REGIONE TOSCANA

Laboratori del Sapere Scientifico

Iniziativa realizzata con il contributo della Regione Toscana nell'ambito del progetto

Rete Scuole LSS

a.s. 2018/2019

Liceo Statale “C. Lorenzini”
Classico, Linguistico, Scientifico, Scienze Umane
Pescia (PT)

In quanti (e quali) modi?

Costruire il calcolo combinatorio e le sue applicazioni nei contesti di probabilità

Classe prima Liceo

indirizzo Scientifico Ordinario

collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale 1

Abbiamo scelto di introdurre la matematica degli eventi casuali e i primi elementi di calcolo combinatorio nella prima classe del Liceo, indirizzo Scientifico Ordinario, per tre motivazioni didattiche.

1. Sia l'approccio alla probabilità che quello al calcolo combinatorio richiedono modelli di ragionamento logico, specifici, diversi da quelli più usualmente impiegati nel calcolo algebrico o nei contesti della geometria. Avendo constatato nel corso degli anni la difficoltà da parte degli studenti di acquisire con disinvoltura questi meccanismi logici e i modelli di ragionamento da applicare nelle situazioni problematiche se collocati, indicativamente, al quarto anno del liceo, abbiamo voluto sperimentare l'introduzione precoce di questi concetti e della matematica connessa per verificare se l'apprendimento da parte degli studenti fosse più spontaneo ed efficace. Ci ripromettiamo comunque di mantenere negli anni successivi un filo di collegamento concettuale ed operativo, sia con la probabilità sia con il calcolo combinatorio, anche con specifici approfondimenti da proporre in modo costruttivo alla classe.

collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale 2

In definitiva vorremmo che questa importante area concettuale, logica ed operativa rimanesse presente nel percorso di studio invece di essere, come spesso ci appare, trattata come un argomento da aprire e chiudere in una fase speciale del percorso liceale.

Come indicheremo nelle valutazioni conclusive sul percorso sperimentato, l'atteggiamento degli studenti, la loro partecipazione allo sviluppo delle conoscenze e del linguaggio via via elaborato, la qualità media degli apprendimenti ci ha confortato in questa impostazione ma, ovviamente, il percorso didattico su probabilità e combinatoria non finisce qui.

collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale 3

2. Abbiamo considerato che gli argomenti probabilità e calcolo combinatorio avessero un effetto didattico "equalizzante" rispetto ai livelli di ingresso degli studenti. Si tratta infatti di contesti concettuali e problematici in gran parte, se non totalmente, nuovi per studenti del primo anno del liceo e, inoltre, chiedono competenze di calcolo matematico non particolarmente complesse.

3. Gli argomenti probabilità e calcolo combinatorio si prestano particolarmente a riprendere e approfondire i calcoli con le frazioni e a introdurre in modo legato a situazioni e rappresentazioni concrete, le operazioni con gli insiemi evitando i rischi di astrattezza, che rimane spesso tale, insiti nella trattazione ordinaria «da libro di testo».

obiettivi essenziali di apprendimento

- Conoscere e saper utilizzare elementi del calcolo combinatorio: disposizioni, permutazioni e combinazioni semplici e con ripetizione

- Saper utilizzare la funzione fattoriale

- Saper risolvere esercizi di probabilità utilizzando il calcolo combinatorio

elementi salienti dell’approccio metodologico

Si propone un percorso che permetta di consolidare le conoscenze e le competenze relative al calcolo delle probabilità e di fornire una visione più consapevole del numero di raggruppamenti che si possono creare in contesti concreti (numero di password, numero di auto immatricolabili, …).

Come già fatto per la probabilità nel percorso «Non tutto è certo!» anche il calcolo combinatorio viene anticipato alla classe prima.

Gli elementi sono:

- calcolare il numero di disposizioni, permutazioni e combinazioni in contesti progressivamente più complessi
- stimolare gli studenti ad analizzare e discutere criticamente le situazioni proposte scegliendo le strategie anche grafiche più convenienti nei vari casi
- interpretare consapevolmente i vari contesti considerandoli come modelli di situazioni concrete, in modo da condurre gradualmente gli studenti a dedurre le relazioni generali del calcolo combinatorio

Particolare attenzione è stata data alla gradualità degli argomenti introdotti e alla costante verifica della loro acquisizione da parte degli studenti. Anche il lavoro di gruppo ha dato un importante contributo alle loro capacità di cooperazione.

materiali, apparecchi e strumenti utilizzati

- M. Bergamini, G. Barozzi, A Trifone "*MATEMATICA.BLU*" Vol. 4 ed. Zanichelli
- G. Prodi, A. T. Sainati "*Scoprire la MATEMATICA – Probabilità e statistica*" ed. Ghisetti e Corvi
- D. Palladino, S. Scotto, M. Frixione "*PIGRECO - Statistica, probabilità e logica*" ed. Principato
- Dadi e altro materiale utile per un approccio empirico al calcolo delle probabilità
- Computer e LIM per l'utilizzo di software e connessione internet

ambienti di lavoro in cui è stato sviluppato il percorso

- Laboratorio multimediale
- Aula scolastica
- A casa

tempi impiegati

- Per la messa a punto preliminare nel Gruppo LSS: 10 ore
- Per la progettazione specifica e dettagliata nella classe e la documentazione: circa 10 ore
- Tempo-scuola di sviluppo del percorso: 15 ore, comprensive delle verifiche

altre informazioni

- Il percorso proposto ha permesso di:
  - economizzare i tempi di lavoro anticipando alla classe prima lo studio del calcolo combinatorio
  - utilizzare gli strumenti del calcolo combinatorio per completare il percorso relativo al calcolo delle probabilità «Non tutto è certo!»

