

REGIONE  
TOSCANA



Iniziativa realizzata con il contributo della Regione Toscana  
nell'ambito del progetto

**Rete Scuole LSS**

a.s. 2018/2019

# METTIAMO IN RIGA LE SOLUZIONI!!!

**Ci sono problemi intorno a me che posso risolvere con le disequazioni.**

**Percorso sulle disequazioni partendo da situazioni reali per una classe prima di un Istituto Tecnico.**

# METTIAMO IN RIGA LE SOLUZIONI!!!

L'attività si colloca all'interno del curriculum di Matematica della  
classe I A dell'Istituto Tecnico Trasporti e Logistica  
«R. Del Rosso – G. Da Verrazzano» di Monte Argentario (GR)  
Docente: Basta Liliana

# COLLOCAZIONE NEL CURRICOLO VERTICALE

- ▶ L'idea di questo percorso segue naturalmente da un modulo progettato qualche anno fa sulle equazioni partendo da situazioni problematiche.
- ▶ Poiché l'approccio alle equazioni, nelle classi prime, continua ad essere impostato partendo da situazioni problematiche, è dunque apparso ovvio proporre un percorso analogo partendo da problemi di scelta legati a situazioni di vita reale.

# OBIETTIVI ESSENZIALI DI APPRENDIMENTO

- ▶ Analizzando situazioni reali che implicano una scelta e affrontando in parallelo le equazioni lineari partendo dai problemi, è sembrato utile pensare ad un percorso relativo alle disequazioni lineari individuando i seguenti obiettivi essenziali:
- ▶ Favorire sia l'apprendimento collaborativo che l'autoapprendimento;
- ▶ Favorire il lavoro di gruppo, sfruttando, in maniera consapevole, anche le risorse fornite da internet;
- ▶ Favorire in classe la discussione su aspetti matematici e far comprendere l'importanza della verifica finale del percorso tradotta anche in autovalutazione.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Introduzione al percorso

- ▶ Il tema proposto è nato da problemi di vita reale che trovano facile soluzione impostando una disequazione.
- ▶ Spesso le conoscenze, se costruite partendo da una necessità, diventano parte integrante del pensiero e ciò è ancora più facile se tali conoscenze sono costruite in gruppo.

Partendo da questi due presupposti, si sono elaborate una serie di schede che, in sintesi, proponevano un problema legato a situazioni reali, una serie di tematiche a cui dare risposte, il problema di partenza da rivedere secondo quanto appreso nel percorso e infine la richiesta di una verifica da predisporre secondo precise indicazioni.

# MATERIALI E STRUMENTI UTILIZZATI

Per la parte di lavoro svolto in classe si sono utilizzati:

- ▶ Schede fornite dalla docente;
- ▶ LIM, computer, tablet e cellulari personali per la fase di ricerca di gruppo;
- ▶ Quaderni personali per approntare schemi e appunti.

Per la parte di lavoro svolto a casa si sono utilizzati:

- ▶ Ancora schede fornite dalla docente;
- ▶ Computer personali e libro di testo;
- ▶ Quaderni personali e semplici strumenti da disegno.

# AMBIENTE DI LAVORO

- ▶ In aula, per quanto riguarda il lavoro relativo ad alcune delle schede proposte. (Approccio al problema, discussione sulle tematiche emerse e verifica finale)



- ▶ A casa o in ogni luogo i ragazzi hanno ritenuto opportuno riunirsi per lavorare in gruppo.

# TEMPO IMPIEGATO

- ▶ Per la messa a punto iniziale, per la ricerca di spunti di riflessione e progettazione specifica: 6 ore
- ▶ Per lo sviluppo del percorso nelle classi e suddivisi in gruppi: 8 ore
- ▶ Per la fase di verifica finale e per la conseguente discussione: 3 ore

# ALTRE INFORMAZIONI

- ▶ Per l'ideazione e sviluppo del percorso sono stati utili gli spunti forniti dalla rete sulla tematica **Disequazioni e problemi di scelta**.
- ▶ Altrettanto utili sono stati alcuni articoli sulla didattica della matematica e non ultimi i prodotti pubblicati sulla piattaforma LSS - WEB della Regione Toscana.
- ▶ Si è tratto spunto dal libro di testo per la scelta di problemi, legati a situazioni reali proposti nel percorso.
- ▶ E' stato infine fondamentale quanto affrontato nelle sedi di dipartimento delle materie scientifiche, dove si è più volte ribadita la necessità di legare la matematica a contesti reali.

# DESCRIZIONE DEL PERCORSO

- ▶ Nei precedenti anni scolastici l'approccio ai percorsi nell'ambito del Laboratorio del Sapere Scientifico è sempre stato strutturato coinvolgendo la classe suddivisa in gruppi.
- ▶ Il lavoro in gruppo è sembrato indispensabile anche in questo caso in quanto incide positivamente sulla motivazione degli allievi meno interessati e più in difficoltà e nel contempo stimola gli alunni più interessati e motivati.
- ▶ Il percorso è iniziato, nella classe prima, quasi in parallelo allo svolgimento del modulo relativo alle Equazioni Lineari, anch'esso impostato partendo dai problemi. Ciò all'incirca nel periodo fine aprile, maggio.
- ▶ Tale periodo non si è rivelato del tutto idoneo, visti gli innumerevoli impegni didattici che coinvolgono i ragazzi in prossimità dei recuperi nella seconda parte dell'anno scolastico. Anche per questo, l'attenzione e l'interesse verso il percorso sono apparsi in calo quanto più ci si avvicinava alla conclusione dell'anno scolastico.

