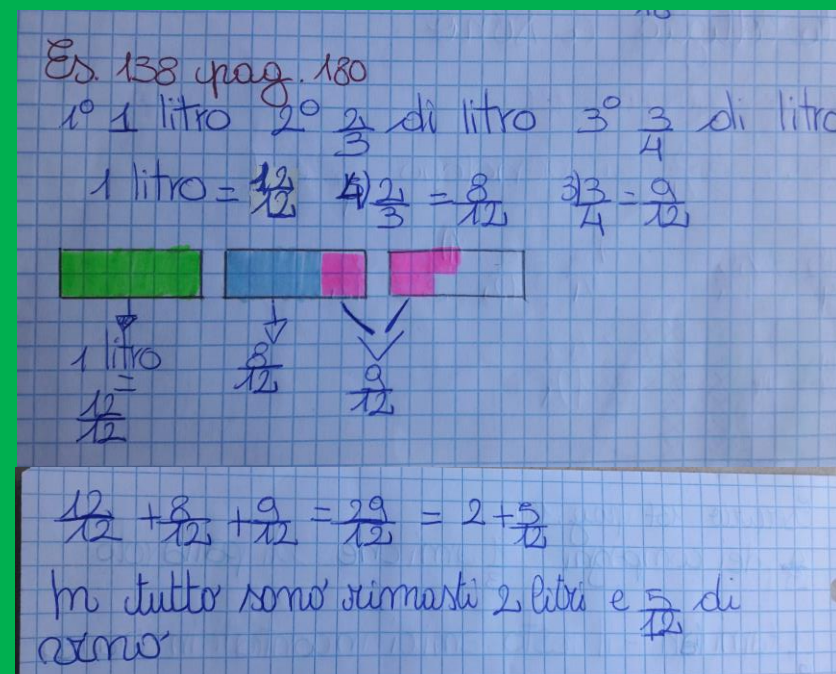
III FASE: PROBLEMI NON GEOMETRICI CON MODELLO GEOMETRICO

Al fine di rinforzare i concetti affrontati, cambiando però tipologia di esercizio, si assegnano ai gruppi problemi non geometrici risolvibili con le addizioni tra frazioni, presi dal loro libro di testo «Contaci!»; si richiede inoltre di rappresentare la situazione attraverso un modello.

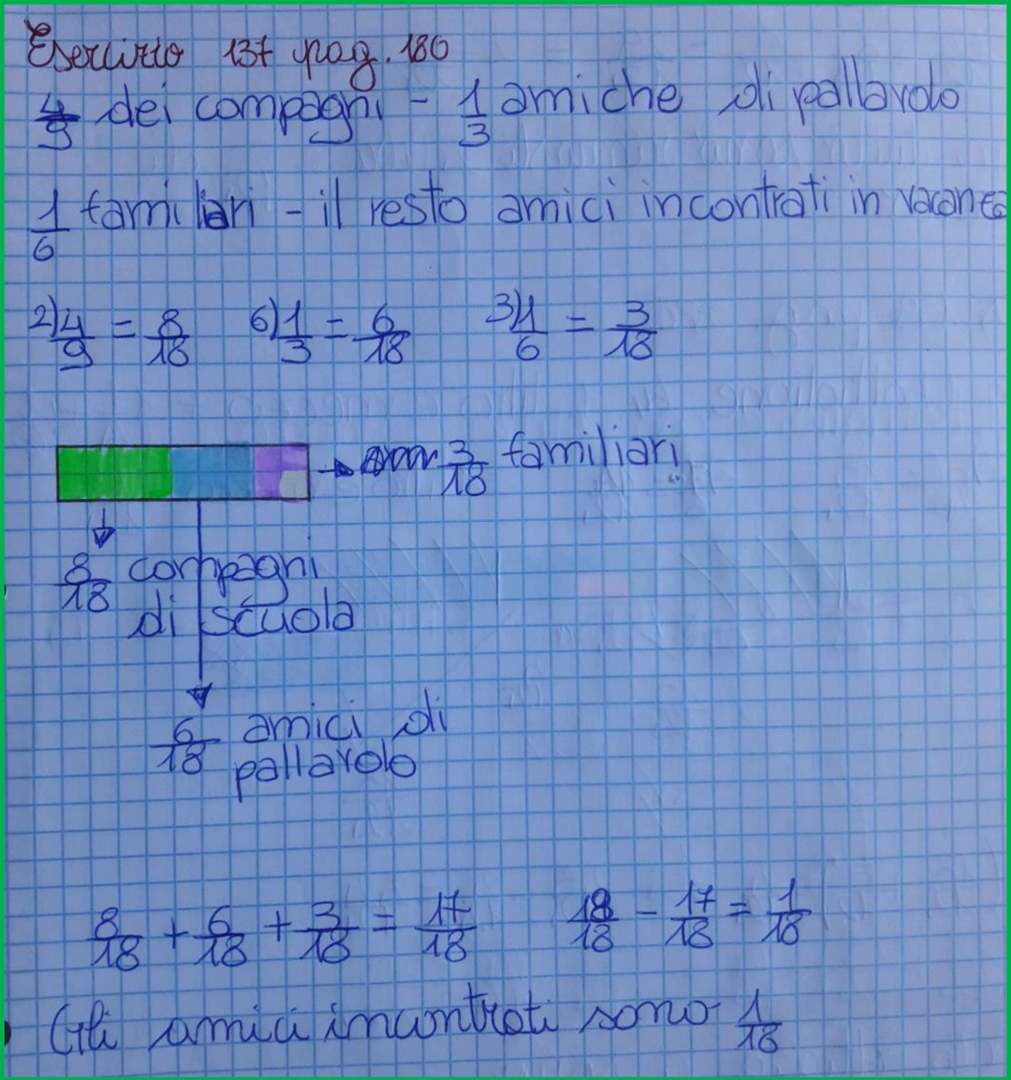
135 A una gara di pesca sportiva Marco aveva pescato tre pesci: il primo pesava mezzo kilogrammo, il secondo pesava $1\frac{1}{4}$ kg, il terzo $\frac{9}{20}$ kg. Quanto pesavano in tutto i pesci pescati da Marco?

