

REGIONE
TOSCANA



**Iniziativa realizzata con il contributo della Regione
Toscana nell'ambito del progetto**

Rete Scuole LSS

a.s. 2019/2020

Funzioni polinomiali e (dis)equazioni:
un approccio laboratoriale alle funzioni cubiche

Verso l'immaginario: cubiche ed equazioni di terzo grado

Motivazione del percorso

- Ci si è proposti con questo percorso di rafforzare e approfondire la correlazione tra i grafici delle funzioni polinomiali e la risoluzione di equazioni e disequazioni di grado superiore al secondo per via grafica.
- Abbiamo visto in questi anni la spinta ad adottare l'uso di calcolatrici grafiche e la risoluzione grafica di un'equazione di terzo grado è stata anche proposta in uno dei problemi del tema di maturità scientifica nell'a.s. 2018/19.
- Inoltre ci proponiamo di fare apprezzare in maniera qualitativa ai nostri studenti il teorema fondamentale dell'algebra e le vicende che hanno portato nel corso del cinquecento all'introduzione dei numeri complessi e alla equazione di Cardano.

Collocazione nel curriculum verticale

- Il percorso è stato collocato nella prima parte del terzo anno di un liceo scientifico opzione scienze applicate, quando si approfondiscono equazioni e disequazioni di vario grado e tipo.
- Partendo da situazioni già note, ovvero le equazioni e disequazioni di secondo grado e la loro relazione con il grafico di una funzione di secondo grado, con l'ausilio di software di geometria dinamica come GeoGebra e Desmos, si passa allo studio di equazioni e disequazioni di terzo grado.

Obiettivi

- Rafforzare le competenze nel calcolo algebrico.
- Saper ricavare dal grafico di una funzione polinomiale informazioni relative a iniettività, suriettività, biiettività, dominio, codominio, zeri, segno.
- Sapere associare zeri della funzione ed equazione associata.
- Rendere consapevoli che per le equazioni polinomiali non c'è sempre una formula risolutiva ma che è possibile stabilire se e quante soluzioni presentano.

Elementi salienti dell'approccio metodologico

- Didattica per problemi: vengono assegnate delle schede di lavoro. Dall'esecuzione dei compiti assegnati emergono i concetti teorici da veicolare.
- Ribaltamento dell'approccio analitico:
 1. Si parte dal grafico per approdare prima alle regolarità/singularità delle funzioni di terzo grado.
 2. Si ricavano criteri generali per stabilire se e quante soluzioni ha l'equazione associata al grafico.

Materiali, strumenti e apparecchi utilizzati

- Software GeoGebra, Desmos.
- Uso della LIM in classe e/o aula di informatica.
- Schede di lavoro.
- Dispense autoprodotte.

Ambienti in cui si è sviluppato il percorso

- Aula.

- Aula di informatica.

Tempo impiegato

- Messa a punto preliminare nel gruppo LSS: 5 ore.
- Progettazione specifica: 20 ore (verifica dei materiali e degli strumenti; realizzazione preliminare delle esperienze con Desmos e GeoGebra; redazione delle dispense, delle schede di laboratorio e di lavoro; definizione del percorso).
- Periodo: settembre/ottobre.
- Tempo-scuola di sviluppo del percorso: 15 ore.
- Documentazione del percorso: 30 ore.