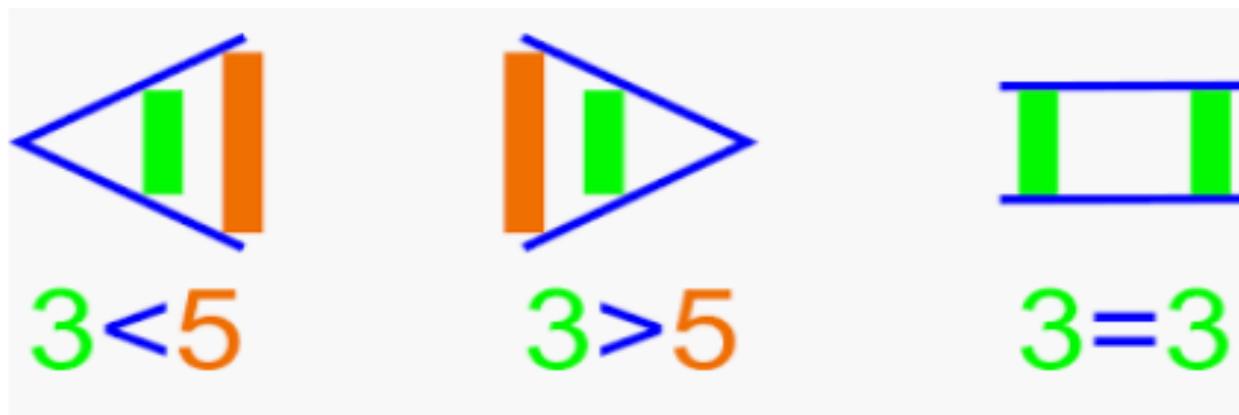
# DESCRIZIONE DEL PERCORSO

- ▶ Il primo approccio è stato quello di suddividere la classe in quattro gruppi. Si è ritenuto opportuno, nell'intento di creare suddivisioni quanto più omogenee e poco sbilanciate, indicare quattro referenti a cui si è lasciata l'opportunità di scegliere i compagni con cui lavorare.
- ▶ Vista la presenza di alunni pendolari e visto che parte del lavoro richiedeva di essere affrontato a casa, i gruppi si sono formati tenendo conto della provenienza, dell'amicizia e ovviamente delle dinamiche ormai consolidate all'interno della classe.



# DESCRIZIONE DEL PERCORSO

- ▶ A ciascuno dei quattro gruppi è stata consegnata una scheda, «**Scegliamo la giusta soluzione**» in cui si richiedeva di leggere attentamente il testo del problema e di ipotizzare una possibile soluzione spiegando e motivando le scelte fatte.
- ▶ Successivamente è stata proposta una seconda scheda, «**Proviamo ad imparare**» che richiedeva, a ciascun gruppo, di dare risposte a tematiche specifiche riguardanti le Disequazioni. Si chiedeva di fornire eventuali esempi e di specificare le fonti delle risposte fornite.



# DESCRIZIONE DEL PERCORSO

- ▶ Dopo che ciascun gruppo ha elaborato, riunendosi al di fuori dell'ambito scolastico, le risposte alle domande proposte, si è chiesto loro, secondo un opportuno ordine, di illustrare alla classe i temi elaborati. Per ciascuna tematica si è cercato di sviluppare una discussione guidata che potesse chiarire i dubbi e coinvolgere tutta la classe.
- ▶ Alla discussione guidata che si è sviluppata, ovviamente in più lezioni, è seguita la riproposizione del problema iniziale con la scheda «**Ripartiamo dall'inizio**» dove, anziché lasciare libertà di svolgimento, si chiedeva di seguire passi ben precisi.

# DESCRIZIONE DEL PERCORSO

- ▶ L'ultima scheda, «**Verifichiamoci...**», richiedeva di predisporre una verifica da somministrare ad uno specifico gruppo secondo uno schema ben preciso, in modo che, visti i tempi ristretti, fosse facilmente correggibile e più o meno omogenea nella difficoltà.
- ▶ Ai singoli gruppi, si chiedeva anche di concordare una griglia di correzione con l'intento di rendere omogenea la valutazione finale.



# APPROCCIO METODOLOGICO

## Scegliamo la giusta soluzione

- ▶ Ai singoli gruppi si fornisce la Scheda N° 1.
- ▶ Si chiede «Dopo aver letto attentamente il testo del seguente problema provate a ipotizzarne una possibile soluzione spiegando brevemente come arrivate ad essa»
- ▶ Gruppo 1: “Nella soluzione di tre test Paolo ha totalizzato 15 punti, 8 punti e 11 punti. Quale punteggio deve riportare Paolo al quarto test per ottenere una media di almeno 12 punti?”
- ▶ Gruppo 2: “Per noleggiare un’auto due compagnie applicano le seguenti tariffe:
  - La prima chiede una spesa fissa di 10 € più 20 € per ogni giorno di noleggio;
  - La seconda chiede una spesa di 20 € più 18 € per ogni giorno di noleggio.Per quanti giorni bisogna noleggiare la macchina perché la seconda compagnia sia più conveniente?”

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Scegliamo la giusta soluzione

- ▶ Gruppo 3: “Un assicuratore guadagna ogni mese la cifra fissa di 800 € più 75 € per ogni nuova polizza stipulata. Quante polizze deve stipulare in un mese per guadagnarne più di 1500 €?”
- ▶ Gruppo 4: “Due compagnie telefoniche applicano le seguenti tariffe:
  - La prima applica una spesa fissa di 0.1 € per ogni telefonata più 0.3 € per ogni minuto di conversazione;
  - La seconda compagnia applica una spesa fissa di 0.2 € più 0.25 € per ogni minuto di conversazione.Per telefonate di quale durata è più conveniente la prima compagnia?”

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Scegliamo la giusta soluzione

SCEGLIAMO LA GIUSTA SOLUZIONE

SCHEDA N° 1

GRUPPO 1

ALUNNI: \_\_\_\_\_

Dopo aver letto attentamente il testo del seguente problema provate a ipotizzarne una possibile soluzione spiegando brevemente come arrivate ad essa:

"Nella soluzione di tre test Paolo ha totalizzato 15 punti, 8 punti e 11 punti. Quale punteggio deve riportare Paolo al quarto test per ottenere una media di almeno 12 punti?"

La media aritmetica si trova facendo la somma dei valori  
fatto il numero di valori  
$$\frac{15+8+11+?}{4} = 12$$
 ? = 14 perché sommando i 4 valori si ottiene 48 che  
diviso per 4 risulta 12

con 14 punti si ricava una media di <sup>almeno</sup> 12 punti.

Paolo facendo 14 punti nell'ultima sede otterrebbe una  
media di almeno 12 punti, però se Paolo si impegnasse  
potrebbe ricavarne una media maggiore ottenendo

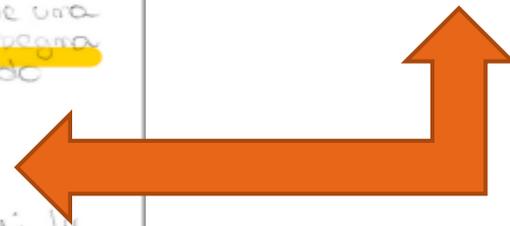
valori come:  
13, 14, 15, 16, 17, ecc....  
↓ ↓ ↓ ↓ ↓  
13 14 15 16 17.