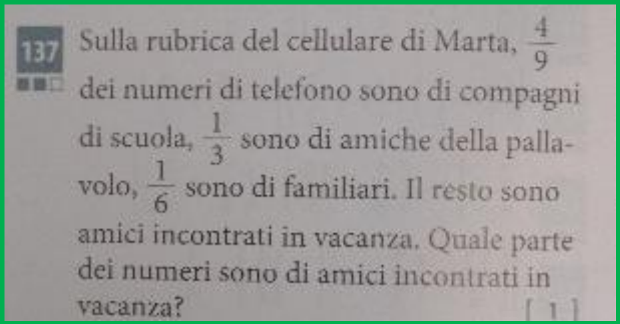
138 Dopo il pranzo, sul tavolo erano rimaste tre bottiglie di vino. La prima conteneva ancora un litro di vino, la seconda $\frac{2}{3}$ di litro e la terza tre quarti di litro. Quanto vino era avanzato in tutto?





III FASE: PROBLEMI NON GEOMETRICI CON MODELLO GEOMETRICO

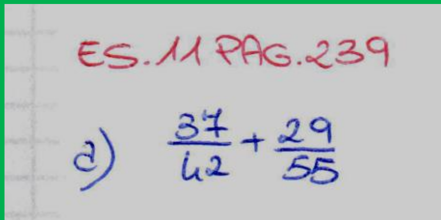




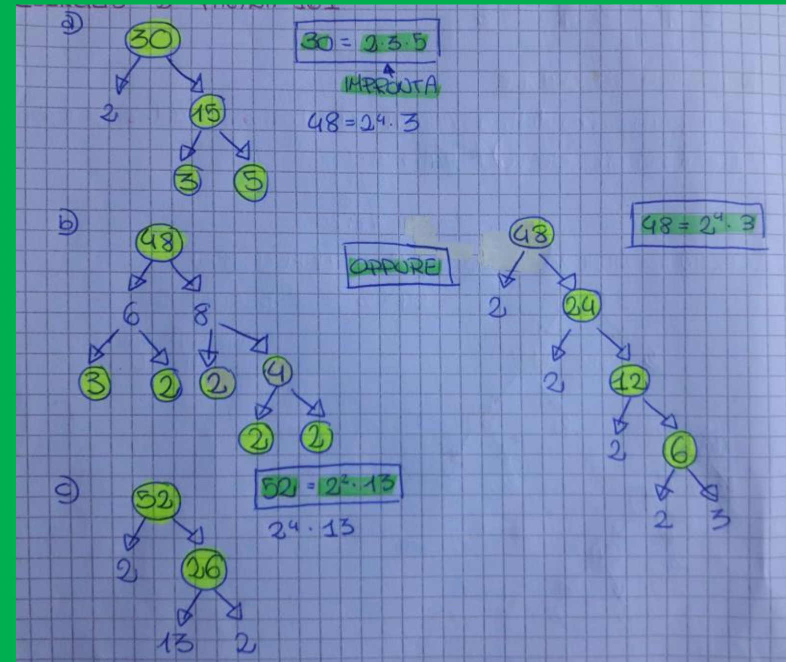
137 Sulla rubrica del cellulare di Marta, $\frac{4}{9}$ dei numeri di telefono sono di compagni di scuola, $\frac{1}{3}$ sono di amiche della pallavolo, $\frac{1}{6}$ sono di familiari. Il resto sono amici incontrati in vacanza. Quale parte dei numeri sono di amici incontrati in vacanza? [1]