Descrizione del percorso didattico

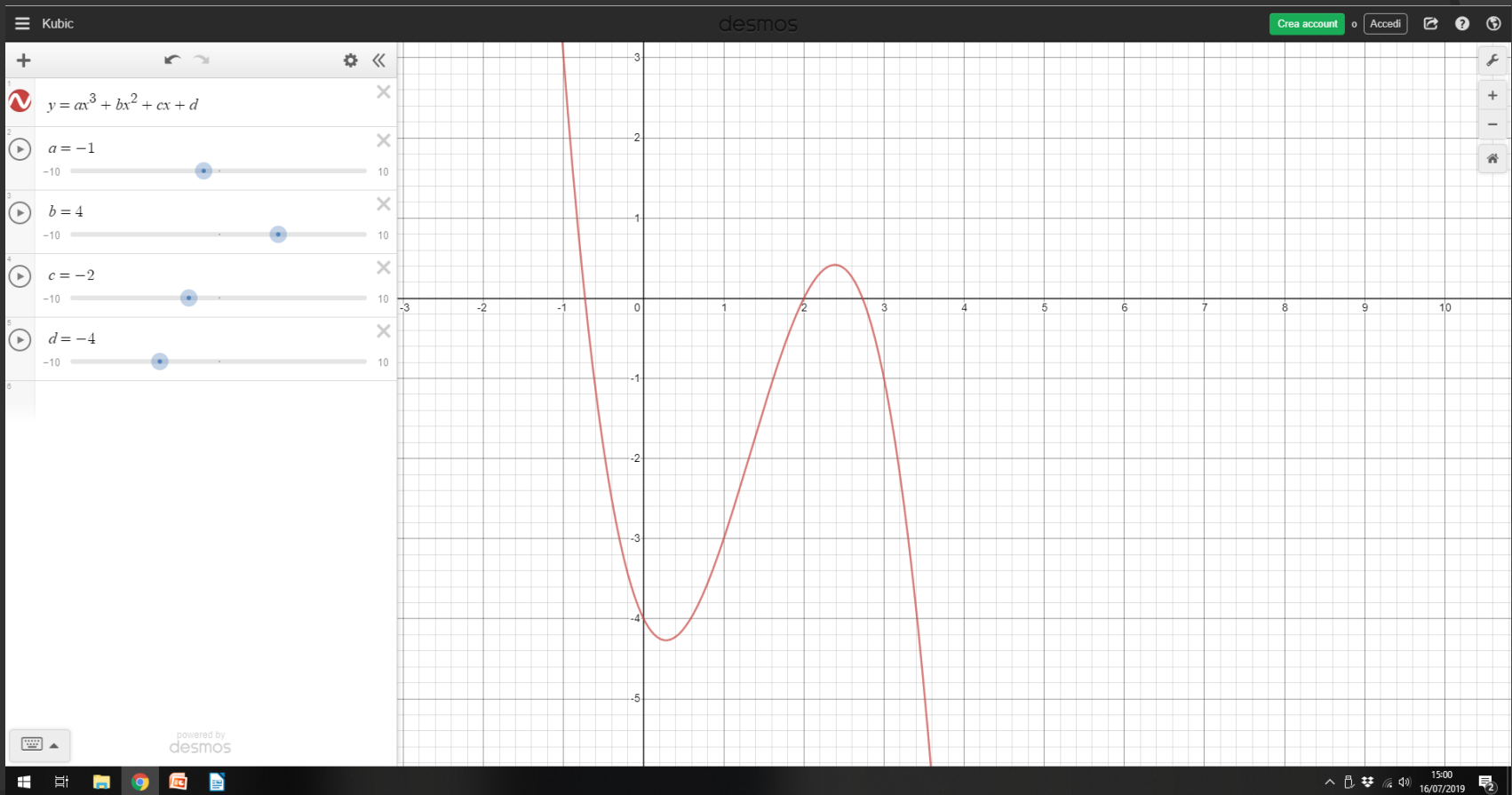
- Nella prima parte del percorso si riprendono le equazioni e disequazioni di secondo grado, le proprietà delle funzioni e lo studio del grafico di una funzione di secondo grado.
- Nella seconda parte si chiede agli studenti di esaminare come varia il grafico di una funzione di terzo grado al variare dei coefficienti numerici e da questa analisi ricavare informazioni sia sulla funzione che sull'equazione ad essa associata. (questa è la parte qui documentata in quanto più significativa ai fini del percorso)
- Nella terza parte si estende lo studio a funzioni polinomiali di grado superiore.

Prerequisiti

- ⦿ Equazioni e disequazioni di secondo grado.
- ⦿ Concetto di funzione e relative proprietà.
- ⦿ Grafico della funzione di secondo grado.
- ⦿ Criteri di scomposizione dei polinomi.

1: Grafici di funzioni di terzo grado

Viene data agli studenti una scheda di lavoro da compilare dopo avere esaminato un file di geometria dinamica. È stato utilizzato Desmos perché eseguibile sul telefono cellulare anche senza installare la relativa app. Lo studente muove i cursori associati al valore dei coefficienti numerici della funzione di terzo grado e risponde alle domande proposte sulla scheda.