Tutti quei numeri divisibili per 2 maggiore di 14  
potrebbero a Paolo ad ottenere una media  
maggiore di 12.

$$\frac{x+15+8+11}{4} = 12$$

x=14 perché ordendo a tentativi  
la somma dei 4 dati risulta 48  
che se divisa da 4 torna 12  
ovvero il risultato chiesto

► Senza mai parlare di Disequazioni il gruppo trova, anche rapidamente la soluzione. Imposta un'equazione e indica che se «Paolo si impegna potrebbe ottenere una media maggiore di 12 ottenendo valori come...



# APPROCCIO METODOLOGICO

## Scegliamo la giusta soluzione

SCEGLIAMO LA GIUSTA SOLUZIONE

SCHEDA N° 1

GRUPPO 2

ALUNNI: \_\_\_\_\_

Dopo aver letto attentamente il testo del seguente problema provate a ipotizzarne una possibile soluzione spiegando brevemente come arrivate ad essa:

"Per noleggiare un'auto due compagnie applicano le seguenti tariffe:

- 1 La prima chiede una spesa fissa di 10 € più 20 € per ogni giorno di noleggio;
- 2 La seconda chiede una spesa di 20 € più 18 € per ogni giorno di noleggio.

Per quanti giorni bisogna noleggiare la macchina perché la seconda compagnia sia più conveniente?"

$$\begin{array}{ll} 1 & 20 \cdot 6 = 120 \\ & 120 + 10 = 130 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2 & 18 \cdot 6 = 108 \\ & 108 + 20 = 128 \end{array}$$

La seconda compagnia diventa più conveniente = partire dal 6° giorno in poi,

Ci siamo arrivati per tentativi.

$$\begin{array}{ll} 1 & 20 \cdot 2 = 40 \\ & 40 + 10 = 50 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2 & 18 \cdot 2 = 36 \\ & 36 + 20 = 56 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 20 \cdot 3 = 60 \\ & 60 + 10 = 70 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2 & 18 \cdot 3 = 54 \\ & 54 + 20 = 74 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 20 \cdot 4 = 80 \\ & 80 + 10 = 90 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2 & 18 \cdot 4 = 72 \\ & 72 + 20 = 92 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 20 \cdot 5 = 100 \\ & 100 + 10 = 110 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2 & 18 \cdot 5 = 90 \\ & 90 + 20 = 110 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 1 & 20 \cdot 6 = 120 \\ & 120 + 10 = 130 \end{array} \quad \begin{array}{ll} 2 & 18 \cdot 6 = 108 \\ & 108 + 20 = 128 \end{array}$$

- Anche il secondo gruppo, per scegliere la compagnia più conveniente, procede per tentativi, arrivando al risultato corretto. (Indica, infatti, «a partire dal sesto giorno»).



# APPROCCIO METODOLOGICO

## Scegliamo la giusta soluzione

SCEGLIAMO LA GIUSTA SOLUZIONE

SCHEDA N° 1

GRUPPO 3

ALUNNI: \_\_\_\_\_

Dopo aver letto attentamente il testo del seguente problema provate a ipotizzarne una possibile soluzione spiegando brevemente come arrivate ad essa:

"Un assicuratore guadagna ogni mese la cifra fissa di 800 € più 75 € per ogni nuova polizza stipulata. Quante polizze deve stipulare in un mese per guadagnare più di 1500 €?"

- Il gruppo 3, nel risolvere il problema, non tenendo conto di un guadagno richiesto di più di 1500 Euro, risolve correttamente, ma solo in parte, visto che il risultato dovrebbe prevedere un numero di polizze maggiore di 10 e non uguale a 10.

Dati

800 € mensili = sono fissi

75 € polizza

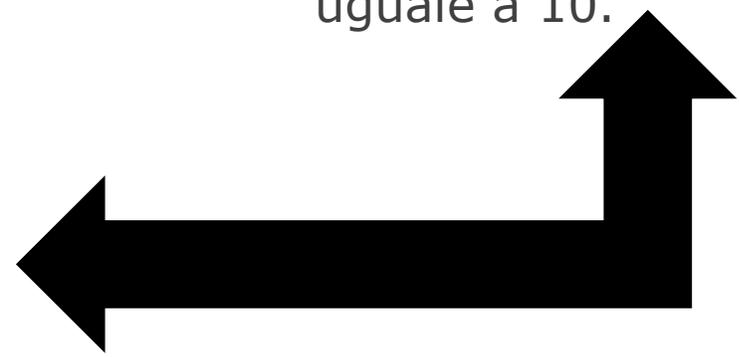
1500 € = stipendio obiettivo

$75 \times 20 = 1500 \text{ €}$

$1500 - 800 = 700 \text{ €}$

$700 \div 75 = 9,3 \text{ polizze} = \text{a } 10 \text{ polizze}$

$1500 \text{ €} = (800 + 75 \times 10 \text{ €}) =$



# APPROCCIO METODOLOGICO

## Scegliamo la giusta soluzione

SCEGLIAMO LA GIUSTA SOLUZIONE

SCHEDA N° 1

GRUPPO 4

ALUNNI:

Dopo aver letto attentamente il testo del seguente problema provate a ipotizzare una possibile soluzione spiegando brevemente come arrivate ad essa:

"Due compagnie telefoniche applicano le seguenti tariffe:

- La prima applica una spesa fissa di 0.1 € per ogni telefonata più 0.3 € per ogni minuto di conversazione;
- La seconda compagnia applica una spesa fissa di 0.2 € più 0.25 € per ogni minuto di conversazione.

Per telefonate di quale durata è più conveniente la prima compagnia?"

È più conveniente la prima compagnia.

$$1) 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,3 = 0,8 + 0,3 = 1,1$$

$$2) 0,2 + 0,2 + 0,25 + 0,25 = 0,9 + 0,25 = 1,15$$

- Infine, il Gruppo 4, non soffermandosi a leggere con attenzione la richiesta, somma semplicemente i costi delle rispettive compagnie e conclude il discorso....