La maggior parte dei gruppi risolve problemi non banali, che solitamente creano difficoltà. Come possiamo vedere dalle immagini disegnano istintivamente i modelli scegliendo un numero di quadretti che è multiplo dei denominatori delle frazioni, e spesso è il minimo comune multiplo, anche se in questa fase ancora non se ne è parlato.
Inoltre il modello li aiuta anche a visualizzare la frazione equivalente, e ciò dà un significato alla «procedura» aritmetica.

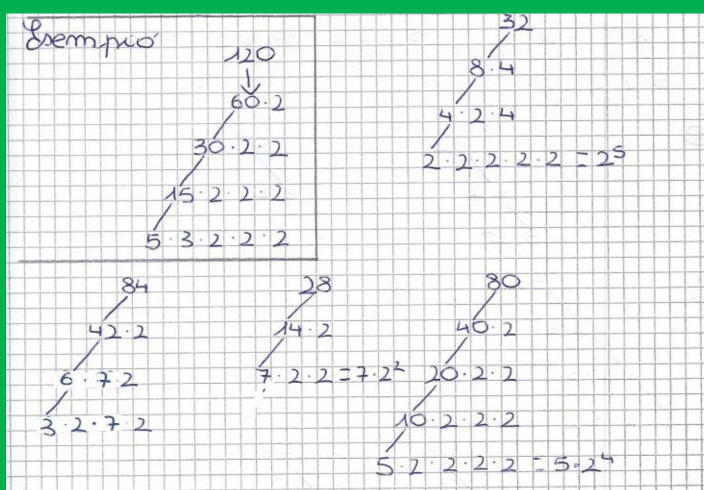
IV FASE: SCOMPOSIZIONE IN FATTORI PRIMI

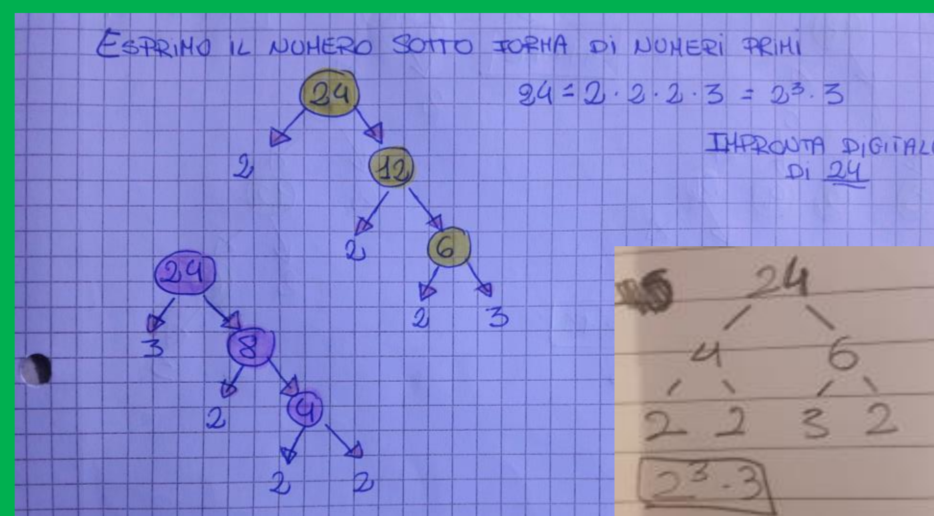


L'insegnante propone un'addizione tra frazioni complessa che sia difficile da risolvere trovando a mente un multiplo comune. Non riuscendo a risolverla, diventa chiaro che è necessario trovare un'altra strategia per questi casi.