- Sono state evidenziate in rosso le parti che sintetizzano i contenuti degli interventi degli studenti

- Di seguito vengono indicati gli argomenti affrontati in classe, che rappresentano la parte conclusiva del percorso del calcolo delle probabilità «Non tutto è certo!»

descrizione sintetica dell’attività

- Il “percorso” ha occupato circa 15 ore ed è stato proposto con un approccio che coinvolgesse direttamente gli studenti e che stimolasse continuamente un’analisi critica dei problemi affrontati

- Dopo un’introduzione generale al calcolo combinatorio sono state analizzate situazioni che potevano essere risolte con disposizioni, permutazioni e combinazioni sia semplici che con ripetizione

- Il calcolo combinatorio ha permesso di risolvere esercizi di calcolo della probabilità più complessi anche esaminando il caso delle prove ripetute

- Si precisa che, nonostante il calcolo combinatorio e delle probabilità sia stato affrontato in una classe prima, è stato comunque completato l’intero programma, che di solito è previsto per la classe quarta del liceo scientifico.

argomenti proposti e discussi in classe:
disposizioni semplici

Nella lezione introduttiva gli studenti sono stati invitati a riflettere:

- su quanti siano i modi in cui un certo numero *n* di elementi possa essere disposto a gruppi di k e
- sul fatto che, nelle situazioni presentate, gruppi che contengono gli stessi elementi, ma in ordine diverso, sono considerati distinti.

- Per cercare di fornire una risposta al problema è stato loro chiesto:
  - *In una classe, 5 alunni non hanno ancora il voto in Italiano e in Inglese. Oggi sarà interrogato un alunno in italiano e un altro in inglese, in quanti modi può essere scelta la coppia se un alunno non può essere interrogato a entrambe le materie?*

  Più in generale
  - *se si hanno 4 elementi e dobbiamo sceglierne 2, in quanti modi possono essere formate le coppie?*
  - *se si hanno 5 elementi e dobbiamo sceglierne 3, in quanti modi possono essere formate le terne?*

  E infine
  - *se si hanno n elementi e dobbiamo sceglierne k, in quanti modi possono essere formati i gruppi?*

argomenti proposti e discussi in classe:

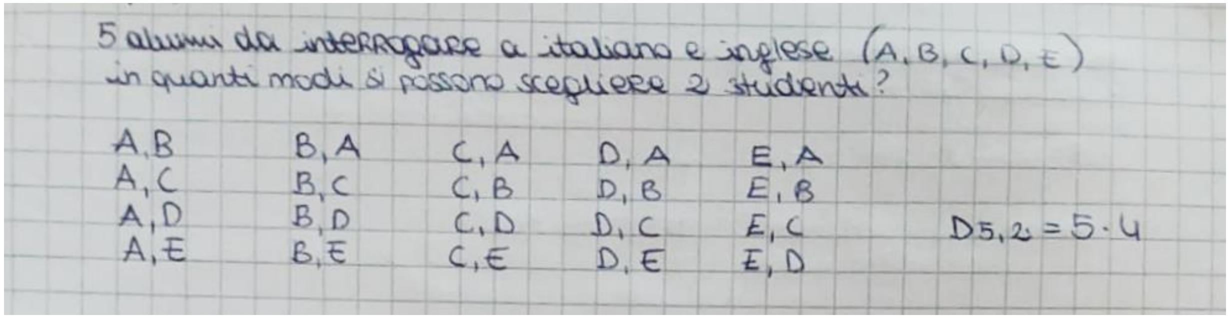
disposizioni semplici - esercizio 1

Nel seguito vengono presentati documenti relativi a questa fase di lavoro condotta in modo da verificare passo dopo passo l'acquisizione da parte degli studenti dei concetti e delle operazioni connesse.

Gli studenti hanno risolto gli esercizi proposti:

In una classe, 5 alunni non hanno ancora il voto in Italiano e in Inglese. Oggi sarà interrogato un alunno in italiano e un altro in inglese, in quanti modi può essere scelta la coppia se un alunno non può essere interrogato a entrambe le materie?

Invitati a motivare la risposta hanno spiegato che «siccome la coppia AB, ad esempio, è diversa dalla coppia BA, il numero di coppie cercato si ottiene moltiplicando i 5 modi in cui posso scegliere il primo alunno per i 4 modi in cui posso scegliere il secondo alunno tra i rimanenti».



5 alunni da interrogare a italiano e inglese (A, B, C, D, E)
in quanti modi si possono scegliere 2 studenti?

A, B	B, A	C, A	D, A	E, A
A, C	B, C	C, B	D, B	E, B
A, D	B, D	C, D	D, C	E, C
A, E	B, E	C, E	D, E	E, D

$D_{5,2} = 5 \cdot 4$

argomenti proposti e discussi in classe:

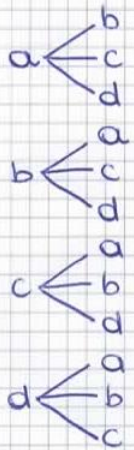
disposizioni semplici - esercizio 2

Se si hanno 4 elementi e dobbiamo sceglierne 2, in quanti modi possono essere formate le coppie?