Prime generalità: casi degeneri

Si parte dalle condizioni generali e si individuano le prime proprietà della funzione in funzione dei valori assegnati ai coefficienti. Già su questo punto sono pochi gli studenti in grado di individuare le condizioni particolari per cui la funzione diventa di secondo e primo grado. Nessuno individua come funzione il caso $y = d$ ovvero quello di funzione costante.

Studiamo le funzioni del tipo $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ovvero le funzioni descritte da un polinomio di terzo grado. Usiamo il software Desmos per capire un po' di proprietà dei grafici di queste funzioni. Vai al link:

<https://www.desmos.com/calculator/nobie3dwkx>

Puoi, spostando i cursori, variare i valori dei coefficienti a, b, c, d . Dopo aver spostato i vari cursori ritieni che abbiano delle forme particolari indipendenti dai valori assegnati? Riporta qui o sul quaderno le tue impressioni:

Se $a = 0 \Rightarrow$ la funzione è una parabola.

Se $a = 0$ e $b = 0 \Rightarrow$ la funzione è una retta.

Il coefficiente d indica il punto d'intersezione del grafico con l'asse y .

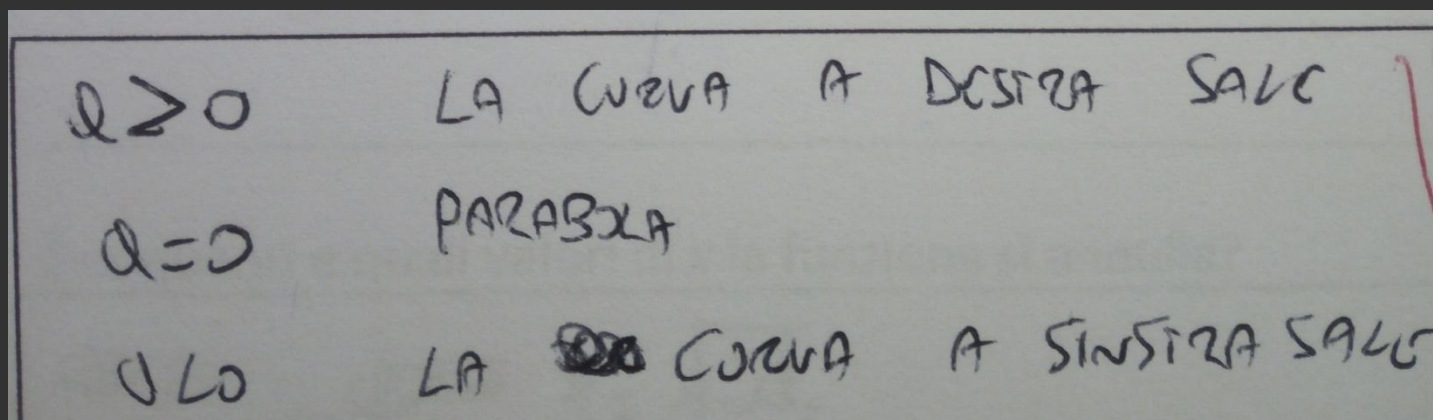
Prime generalità: la forma a S

Una studentessa parla di forma a S. Inoltre qui c'è un uso improprio di m , inteso non come coefficiente angolare della retta ma come funzione crescente o decrescente.

La forma della funzione rimane simile ad una S
indipendentemente dal numero dei valori a, b, c, d
Mentre al variare di a si ha:
Se $a > 0$ \rightarrow Concavità ~~alta~~ alta sulla destra ($m > 0$)
Se $a < 0$ \rightarrow Concavità alta sulla sinistra ($m < 0$)

Cresce o decresce? Cos'è un flesso?

Emergono dal punto di vista grafico i casi di curve che crescono sempre o sono crescenti a tratti: anche qui salta subito fuori un errore già notato dal docente quando si parla di pendenza della retta. Alcuni alunni leggono il grafico da destra a sinistra invertendo crescita e decrescenza! Eloquentemente l'esempio riportato dove la funzione cresce a destra o a sinistra.