# APPROCCIO METODOLOGICO

## Scegliamo la giusta soluzione

- ▶ Una volta completata la Scheda 1, che in linea di massima non ha creato troppi problemi vista la semplicità delle scelte poste, si è portata avanti una discussione sull'importanza di non tralasciare parole, solo all'apparenza, secondarie.
- ▶ Considerare fondamentali parole come «Almeno» oppure «Maggiore di» fanno sì che nella soluzione del problema non vengano escluse infinite altre possibilità.
- ▶ In effetti, alcuni dei quattro gruppi, anche se in maniera indiretta, hanno dato il giusto peso alle parole precedentemente citate, anche pur non utilizzando simboli matematici.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare

- ▶ Una volta completata la prima Scheda ed esaurita la discussione, a ciascuno dei quattro gruppi è stata proposta la Scheda N° 2 «Proviamo ad imparare»
- ▶ Per tutti la richiesta è:  
«Provate a dare risposte alle seguenti tematiche, aiutandoti anche con esempi, indicando le fonti a cui avete fatto riferimento»
- ▶ Le tematiche proposte hanno implicato un lavoro da svolgere prevalentemente in ambiente extra scolastico, con l'opportunità di effettuare le ricerche sia dalla rete che da libri di testo. Si richiedeva comunque di indicare le fonti e di riportare quanto ritenuto opportuno sulla scheda consegnata. In questo modo, il semplice copia-incolla poteva essere quanto meno limitato.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare

Scheda 2 - Gruppo 1:

- 1) Cos'è una disuguaglianza?
- 2) Si possono formalizzare delle proprietà delle disuguaglianze?
- 3) Cos'è una disequazione?



Scheda 2 - Gruppo 2:

- 1) Cosa si intende per soluzioni di una disequazione?
- 2) Fate una ricerca sulle varie modalità di rappresentazione grafica e simbolica delle soluzioni di una disequazione, indicando la modalità, a vostro avviso, più chiara.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare

Scheda 2 - Gruppo 3:

- 1) Cosa si intende per disequazioni equivalenti?
- 2) Parliamo di principi di equivalenza: illustrateli aiutandovi con esempi indicandone le conseguenze.
- 3) Come si classificano le disequazioni lineari?



Scheda 2 - Gruppo 4:

- 1) Perché alla parola disequazione si accosta l'aggettivo lineare?
- 2) Proponendo degli esempi, cosa si intende per disequazioni impossibili e disequazioni sempre verificate?
- 3) Una volta risolta una disequazione, è possibile verificarne la correttezza?

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare

PROVIAMO AD IMPARARE  
SCHEDA N° 2  
GRUPPO 1

ALUNNE [REDACTED]

Provate a dare risposte alle seguenti tematiche, aiutandovi anche con esempi, indicando le fonti a cui avete fatto riferimento.

- 1) Cos'è una disuguaglianza?
- 2) Si possono formalizzare delle proprietà delle disuguaglianze?
- 3) Cos'è una disequazione?

1) LA DISUGUAGLIANZA È UNA RELAZIONE D'ORDINE TOTALE SULL'INSIEME DEI NUMERI REALI O SU UN SUO SOTTINSIEME (WIKIPEDIA)

2) <sup>1</sup> LA RISPOSTA È SÌ PERCHÉ DATA UNA DISUGUAGLIANZA AGGIUNGENDO AD AMBO I MEMBRI PER ~~LO~~ ~~STESSO~~ UNO STESSO NUMERO POSITIVO SI OTTIENE UNA DISUGUAGLIANZA ~~VERAMENTE~~ SODDISFATTA CON LO STESSO VERSO (MATEMATICAMENTE)

3) UNA DISEQUAZIONE, IN MATEMATICA È, UNA RELAZIONE DI DISUGUAGLIANZA TRA DUE ESPRESSIONI CHE CONTENGONO DELLE INCOGNITE

$$f(x) > g(x)$$

(WIKIPEDIA)

La prima serie di domande evidenzia, comprensibilmente, delle perplessità:

- ▶ La definizione di disuguaglianza ripresa da Wikipedia appare sintetica e lascia dubbi sulla sua effettiva comprensione.
- ▶ In relazione alle proprietà delle disuguaglianze, ci si limita alla sola monotonia dell'addizione.

Ovvio che, in fase di rielaborazione insieme al resto della classe, si è ampiamente discusso di tali aspetti, ampliando con esempi il tema delle proprietà.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare

PROVIAMO AD IMPARARE

SCHEDA N° 2

GRUPPO 2

ALUNNI: \_\_\_\_\_

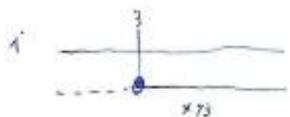
Provate a dare risposte alle seguenti tematiche, aiutandoti anche con esempi, indicando le fonti a cui avete fatto riferimento.

- 1) Cosa si intende per soluzioni di una disequazione? senza capire
- 2) Fate una ricerca sulle varie modalità di rappresentazione grafica e simbolica delle soluzioni di una disequazione, indicando le modalità, a vostro avviso, più chiare.

Ritornando una matematica non deve essere con i numeri, dell'immagine che vengono in discussione e, un'altra parte è stato anche nel caso delle equazioni, come mostra una disequazione ha infinite soluzioni, e deve cioè si insieme delle soluzioni di una disequazione

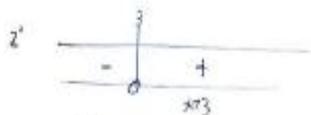
(wikipedia)

$$x > 3$$

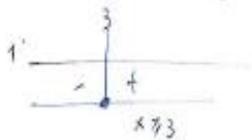


$$] 3; +\infty [$$

$$( 3; +\infty )$$



$$x \geq 3$$



$$[ 3; +\infty [$$



- ▶ Le risposte date dal secondo gruppo e riportate a lato sono state ulteriore spunto di riflessione e di discussione con la classe.
- ▶ Le modalità di rappresentazione grafica e simbolica delle soluzioni di una disequazione hanno reso necessario, su richiesta di un buon numero di allievi, che i compagni chiamati a illustrare tale aspetto facessero ulteriori esempi e che chiarissero meglio il significato delle varie rappresentazioni.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare

PROVIAMO AD IMPARARE  
SCHEDA N° 2  
GRUPPO 3

ALUNNI: \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_ / \_\_\_\_\_

Provate a dare risposte alle seguenti tematiche, aiutandovi anche con esempi, indicando le fonti a cui avete fatto riferimento.