$\{a; b; c; d\}$ $n=4$ $k=2$

a b	b a	c a	d a
a c	b c	c b	d b
a d	b d	c d	d c

12 gruppi



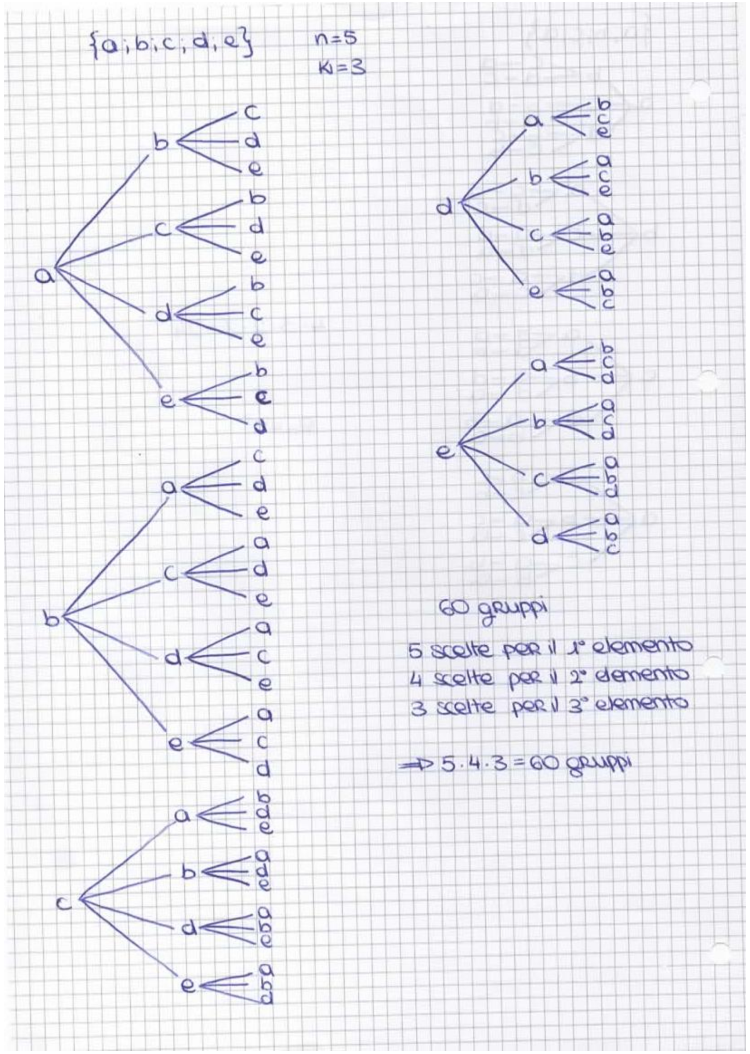
12 gruppi

4 scelte per il 1° elemento
3 scelte per il 2° elemento

$\Rightarrow 4 \cdot 3 = 12$ gruppi

argomenti proposti e discussi in classe:
disposizioni semplici - esercizio 3

Se si hanno 5 elementi e dobbiamo sceglierne 3, in quanti modi possono essere formate le terne?



argomenti proposti e discussi in classe:

disposizioni semplici - definizione

… e infine, generalizzando, con *n* elementi a gruppi di *k*:

gli studenti, guidati dall'insegnante, hanno concluso che dovevano essere moltiplicati tra loro *k* fattori, l'ultimo dei quali era (n-k+1), per cui

$$D_{m,k} = \underbrace{m(m-1)\ldots(m-k+1)}_{k \text{ fattori}}$$

cioè la relazione che fornisce le

disposizioni semplici di *n* elementi a gruppi di *k*

con *k* compreso tra 0 (escluso) e *n* (incluso).

argomenti proposti e discussi in classe:
permutazioni semplici

È stata poi posta la seguente domanda: «E se utilizzassimo tutti gli *n* elementi a disposizione?»

- Per cercare di fornire una risposta al problema è stato loro chiesto:
  - *Quanti numeri di due cifre distinte possono essere formati con le cifre 1 e 5?*
  - *Quanti numeri di tre cifre distinte possono essere formati con le cifre 1, 2 e 3?*

  Più in generale:
  - *se si hanno 3 elementi, in quanti modi possono essere ordinati?*
  - *E se si hanno 4 elementi, in quanti modi possono essere ordinati?*

  E infine
  - *Se si hanno n elementi, in quanti modi possono essere ordinati?*

Nel seguito vengono presentati documenti relativi a questa fase di lavoro condotta in modo da verificare passo dopo passo l'acquisizione da parte degli studenti dei concetti e delle operazioni connesse.

argomenti proposti e discussi in classe:

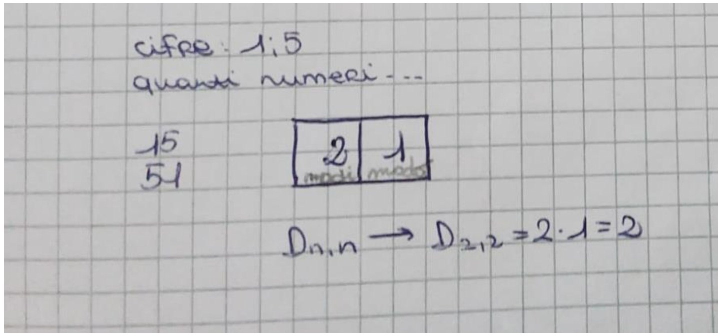
permutazioni semplici – esercizio 1

Gli studenti hanno risolto gli esercizi proposti …

Quanti numeri di due cifre distinte possono essere formati con le cifre 1 e 5?