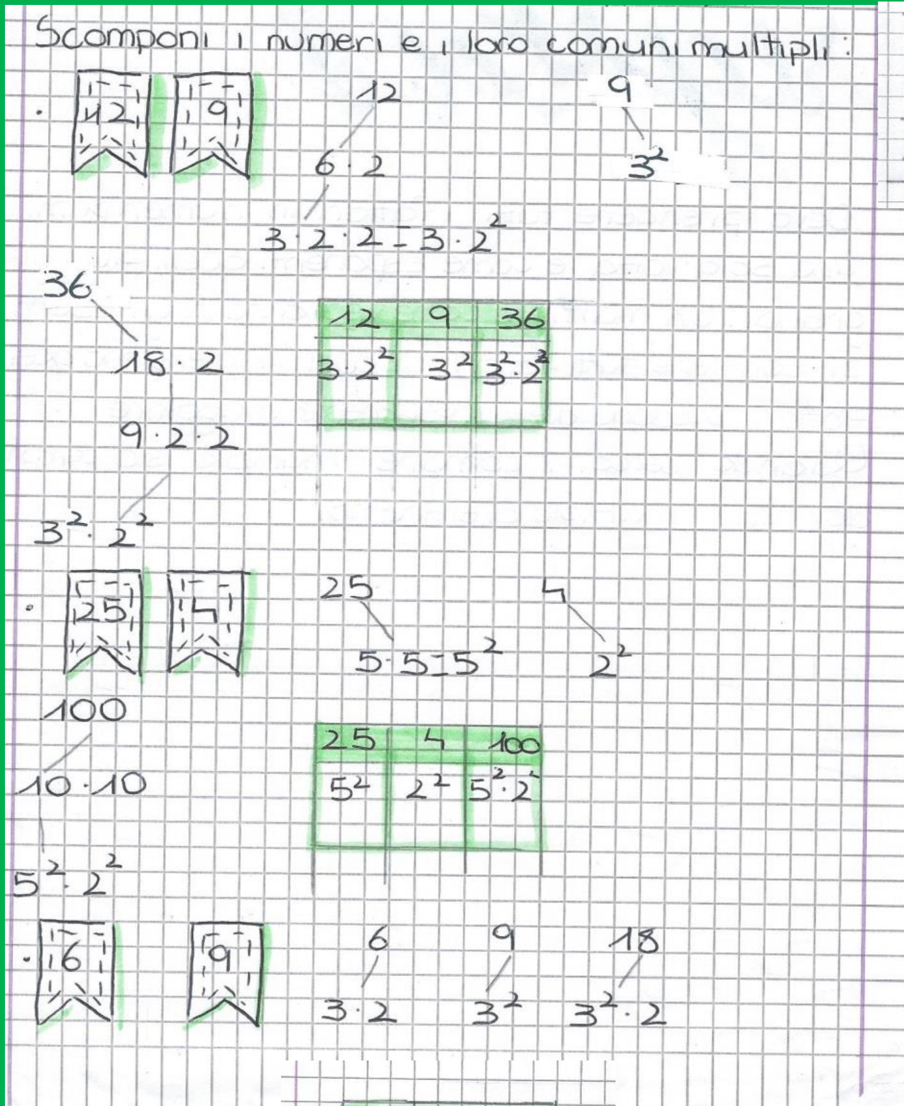


Si introduce solo a questo punto la scomposizione in fattori primi. Si chiede di esprimere in forma non canonica, usando il prodotto, alcuni numeri. Inizialmente le rappresentazioni non canoniche sono varie, ma quando si chiede loro di arrivare ad avere solo fattori primi, a questo punto si accorgono che la rappresentazione è sempre una sola. Si è trovata quindi «l'impronta digitale del numero» quella che lo identifica univocamente.





V FASE: MINIMO COMUNE MULTIPLO



12	9	36
$3 \cdot 2^2$	3^2	$3^2 \cdot 2^2$

25	4	100
5^2	2^2	$5^2 \cdot 2^2$

6	9	18
$3 \cdot 2$	3^2	$3^2 \cdot 2$

$4 = 2^2$ $6 = 3 \cdot 2$	$12 = 3 \cdot 2^2$ $9 = 3^2$	$25 = 5^2$ $4 = 2^2$	$6 = 3 \cdot 2$ $9 = 3^2$	$7 = 7 \cdot 1$ $28 = 7 \cdot 2^2$
$12 = 3 \cdot 2^2$	$36 = 2^2 \cdot 3^2$	$100 = 5^2 \cdot 2^2$	$18 = 3^2 \cdot 2$	$28 = 7 \cdot 2^2$

Per guidarli alla scoperta del m.c.m. si chiede di trovare l'impronta digitale di coppie di numeri e del loro m.c.m trovato a mente e poi di confrontare le impronte e cercare regolarità. Si fanno tanti esempi e dopo aver lasciato loro il tempo di confrontarsi nei gruppi si discute tutti insieme.