- 1) Cosa si intende per disequazioni equivalenti?
- 2) Parliamo di principi di equivalenza: illustrateli aiutandovi con esempi indicandone le conseguenze.
- 3) Come si classificano le disequazioni lineari?

1) Due disequazioni si dicono equivalenti quando hanno lo stesso insieme di soluzioni. Per le disequazioni valgono 2 principi di equivalenza:  
principio di addizione: se si aggiunge o sottrae a 2 membri una stessa espressione si ottiene un'espressione equazione equivalente (wikipedia)

2) Le disequazioni lineari sono disequazioni in cui l'incognita compare elevata a 1. In pratica riconosci le disequazioni lineari perché compaiono senza esponente. ~~(REDOOC)~~  
Esse si classificano in numeriche o letterali, intere o fratte.

3) I principi di equivalenza sono 2; (REDOOC)  
il primo principio di equivalenza afferma che aggiungendo ad entrambi i membri di una equazione, uno stesso numero o una stessa espressione contenente l'incognita, otteniamo una equazione equivalente a quella data.  
Il secondo principio dice che moltiplicando o dividendo entrambi i membri di una equazione per uno stesso numero diverso da zero per una stessa espressione che non possa annullarsi, si ottiene una equazione equivalente a quella data.

- ▶ Il gruppo 3 affronta solo parzialmente con la giusta attenzione le tre domande poste, dal momento che, come si evince dalle risposte, c'è confusione tra equazioni e disequazioni.
- ▶ Quando si parla di principi di equivalenza si fa riferimento, anche in maniera esplicita, alle equazioni.... **Ma non si parlava di disequazioni...??**

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare



Provate a dare risposte alle seguenti tematiche, aiutandovi anche con esempi, indicando le fonti a cui avete fatto riferimento.

- 1) Perché alla parola disuguaglianza si accosta l'aggettivo lineare?
- 2) Proponendo degli esempi, cosa si intende per disuguaglianze impossibili e disuguaglianze sempre verificate?
- 3) Una volta risolta una disuguaglianza, è possibile verificarne la correttezza?

1) Si accosta l'aggettivo lineare alla disuguaglianza

2) In matematica una disuguaglianza rappresenta una disuguaglianza tra espressioni con delle incognite. La risoluzione di una disuguaglianza si ottiene quando i valori  $x$  soddisfanno la disuguaglianza e le soluzioni sono la somma degli intervalli.

3) Si è possibile verificare la correttezza con una riprova cioè dando alla  $x$  un valore più alto del numero accanto.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare

E poi c'è il gruppo che affronta le questioni poste forse in maniera un po' superficiale...

- Perché alla parola disequazione si accosta l'aggettivo lineare?

DS: accosta l'aggettivo lineare alla disequazione

- Proponendo esempi, cosa si intende per disequazioni impossibili e disequazioni sempre verificate?

2) In matematica una disequazione rappresenta una disuguaglianza tra espressioni con delle incognite. La risoluzione di una disequazione si ottiene quando i valori  $x$  soddisfano la disuguaglianza e le soluzioni sono la somma degli intervalli.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare

- Una volta risolta una disequazione, è possibile verificarne la correttezza?

3) Si è possibile verificare la correttezza con una riprova cioè quando alla  $x$  diamo un valore più ALTO DEL NUMERO ACCANTO

- Questa risposta lascia perplessi e incuriositi:  
Forse, se risolvendo un'equazione ottengo ad esempio  $x=5$ , posso verificare sostituendo  $x=6$ ??



# APPROCCIO METODOLOGICO

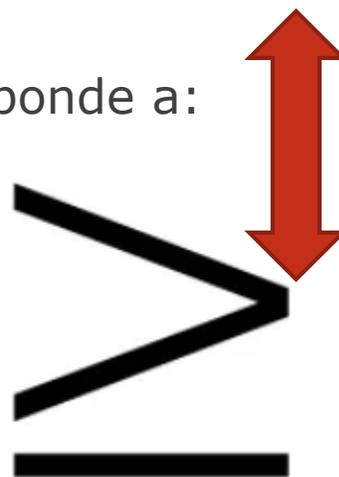
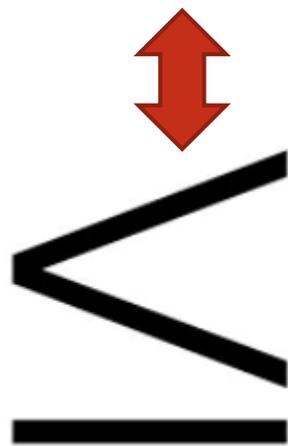
## Proviamo ad imparare

- ▶ Prima di passare alla fase successiva, si è ritenuto opportuno, pur apprezzando lo sforzo degli alunni, non tanto nel lavoro di ricerca, quanto nei lavori di esposizione delle questioni proposte, ridefinire insieme alcuni aspetti fondamentali. I ragazzi hanno quindi riproposto gli argomenti enunciati non del tutto in maniera corretta con una discussione in classe. Si è dunque chiarito:
- ▶ Cosa si intende per disuguaglianza e quali sono le relative proprietà.
- ▶ Cosa si intende per disequazione e per soluzione di una disequazione.
- ▶ Quali sono i principi di equivalenza.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Proviamo ad imparare

- ▶ Prima di passare alla fase successiva, si è fatta una riflessione sul fatto che in un problema si possono incontrare tante espressioni, tra le quali, ad esempio «è maggiore di...» o «è minore o uguale a...». Tali espressioni trovano una traduzione immediata in simboli «>» o «≤», ma altrettanto immediata è la traduzione di «almeno», «non meno di».
- ▶ Analogamente, «al massimo» e «non supera» corrisponde a:



# APPROCCIO METODOLOGICO

## Ripartiamo dall'inizio...

- ▶ L'idea è stata quella di riproporre nella Scheda 3 lo stesso problema iniziale ma con questa esplicita richiesta:

«Riprendendo il problema proposto nella scheda N° 1 provate a ritrovare la soluzione seguendo i seguenti passi:»

- ▶ PASSO 1: Dal problema alla disequazione (schematizzate il testo indicando dati e incognita)
- ▶ PASSO 2: Risolvete la disequazione esplicitando, nei passaggi risolutivi, i principi di equivalenza e le regole utilizzate nei vari passaggi.
- ▶ PASSO 3: Rappresentate la soluzione trovata simbolicamente e graficamente.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Ripartiamo dall'inizio...