… motivando così la risposta:

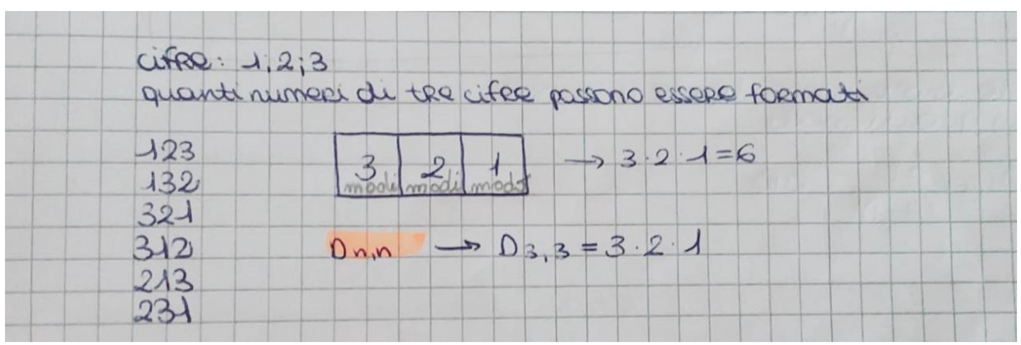
«ci sono due modi per scegliere il primo numero e rimane solo un modo per scegliere il secondo quindi 2·1 = 2».



argomenti proposti e discussi in classe:
permutazioni semplici – esercizio 2

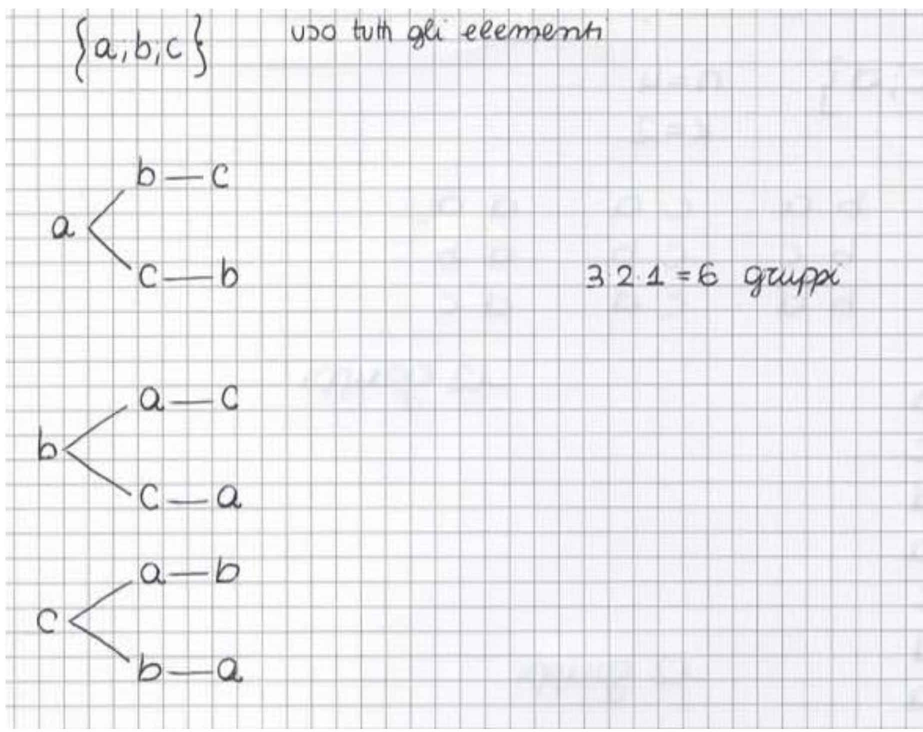
Quanti numeri di tre cifre distinte possono essere formati con le cifre 1, 2 e 3?

«ci sono tre modi per scegliere il primo numero, due modi per scegliere il secondo e un solo modo per scegliere il terzo, quindi $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$».



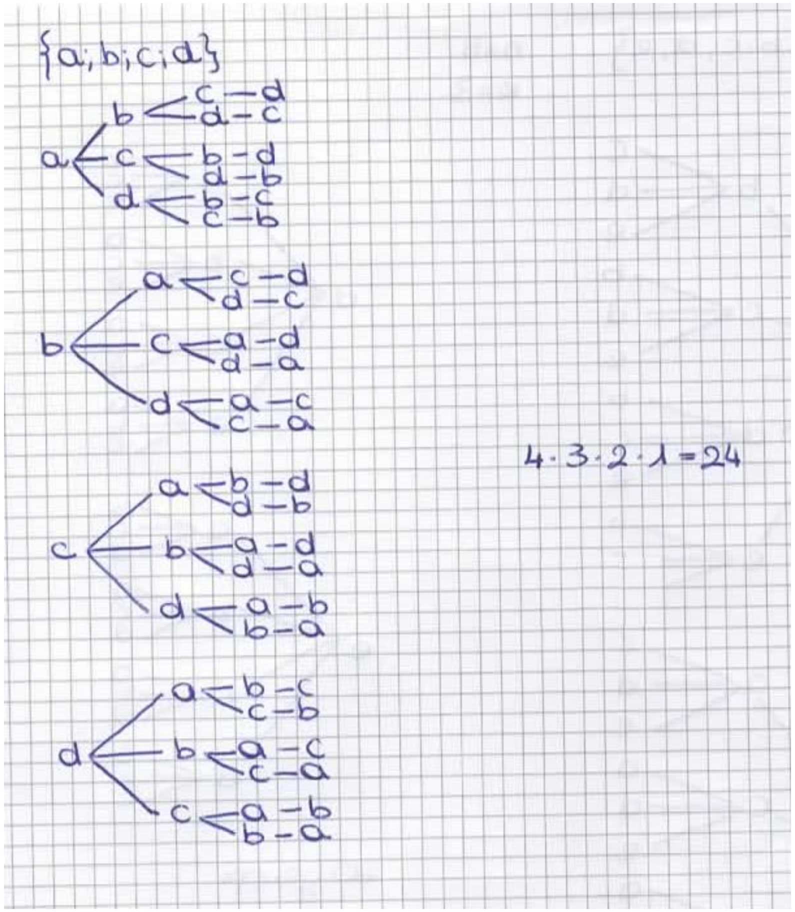
argomenti proposti e discussi in classe:
permutazioni semplici – esercizio 3