La prima cosa che individuano tutti è che nella scomposizione del m.c.m compaiono sempre tutti i fattori presenti nei numeri di partenza. Ciò richiama il concetto di multiplo di un numero. Non è stato facile farli arrivare a comprendere che dovevano scegliere il fattore con l'esponente più grande trattandosi di multipli.

Devo prendere tutti i fattori in numeri primi una sola volta e come esponenti quelli più grandi. Un multiplo come vediamo dagli esempi contiene tutti fattori di quel numero, ma quei fattori possono avere esponente maggiore. Quando cerco il comune multiplo sto cercando un multiplo di entrambi

Dopo una lunga discussione finalmente si è arrivati alla regola!!!

V FASE: MINIMO COMUNE MULTIPLO

Dopo aver trovato la regola è stato possibile risolvere il problema da cui eravamo partiti!!

ES. 11 PAG. 239

a) $\frac{37}{42} + \frac{29}{55}$

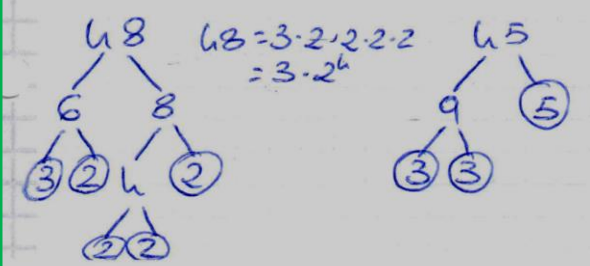
$42 = 7 \cdot 3 \cdot 2$

$55 = 5 \cdot 11$

$m.c.m = 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 11 = 2310$

$\frac{2035}{2310} + \frac{1218}{2310} = \frac{3253}{2310}$

b) $\frac{13}{48} + \frac{43}{45}$



$48 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$= 3 \cdot 2^4$

$45 = 5 \cdot 3 \cdot 3$
$= 5 \cdot 3^2$

$m.c.m = 2^4 \cdot 5 \cdot 3^2 = 720$

$\frac{195}{720} + \frac{688}{720} = \frac{883}{720}$

In questo modo hanno compreso che questo «meccanismo» può rappresentare una scorciatoia nel caso in cui non sia facile trovare un multiplo comune in maniera facile, e quindi ha acquisito significato.

VALUTAZIONE DEL PERCORSO

PUNTI DI FORZA:

- ✓ L’organizzazione della classe in gruppi di lavoro ha costituito un incentivo all’impegno e alla partecipazione, diminuendo fattori anche personali quali tensione, ansia, noia.

- ✓ La modalità di apprendimento cooperativo ha permesso il raggiungimento degli obiettivi minimi previsti per tutti gli alunni, anche stranieri, con BES, ripetenti. In particolare la verifica di gruppo ha permesso a tutti gli alunni di mettersi alla prova e autovalutarsi per la prima volta in tranquillità.

- ✓ Le modalità di valutazione hanno permesso di monitorare continuamente gli apprendimenti e di insistere in modo specifico sugli aspetti concettualmente più difficoltosi.

- ✓ Il percorso permette di trovare strategie per sommare semplici frazioni anche senza l’uso di algoritmi e procedure.

- ✓ Si arriva alla risoluzione di addizioni e sottrazioni con l’uso di un multiplo comune attraverso un ragionamento usando modelli e problemi; è importante nelle frazioni non solo la molteplicità delle rappresentazioni e dei registri, ma anche dei procedimenti e delle strategie che gli alunni mettono in campo in situazioni non didattiche, cioè dove non è esplicitato il traguardo cognitivo da raggiungere seguito dalla socializzazione delle conoscenze perché non rimangano troppo precocemente imbrigliati in un modello fisso che rischia di diventare misconcezione.

- ✓ Il minimo comune multiplo viene introdotto successivamente solo come strumento utile alla risoluzione di addizioni e sottrazioni più complesse, con denominatori più grandi.

- ✓ L’utilizzo di problemi con tante soluzioni favorisce il confronto e il pensiero divergente.

PUNTI DI CRITICITA’:

- ✓ Per poter valutare adeguatamente l’efficacia del percorso, che ha avuto tempi naturalmente dilatati, e consolidare i concetti affrontati è importante proporre successivi percorsi in cui tali concetti siano elementi costitutivi.

- ✓ La maggiore difficoltà che alcuni alunni hanno manifestato nello svolgimento della prova individuale può essere attribuita ad una mancata rielaborazione personale delle attività svolte in classe, coinvolgenti e formative, ma non seguite singolarmente da una rilettura accurata del quaderno personale.