- ▶ Si ritiene opportuno mettere a confronto, per ciascun gruppo, come è stato affrontato il problema nella fase iniziale e nella fase attuale.
- ▶ Si anticipa che i risultati non sempre sono entusiasmanti e per certi aspetti rispecchiano l'impegno decisamente in calo che gli alunni dimostrano in prossimità del termine dell'anno scolastico.
- ▶ L'approccio a ciascuno dei quattro problemi offre comunque spunti di riflessione.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Ripartiamo dall'inizio...

**Gruppo 1 - "Nella soluzione di tre test Paolo ha totalizzato 15 punti, 8 punti e 11 punti. Quale punteggio deve riportare Paolo al quarto test per ottenere una media di almeno 12 punti?"**

### Scheda 1

La media aritmetica si trova facendo la somma dei valori  
fatto il numero di valori

$$\frac{15+8+11+?}{4} = 12$$

? = 26 perché moltiplicando i 4 valori si ottiene 48 che  
diviso per 4 risulta 12

con 14 punti si ricava una media di <sup>almeno</sup> 12 punti

Paolo facendo 14 punti nell'ultima sede otterrebbe una  
media di almeno 12 punti, però se Paolo si impegna  
potrebbe ricavare una media maggiore ottenendo

valori come:  
18, 22, 26, 30, 34 ecc....

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| ↓  | ↓  | ↓  | ↓  | ↓  |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |

Loi bez 2 wogione di 14

### Scheda 3

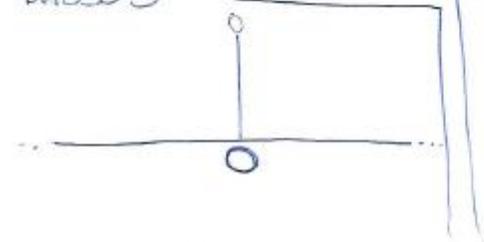
PASSO 1  
DATI  
1T. = 15 p.  
2T. = 8 p.  
3T. = 11 p.

INCOGNITA  
4T. = 12 p. = ?

### PASSO 2

Principio d'equivalenza utilizzati.

### PASSO 3



# APPROCCIO METODOLOGICO

## Ripartiamo dall'inizio...

- ▶ Il gruppo 1 era arrivato, nella prima fase, ad una quasi corretta soluzione, risolvendo prima un'equazione e successivamente, in maniera verbale e con considerazioni sull'impegno che Paolo avrebbe potuto mettere nel quarto test, conclude che « **$x=14$  o di più....**» gli consentirebbe di avere una media di 12 punti o più.
- ▶ Riprendendo il problema, dopo aver discusso e rielaborato gli aspetti fondanti delle disequazioni, si limita a inserire i soli dati.
- ▶ Problema di scarsa motivazione a fine maggio?

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Ripartiamo dall'inizio...

**Gruppo 2 - "Per noleggiare un'auto due compagnie applicano le seguenti tariffe:  
La prima chiede una spesa fissa di 10 € più 20 € per ogni giorno di noleggio;  
La seconda chiede una spesa di 20 € più 18 € per ogni giorno di noleggio.  
Per quanti giorni bisogna noleggiare la macchina perché la seconda compagnia sia più conveniente?"**

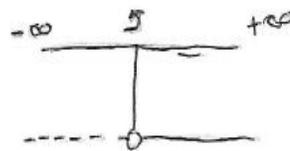
**Scheda 1**

La seconda compagnia diventa più conveniente a partire dal 6° giorno in poi,

Ci siamo arrivati per tentativi.

**Scheda 3**

$$\begin{aligned}20 \cdot X + 10 &> 18 \cdot X + 20 \\20X + 10 &> 18X + 20 \\20X - 18X &> -10 + 20 \\ \frac{2X}{2} &> \frac{10}{2} \\ X &> 5\end{aligned}$$



Dati:  
1) 10 € = spesa fissa  
20 € = ogni giorno di noleggio  
2) 20 € = spesa fissa  
18 € = ogni giorno di noleggio  
incognite

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Ripartiamo dall'inizio...

Il Gruppo 2 che aveva risolto per tentativi il problema imposta correttamente:

- ▶ Schematizza il testo impostando dati e incognite (più o meno)
- ▶ Imposta correttamente e risolve la disequazione pur non esplicitando i principi di equivalenza e le regole che ne derivano.
- ▶ Rappresenta graficamente la soluzione.



# APPROCCIO METODOLOGICO

## Ripartiamo dall'inizio...

**Gruppo 3** - "Un assicuratore guadagna ogni mese la cifra fissa di 800 € più 75 € per ogni nuova polizza stipulata. Quante polizze deve stipulare in un mese per guadagnarne più di 1500 €?"

### Scheda 1

DATI

800 f. mensili = sono fissi

75 € polizza

1500 € = stipendio obiettivo

$$75 \times 20 = 1500 \text{ €}$$

$$1500 - 800 = 700 \text{ €}$$

$$700 \div 75 = 9,3 \text{ polizze} = \text{a } 10 \text{ polizze}$$

$$1500 \text{ €} = (800 + 75 \times 10 \text{ €}) =$$

### Scheda 3

DATI

800 € = stipendio ; 75 € = soldi per la polizza

INCOGNITA

1500 € = obiettivo da raggiungere con le polizze

$$800 + (75 \cdot 10) = x$$

$$1550 = 1500$$

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Ripartiamo dall'inizio...

Il gruppo 3 che era arrivato ad una conclusione corretta frammentando il problema in più operazioni e approssimando poi a 10 polizze, riaffrontando lo stesso testo si limita a:

- ▶ Schematizzare quasi correttamente i dati, anche se traduce «più di» in «uguale a»
- ▶ Porre come incognita non il numero delle polizze, che oramai ricordano essere 10, ma il guadagno atteso.
- ▶ Verificare che con 10 polizze l'assicuratore guadagnerà 1550 € che è più di 1500 €
- ▶ Nessun cenno alle disequazioni come si chiedeva...