Se si hanno 3 elementi, in quanti modi possono essere ordinati?



argomenti proposti e discussi in classe:
permutazioni semplici – esercizio 4

Se si hanno 4 elementi, in quanti modi possono essere ordinati?



argomenti proposti e discussi in classe:

permutazioni semplici – definizione

… e infine, generalizzando, con *n* elementi:

$$D_{n,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = P_n$$

dove le disposizioni $D_{n,n}$ di *n* elementi a gruppi di *n* si chiamano permutazioni e sono indicate con P_n.

È stata poi definita la funzione fattoriale:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

e la relazione delle

permutazioni semplici di *n* elementi

con *n* maggiore o uguale a 2,

può essere scritta:

$$P_n = n!$$

argomenti proposti e discussi in classe

Anche la relazione delle disposizioni semplici:

$$D_{n,k} = n(n-1)\dots(n-k+1)$$

può essere riscritta utilizzando il fattoriale:

$D_{n,k} =$ n numero tabole $= n(n-1)\dots(n-k+1)$

k numero di oggetti...

$$\boxed{D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}\,(n-k)!}{(n-k)!}$$

argomenti proposti e discussi in classe:
combinazioni semplici

A questo punto è stato chiesto agli studenti:

Dubbio …

Gruppi che contengono gli stessi elementi permutati sono davvero diversi in ogni contesto?

- Per cercare di fornire una risposta al problema, sono state loro proposte diverse situazioni nelle quali dovevano stabilire se l'ordine degli elementi facesse davvero la differenza oppure no e pertanto è stato chiesto:
  - *Se da un mazzo di 40 carte se ne estraggono tre, l'ordine con cui le carte si presentano fa la differenza nei tris ottenuti?*
  - *Se nella vostra classe di 17 studenti devono essere eletti i due rappresentanti, l'ordine con cui vengono scelti fa la differenza? E se uno di loro dovesse ricoprire il ruolo di presidente e l'altro di segretario?*

argomenti proposti e discussi in classe:

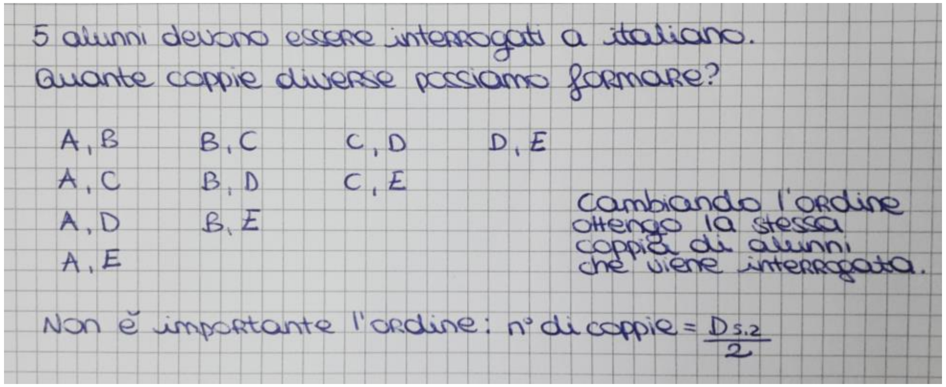
combinazioni semplici – esercizio 1

… tornando ai 5 ragazzi che devono essere interrogati …

Se 2 studenti devono essere interrogati a una sola materia, quante coppie diverse possiamo formare?

… gli studenti hanno risposto che

« adesso l'ordine non fa più la differenza, nel risultato ottenuto con le disposizioni ogni coppia viene contata due volte, quindi il risultato va diviso per 2»:



5 alunni devono essere interrogati a italiano.
Quante coppie diverse possiamo formare?

A, B	B, C	C, D	D, E
A, C	B, D	C, E	
A, D	B, E		
A, E			

Cambiando l'ordine ottengo la stessa coppia di alunni che viene interrogata.

Non è importante l'ordine: n° di coppie = $\frac{D_{5,2}}{2}$

argomenti proposti e discussi in classe:
combinazioni semplici – esercizio 2

… più in generale …

Quante terne posso formare con 5 elementi se non è importante l’ordine?