Altri studenti, introducono il termine flesso, termine non usato in precedenza dal docente e qui non sempre usato in maniera propria: alcuni intendono in realtà i punti di massimo e minimo relativi.

"Quadranti che parabolizzano"

Si rilevano, anche in alunni con buone abilità di calcolo, grosse difficoltà nell'esposizione scritta come in questi due esempi qui riportati.

al variare di "d" la funzione trasla verso l'alto o verso il basso.
al variare di "c" se c tende all'infinito la funzione si rettifica se
invece tende a $-\infty$ si parabolizza simmetricamente all'intersezione degli assi
per $b > 0$

ALL'AUMENTARE DI a LA FUNZIONE DIVENTA SEMPRE PIU' SIMILE AD UNA RETTA
DUE VALORI OPPOSTI DI a HANNO UN GRAFICO SIMMETRICO RISPETTO
ALL'ASSE X
Q COMPORTA UNA TRASLAZIONE DELL'INTERSEZIONE CON L'ASSE Y
SE B È POSITIVO PORTA UNA PARABOLIZZAZIONE DEL 1° QUADRANTE, MENTRE
SE B È NEGATIVO UNA PARABOLIZZAZIONE DEL 2° QUADRANTE. SE C È POSITIVO
CREA UNA FORMA SIMILE AD UNA RETTA NEL 1° QUADRANTE, MENTRE SE È NEGATIVO
FORMA UNA COSA SIMILE AD UNA PARABOLA NE 2° QUADRANTE

Primo bilancio

Già da questa prima generale analisi come si vede vengono fuori molti dati interessanti su cui riflettere. Si è subito creata l'occasione per lavorare in classe attivamente sul linguaggio usato e approdare a uno condiviso.

Solo a questo punto si è passato a una serie di casi particolari da analizzare prima singolarmente e poi, in un secondo momento, insieme con il docente.

2: Casi particolari

Viene richiesto agli studenti di porre alcuni coefficienti uguali a zero e si studiano le singole proprietà dei grafici così ottenuti.

(a) $y = a x^3$

(b) $y = a x^3 + d$

(c) $y = a x^3 + b x^2$

(d) $y = a x^3 + c x$

(e) $y = a x^3 + b x^2 + c x$

Nei vari casi viene richiesto di distinguere i casi in cui i coefficienti sono positivi o negativi.

3: Dal grafico all'equazione

Dopo aver visto le caratteristiche delle funzioni viene poi richiesto agli studenti di elaborare una regola generale per calcolare le radici delle equazioni di terzo grado che possiamo associare alle nostre funzioni e di creare degli esempi numerici.

(a) $a x^3 = 0$

(b) $a x^3 + d = 0$

(c) $a x^3 + b x^2 = 0$

(d) $a x^3 + c x = 0$

(e) $a x^3 + b x^2 + c x = 0$

Nei vari casi viene discusso se ci sono sempre soluzioni e in quale numero. Dalla discussione emerge che il numero di soluzioni è sempre compreso tra uno e tre.

4: Il caso generale

Dopo aver trattato i vari casi generali si passa a quello generale. Vengono assegnate dal docente tre equazioni di terzo grado:

(a) $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

(b) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

(c) $x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0$

Gli studenti disegnano le tre funzioni associate, ne stabiliscono il numero di radici ma mentre per i casi (a) e (b) riescono a fattorizzare i polinomi e a determinarne le soluzioni nella terza non riescono a scomporla.

Si aprono quindi una serie di quesiti: è possibile calcolare con esattezza l'unica radice dell'ultima equazione? Esiste una formula risolutiva per le equazioni di terzo grado come per quelle di secondo? Esiste una formula generale per un'equazione di grado qualsiasi?

5: La molteplicità delle soluzioni

L'insegnante chiede agli studenti di trovare esempi in cui si hanno due soluzioni: in molti notano che la curva è tangente all'asse delle ascisse.

Non tutti sono d'accordo che la curva sia tangente: è l'occasione per definire meglio, dal punto di vista grafico quale sia il significato di tangente. Il docente fa notare come l'asse di simmetria di una parabola non è tangente alla curva pur intersecandola in un solo punto.

L'insegnante chiede poi di risolvere mediante fattorizzazione alcune equazioni che presentano due soluzioni coincidenti: è il momento di introdurre il concetto di molteplicità delle soluzioni.