# APPROCCIO

## Ripartiamo

**Gruppo 4 - "Due compagnie telefoniche applicano le seguenti tariffe: La prima applica una spesa fissa di 0.1 € per ogni telefonata più 0.3 € per ogni minuto di conversazione; La seconda compagnia applica una spesa fissa di 0.2 € più 0.25 € per ogni minuto di conversazione. Per telefonate di quale durata è più conveniente la prima compagnia?"**

**Scheda 1**

È più conveniente la prima compagnia

$$1) 0,1 + 0,1 + 0,3 + 0,3 = 0,8 + 0,3 + 0,1 = 0,12$$

$$2) 0,2 + 0,2 + 0,25 + 0,25 = 0,9 + 0,25 + 0,2 = 1,35$$

# METODOLOGICO

## dall'inizio...

**Scheda 3**

La prima compagnia è più conveniente perché la spesa è minore della seconda compagnia e soprattutto si possono fare più minuti di telefonata (0,3€).

Se ad esempio bisogna fare 2 minuti di telefonata

$$1) \text{compagnia} = 0,1€ + 0,6€ = 0,7€$$

$$0,52€ - 0,7€ = 0,45€$$

$$2) \text{compagnia} = 0,2 + 0,50€ = 0,52€$$

Telefonando con la prima compagnia ~~è~~ la durata

è più conveniente di 0,45€

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Ripartiamo dall'inizio...

- ▶ Infine il gruppo 4 rimane fermo nella convinzione che è più conveniente la prima compagnia senza tener conto che il problema chiedeva «**per telefonate di quale durata è più conveniente la prima compagnia**».
- ▶ Nessun accenno alla schematizzazione del problema.
- ▶ Nessun accenno all'impostazione di una disequazione. 

Si è ritenuto opportuno e indispensabile una nuova discussione in classe per valutare insieme quale può essere l'impostazione corretta dei problemi tramite disequazioni.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Verifichiamoci....

- ▶ Ultima richiesta e quindi ultima Scheda

VERIFICHIAMOCI....

SCHEDA N° 4

GRUPPO 1

ALUNNI: \_\_\_\_\_

Proponete al GRUPPO 2 una verifica così composta:

- Due test a scelta multipla.
- Un problema da risolvere impostando una disequazione.
- Una disequazione da risolvere esplicitando come e quando si applicano i principi di equivalenza.

Alla prova dovrà essere allegata una griglia di valutazione che preveda un voto minimo pari a 1 e un voto massimo pari a 10.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Verifichiamoci....

- Come prima cosa i gruppi concordano la griglia di valutazione

1<sup>a</sup> griglia

- 1) 1 punto se corretto/0 se è errato o non svolto
- 2) 1 punto se è corretto/0 se è errato o non svolto
- 3) 5 punti se è corretto/0 se non svolto/2 se parzialmente svolto
- 4) 3 punti se è corretto/0 se non svolto/1 se svolto

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Verifichiamoci....

- ▶ La preparazione della verifica è avvenuta in classe; i ragazzi avevano a disposizione il tablet della docente, i propri cellulari e i libri di testo che potevano consultare per predisporre la prova da somministrare ad uno degli altri gruppi. (Sui cellulari massima sorveglianza!!!!)
- ▶ Anche se il clima oramai da vacanza si è fatto sentire e anche se la frequenza cominciava a non essere più assidua per tutti, i ragazzi hanno lavorato seriamente, magari a volte in maniera un po' «maligna», cercando quesiti o disequazioni un po' «complicate» che spesso neanche loro riuscivano a svolgere.
- ▶ Di seguito si allegano alcune delle proposte di verifica preparate dai ragazzi.

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Verifichiamoci....

1) A quale disequazione si può associare questo disegno



- $x \geq 5$
- $x \leq 5$
- $x < 5$
- $x > 5$

2) La disequazione  $5+x \geq 4+x$  ha soluzione

- impossibile
- $x \geq 1$
- $x \geq 0$
- sempre verificata

3) Carlo vuole prendere lezioni di inglese. Per questo esistono diverse scuole: la prima chiede una quota di iscrizione di 100 € ed un contributo di 3€ a lezione; la seconda chiede una quota di iscrizione di 200€ e un contributo di 5€ a lezione. Quale delle due scuole è più conveniente

$$(x-2)^2 + x + 2 \leq (x-1) - (x+1)$$

4) La seguente ~~equazione~~ <sup>disequazione</sup> ha ~~il~~ <sup>come</sup> risultato: ~~5/11~~

$$8x - 4(x-3) \leq 11[5x - 4(2x+1)] + 3$$

$x > 14$

$x < \frac{29}{11}$

$x > \frac{11}{3}$

$x < \frac{120}{42}$

5)  $2x - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}(2x-3) + 2(x-3) \leq (2x + \frac{1}{3}) - 3x + 2$  ~~5/11~~ ~~1/4~~

$x \leq \frac{86}{51}$

impossibile

$x \geq \frac{86}{51}$

$x \leq \frac{6}{4}$

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Verifichiamoci....

Problema ~~10P~~ **5P**

Uno studente vuole prendere lezioni d'inglese. Contatta due diverse scuole: la prima chiede una quota di iscrizione di 100 € e un contributo di 3€ a lezione; la seconda chiede una quota di iscrizione di 80€ e un contributo di 5€ a lezione. Quale delle due scuole è più conveniente?

Svolgi e decidi se la disequazione è determinata, indeterminata o impossibile.

$$\frac{5}{2}x + \frac{2x-2}{3} - \frac{1-x}{3} - \left(\frac{3x-1}{2} + 2x\right) \geq \frac{3}{2}$$

ES n°1

1)  $5+x \geq 4+x$  HA SOLUZIONE

~~X~~ IMPOSSIBILE

~~X~~ SEMPRE VERIFICATA

C)  $x \geq 0$

D)  $x \geq 1$

ES

2) RISPONDI SENZA RISOLVERE, LE 2 DISEQUAZIONI  $4-x < 3-2x$  E  $x-4 > 2x-3$  HANNO

~~X~~ LE STESSO SOLUZIONI

~~X~~ LE SOLUZIONI DELLA PRIMA SONO OPPOSTE A QUELLE DELLA SECONDA

C) NON C'È ALCUN LEGAME TRA LE SOLUZIONI DELLE 2 DISEQUAZIONI

D) LE SOLUZIONI DELLA PRIMA HANNO IL VERSO CONTRARIO

RISPETTO A QUELLE DELLA SECONDA. ~~MA~~ la B e la D sono praticamente uguali

ES n°3

TROVA QUEI NUMERI INTERI CHE SOMMATI ALLA LORO METÀ E ALLA LORO TERZA PARTE SUPERINO ALMENO DI 20 IL DOPIO DEL NUMERO STESSO