Dopo averne discusso, gli studenti hanno dedotto che

«nel numero di disposizioni di 5 elementi a gruppi di 3, permutando le terne che contengono gli stessi elementi si ottengono $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ gruppi equivalenti»;

il numero di terne richiesto è quindi $D_{5,3}/P_3$.

argomenti proposti e discussi in classe:
combinazioni semplici – definizione

- Generalizzando a *n* elementi a gruppi di *k*:

se non è importante l'ordine, i gruppi che si ottengono permutando tra loro i *k* elementi scelti sono tra loro equivalenti,

quindi il numero di gruppi, che differiscono per gli elementi contenuti e non per il loro ordine, si ottiene dividendo il numero di disposizioni di *n* elementi a gruppi di *k* per il numero di permutazioni dei *k* elementi:

raggruppamenti che siano considerati diversi se differiscono per almeno un elemento, ma non per l'ordine, si chiamano

combinazioni di *n* elementi a gruppi di *k*

con k compreso tra 0 (escluso) e n (incluso).

$$C_{m,K} = \frac{D_{m,K}}{P_K} = \frac{m(m-1)\ldots(m-K+1)}{K!}$$

.

argomenti proposti e discussi in classe:

permutazioni con ripetizione

A questo punto gli studenti sono stati invitati a riflettere sul fatto che talvolta in un raggruppamento gli elementi possano essere ripetuti:

- Nelle password i caratteri alfanumerici possono ripetersi
- Nelle targhe automobilistiche numeri e lettere possono ripetersi
- Nella costruzione di un numero, ad esempio a tre cifre, queste possono essere ripetute
- Negli anagrammi, le parole considerate possono contenere lettere ripetute …

… iniziando con gli anagrammi …

argomenti proposti e discussi in classe:

permutazioni con ripetizione – esercizi 1, 2

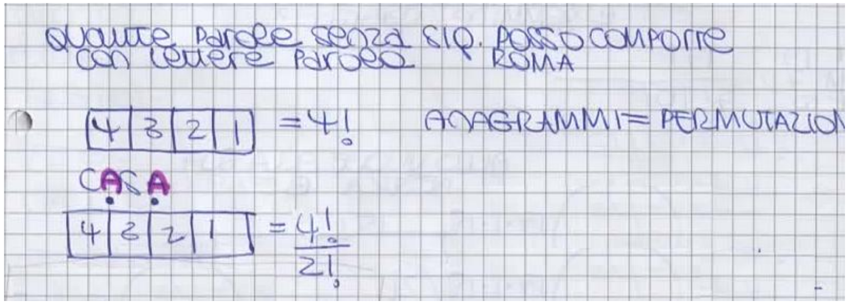
… è stato loro proposto di trovare ad esempio:

Quanti anagrammi, anche privi di significato, possono essere formati con le lettere della parola ROMA?

- Alcuni studenti hanno risposto che «permutando le quattro lettere R, O, M, A si possono trovare tutte parole cercate, cioè $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$».

E della parola CASA?

- Dopo aver scritto tutti gli anagrammi hanno notato che «il numero di parole ottenute è 12 e non 24» e che «permutando le 2 lettere uguali (A) la parola non cambia»

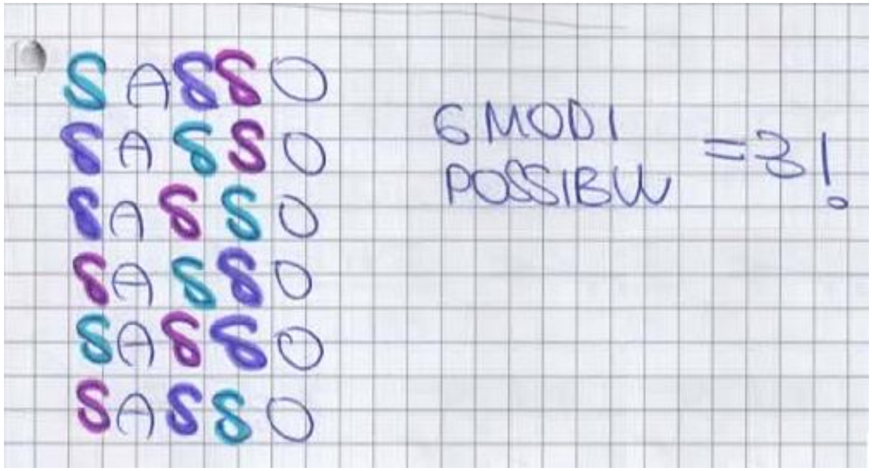


e quindi il numero di permutazioni di 4 lettere doveva essere diviso per il numero di permutazioni delle 2 lettere uguali.

argomenti proposti e discussi in classe:
permutazioni con ripetizione – esercizio 3

… ancora un esempio:

- *Se vogliamo anagrammare (anche con parole che non abbiano senso compiuto) la parola SASSO?*
  - «dobbiamo permutare 5 lettere ma la lettera S risulta ripetuta 3 volte, quindi:



una stessa parola può essere ottenuta permutando le 3 S, cioè in 3! modi diversi»;

  - «il numero di anagrammi possibili è 5!/3!».