È a questo punto che diremo che il numero di soluzioni reali dell'equazione di terzo grado è pari a uno oppure a tre.

6: Come si costruisce un'equazione?

L'insegnante chiede agli studenti di trovare esempi di equazioni di terzo grado che hanno soluzioni assegnate.

Alcuni studenti riescono a intuire come fare scrivendola in fattori. E un paio a scriverla, nel caso di un'unica soluzione reale, come il prodotto di un binomio di primo grado per un polinomio irriducibile di secondo grado.

7: Le funzioni polinomiali di grado superiore e il teorema fondamentale dell'algebra

Viene assegnato agli studenti di verificare con Desmos il numero di intersezioni di un polinomio di grado superiore al terzo con l'asse delle ascisse.

Dall'esame dei grafici si comincia a intuire che se un polinomio ammette degli zeri è in numero sempre inferiore o uguale al grado massimo dei suoi termini e in particolare il numero delle radici di un'equazione di grado n è sempre dispari se n è dispari, pari se n è pari.

8: Dal grafico alla disequazione

Per i vari casi precedenti viene poi studiato il segno della funzione e di conseguenza gli intervalli in cui è vera la disequazione associata.

- (a) $a x^3 > 0$
- (b) $a x^3 + d > 0$
- (c) $a x^3 + b x^2 > 0$
- (d) $a x^3 + c x > 0$
- (e) $a x^3 + b x^2 + c x > 0$

Si confrontano le soluzioni per una serie di disequazioni prima svolte per via grafica utilizzando Desmos o GeoGebra, poi per via algebrica.

Il rassicurante studio del segno

Nonostante il metodo della parabola per risolvere le disequazioni di secondo grado sia stato introdotto l'anno precedente per molti ragazzi rimane ancora adesso più rassicurante utilizzare lo studio del segno piuttosto che ragionare sulle radici dell'equazione associata scegliendo semplicemente tra valori interni o esterni alle radici.

Esempio di verifica

1. Stabilisci per le seguenti equazioni il numero di radici usando il grafico della funzione cubica associata e, se possibile calcolane il valore per via algebrica.

(a) $x^3 - x^2 + 2x - 2 = 0$

(b) $x^3 - 2x^2 + x = 0$

(c) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$

(d) $x^3 - 3x^2 = 0$

2. Stabilisci per le seguenti disequazioni gli intervalli in cui sono soddisfatte usando il grafico della funzione cubica associata e, se possibile calcolane il valore per via algebrica.

(a) $x^3 - 1 > 0$

(b) $x^3 - x^2 - 2x > 0$

(c) $x^3 + 2x + 1 < 0$

(d) $x^3 - x^2 > 0$

3. Inventa delle equazioni polinomiali di terzo grado a coefficienti interi che abbiano le seguenti soluzioni:

(a) $x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -2$

(b) $x_{1,2,3} = -1$

(c) $x_1 = -1$

(d) $x_1 = 0; x_{2,3} = 1$

4. Inventa delle disequazioni polinomiali di terzo grado a coefficienti interi che abbiano le seguenti soluzioni:

(a) $x > 2$

(b) $x < -1$ e $0 < x < 2$

(c) $x < 1$ e $x \neq 0$

Valutazione dell'efficacia del percorso didattico

- Al termine del percorso, sicuramente positivo, gli studenti hanno acquisito dimestichezza con le equazioni e le disequazioni polinomiali e hanno quasi tutti abbandonato lo studio del segno nelle disequazioni di secondo grado riuscendo a stabilire subito se la soluzione è per valori interni o esterni alle radici dell'equazione associata.
- Sono riusciti a rafforzare la capacità di estrarre informazioni dal grafico circa la funzione e in particolare gli intervalli in cui essa è positiva o negativa e quelli in cui crescono o decrescono.
- Hanno fatto esperienza su come si possa dire se un'equazione polinomiale ammetta o meno radici e, in caso affermativo, il loro numero pur non conoscendone il valore esatto.
- Permane purtroppo, per qualche studente più fragile, una scorrelazione tra soluzione algebrica e soluzione grafica: pur in presenza di contraddizione tra le due continuano a fidarsi di quella algebrica.