ES n°4

$$\frac{x+3}{2} + \frac{x+4}{2} + \frac{x-6}{2+1} > x(x+1) - [(x+1)(x-1)] + 2$$

3

0

0

2

1

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Verifichiamoci....

$$b) \quad x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x \geq 20 + 2x$$

$$\frac{6x + 3x + 2x}{6} \geq (20 + 2x) \cdot 6$$

$$6x + 3x + 2x \geq 20 + 18x$$

$$6x + 3x + 2x - 18x \geq 20$$

$$\frac{-7x \geq 20}{-7} \quad \frac{20}{-7}$$

$$x \leq \frac{20}{7}$$

$$c) \quad 5 + x \geq 4 + x$$

$$-x + x \geq 4 - 5$$

$$0 \leq -1$$

~~non esiste~~

$$\frac{x+3}{2} + \frac{x+4}{2} + \frac{x-6}{2+1} > x(x+1) - [(x+1)(x-1)] + 2$$

~~$$\frac{x+3+x+4+x-6}{2} > x^2+x - [x^2-1] + 2$$~~

$$\frac{3x+9+3x+12+2x-12}{2} > (x^2+x - [x^2-x+x-1] + 2) \cdot 6$$

$$3x+9+3x+12+2x-12 > x^2+x - x^2+x - x + 1 + 18$$

$$6x+3x+2x - x^2+x^2 - x + x - x > 1+18-9-12+12$$

$$\frac{7x \geq 10}{7} \quad \frac{10}{7}$$

$$x \geq \frac{10}{7}$$

# APPROCCIO METODOLOGICO

## Verifichiamoci....

- ▶ Oltre che alla preparazione della prova gli alunni erano chiamati a correggere e a valutare secondo la griglia che avevano condiviso.
- ▶ La correzione è forse l'aspetto più interessante da osservare perché gli allievi più capaci hanno assunto in pieno il ruolo del «professore»; gli alunni più deboli avevano costantemente bisogno di confronto prima di segnare un esercizio o un passaggio come errato.
- ▶ L'aspetto a mio avviso positivo è che tutta questa fase è avvenuta in totale serenità, avendo avuto cura di completare questa parte del percorso quando si erano già concluse le ultime verifiche e interrogazioni della disciplina.

# VERIFICA GLI APPRENDIMENTI

## Considerazioni sui risultati ottenuti

- ▶ Sebbene alcuni esempi precedenti mostrino un discreto livello di coinvolgimento da parte di alcuni ragazzi, non è stato così per tutti i gruppi.
- ▶ L'essere chiamati a predisporre una verifica per i compagni, consapevoli che la correzione implicava anche saper risolvere e/o svolgere, ha fatto sì che quasi tutti si cimentassero nell'affrontare varie tipologie di esercizi.
- ▶ Il risultato, in ogni caso sempre e comunque positivo, è e rimarrà coinvolgere gli alunni a lavorare su aspetti matematici privandoli di quell'ombra di ansia che purtroppo spesso accompagna questa disciplina. Spesso i ragazzi, se tranquilli e sereni, ci sorprendono piacevolmente...

# CRITICITA' EMERSE

Al termine del percorso un ulteriore bilancio mette in luce le criticità emerse.

- ▶ Sebbene l'intento di lavorare in gruppi sia comunque da perseguire, emerge la criticità che spesso l'aula non risulta, come spazio, idonea alla confusione che comunque si crea durante fasi in cui è previsto un confronto ed una discussione tra i membri stessi del gruppo.
- ▶ Anche il pendolarismo di diversi studenti ha determinato, spesso, un'oggettiva difficoltà nel confrontarsi e nel collaborare fattivamente all'interno di un singolo gruppo. Solo in pochi casi gli alunni sono riusciti ad organizzarsi in maniera fattiva e produttiva.
- ▶ Infine, la scelta del periodo, il mese di maggio, non è mai vincente, ma i ragazzi, pur essendo stanchi e, come sempre, oberati dalle ultime verifiche e dall'ultima rincorsa per il recupero delle materie in cui emergono le carenze, hanno comunque lavorato al meglio.

# CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

- ▶ Il percorso presentato distingue la fase di verifica dalla fase di costruzione ed elaborazione delle conoscenze. Ma, prevedendo questo percorso un approccio metodologico di tipo laboratoriale e, in parte di ricerca ed elaborazione autonoma, è naturale che anche la fase di verifica finale degli apprendimenti sia lontana dalla verifica classica. Di fatto la preparazione di una prova per i compagni è di per sé un momento di verifica degli apprendimenti essendo chiamati ad individuare problematiche pertinenti al tema che loro stessi sono in grado di risolvere.
- ▶ Questo percorso, come già accennato, è stato proposto in parallelo al modulo sulle equazioni. Il fatto che i ragazzi avessero familiarità con i principi di equivalenza delle equazioni ha di sicuro facilitato nell'individuare i processi meccanici che portano alle soluzioni. Ma il significato vero dei simboli  $>$ ,  $<$  e  $=$  sarà del tutto chiaro?

# CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

- ▶ Spesso, il fatto di affrontare le disequazioni dopo le equazioni porta a considerare la disequazione come subordinata all'equazione: sebbene questo possa essere algebricamente utile, potrebbe a volte risultare matematicamente fuorviante, perché non sempre c'è la consapevolezza di quale sia realmente la differenza tra i vari insiemi di soluzione.
- ▶ Nella fase in cui i gruppi sono stati chiamati a fare ricerche per rispondere a quesiti precisi, si è evidenziato per alcuni una trascrizione acritica di quanto disponibile in rete, che non è stata in grado di fornire un apporto di nuove conoscenze né per loro stessi né per la classe.
- ▶ La ricerca di informazioni rimane pertanto uno degli aspetti più critici e dunque da curare vista la scarsa capacità dei ragazzi di approfondire i contenuti trovati in rete. Quest'ultimo aspetto appare fondamentale e potrebbe essere un prossimo tema per un percorso da proporre.