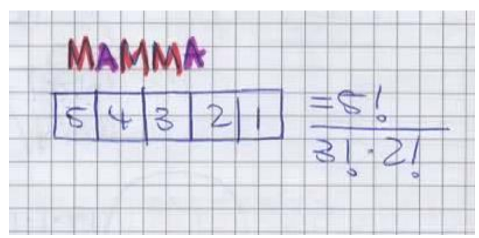
argomenti proposti e discussi in classe:
permutazioni con ripetizione – esercizio 4

Oppure:

- *Se vogliamo anagrammare (anche con parole che non abbiano senso compiuto) la parola MAMMA?*

hanno risposto che

- «si devono permutare 5 lettere ma la lettera M risulta ripetuta 3 volte e la lettera A 2 volte, quindi:

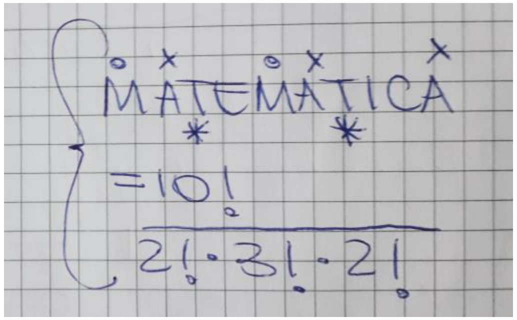


e il numero di anagrammi possibili è $5!/(3!\cdot 2!)$».

argomenti proposti e discussi in classe:
permutazioni con ripetizione – esercizio 5

… e ancora:

- *Se vogliamo anagrammare (anche con parole che non abbiano senso compiuto) la parola MATEMATICA?*
  - «dobbiamo permutare 10 lettere, ma la lettera M risulta ripetuta 2 volte, la lettera A 3 volte e la lettera T 2 volte; quindi



e il numero di anagrammi possibili è $10!/(2!\cdot3!\cdot2!)$».

argomenti proposti e discussi in classe:
permutazioni con ripetizione – definizione

… e infine, generalizzando:

- le permutazioni di *n* elementi di cui il primo ripetuto *h* volte, il secondo ripetuto *k* volte, … si ottengono con

$$P_n^{(h,k,\ldots)} = \frac{n!}{h!\cdot k!\cdot \ldots}$$

e si chiamano

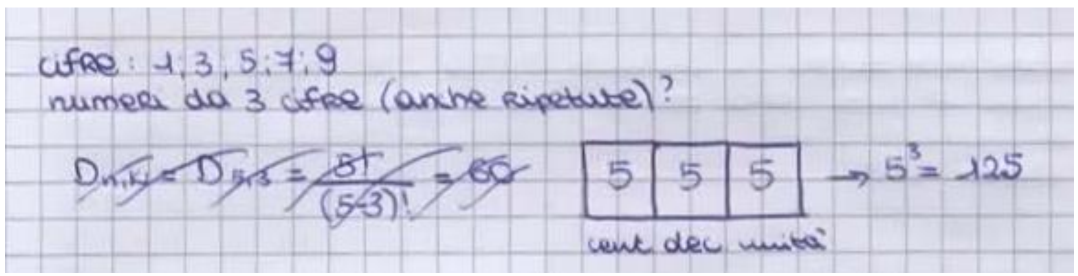
permutazioni con ripetizione

dove la somma *h* + *k* + … deve essere minore o uguale a *n*.

argomenti proposti e discussi in classe:
disposizioni con ripetizione – esercizi 1, 2

E se fossero disposizioni in cui gli elementi si possono ripetere?

Quanti numeri di tre cifre anche ripetute posso comporre utilizzando solo le 5 cifre dispari?

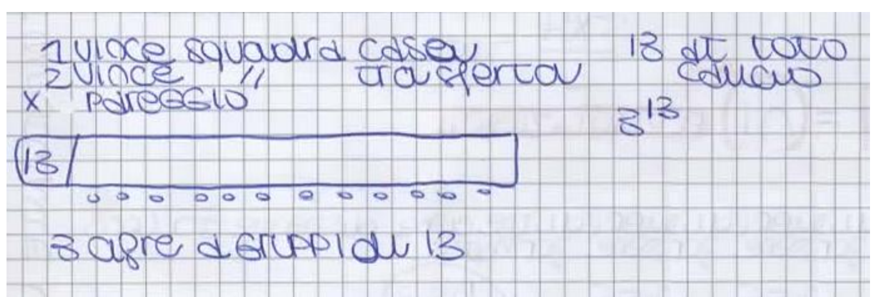


cifre: 1; 3, 5; 7; 9
numeri da 3 cifre (anche ripetute)?

$\cancel{D_{n,k} = D_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!} = 60}$ $\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5} \rightarrow 5^3 = 125$

cent dec unità

Quante possibili schedine possono essere giocate al totocalcio?



1 vince squadra casa
2 vince " trasferta
X pareggio

13 di toto calcio

3^{13}

13

3 cifre di gruppi di 13

argomenti proposti e discussi in classe:
disposizioni con ripetizione – definizione

… e infine, generalizzando:

- le disposizioni di *n* elementi, anche ripetuti, a gruppi di *k* si ottengono con

$$D^{r}_{n.k} = n^{k}$$

e si chiamano

disposizioni con ripetizione

con k numero naturale qualunque non nullo.

argomenti proposti e discussi in classe:
combinazioni con ripetizione – esercizio 1

E se nel disporre *n* elementi a gruppi di *k*, anche con ripetizione, non fosse importante l'ordine? Per esempio:

In quanti modi diversi possiamo distribuire 6 oggetti in 4 scatole?

Indicando con A, B, C, D le 4 scatole, guidati dall'insegnante gli studenti hanno scritto alcune possibili distribuzioni:

AABBBBCD,   BBBBBB,   ACCCDD, …

dove nella prima distribuzione 2 oggetti sono nella scatola A, 4 nella B, 1 nella C e 1 nella D; nella seconda distribuzione tutti gli oggetti sono nella scatola B e le altre rimangono vuote; … .

L'insegnante ha guidato una discussione, partecipata dagli allievi, sul fatto che se le 4 scatole vengono viste come un unico contenitore che può essere suddiviso in 4 scomparti utilizzando tre (cioè 4-1) separatori, il numero totale di distribuzioni può essere ottenuto dalle combinazioni di [6 oggetti + (4-1) separatori] a gruppi di 6, cioè:

$$C^{r}_{6.4} = C_{6+4-1,6} = \frac{(6+4-1)!}{(9-6)!\cdot 6!} = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 84 \cdot$$

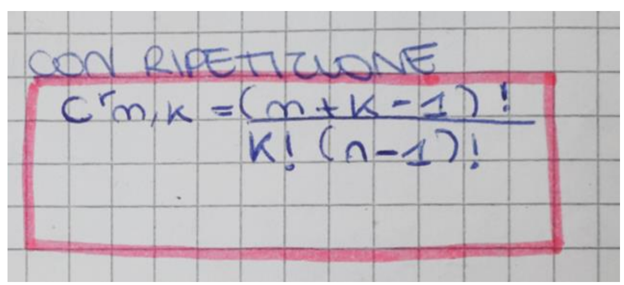
argomenti proposti e discussi in classe:
combinazioni con ripetizione – definizione

Di tutte le situazioni proposte questa è quella che ha creato maggiori difficoltà agli studenti, è stato pertanto necessario farli esercitare con ulteriori esempi per poter giungere alla generalizzazione:

- le combinazioni di *n* elementi, anche ripetuti, a gruppi di *k* si ottengono con

$$C^r_{n,k} = C_{n+k-1,k} = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}{k!}$$

che, utilizzando le proprietà del fattoriale, diventa:



e si chiamano

combinazioni con ripetizione

con k numero naturale qualunque non nullo.

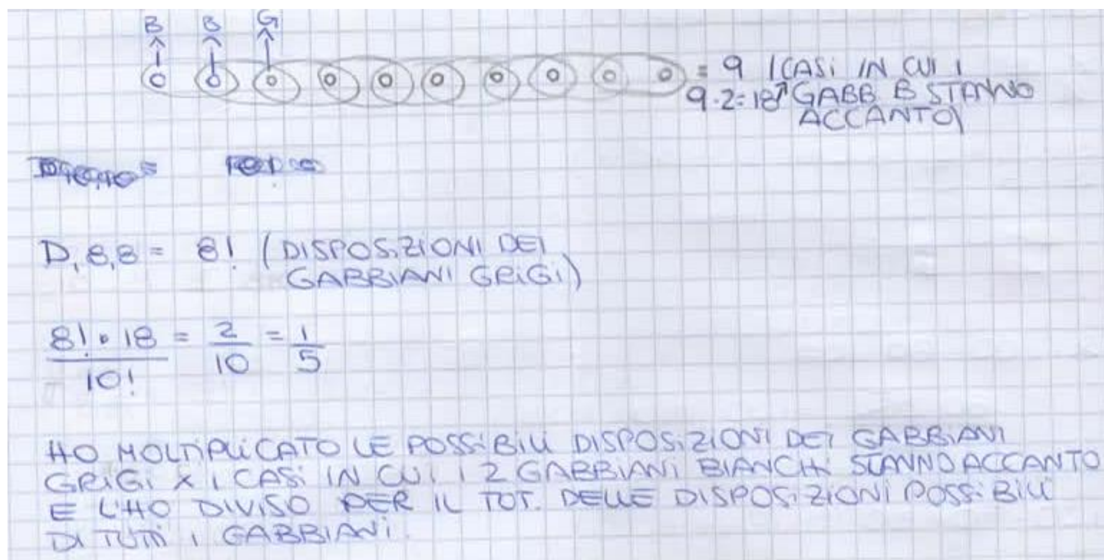
argomenti proposti e discussi in classe:
calcolo combinatorio applicato alla probabilità – esercizio 1

Gli studenti sono stati poi invitati a riflettere sul fatto che il calcolo combinatorio può essere utilizzato per risolvere esercizi di probabilità proponendo il seguente esercizio:

Due gabbiani bianchi e otto gabbiani grigi volano su un fiume. All'improvviso atterrano su una delle sponde, disponendosi in linea retta in ordine casuale.

Qual è la probabilità che i due gabbiani bianchi si trovino uno accanto all'altro?

A) Soluzione con il calcolo combinatorio



B B G

= 9 (CASI IN CUI I GABB B STANNO ACCANTO)

9 · 2 = 18

$D_{8,8} = 8!$ (DISPOSIZIONI DEI GABBIANI GRIGI)

$\frac{8! \cdot 18}{10!} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

HO MOLTIPLICATO LE POSSIBILI DISPOSIZIONI DEI GABBIANI GRIGI X I CASI IN CUI I 2 GABBIANI BIANCHI STANNO ACCANTO E L'HO DIVISO PER IL TOT. DELLE DISPOSIZIONI POSSIBILI DI TUTTI I GABBIANI

argomenti proposti e discussi in classe:
calcolo combinatorio applicato alla probabilità – esercizio 1

B) Soluzione senza il calcolo combinatorio

2 Gabb bianchi
8 Gabb grigi

$$\frac{8}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

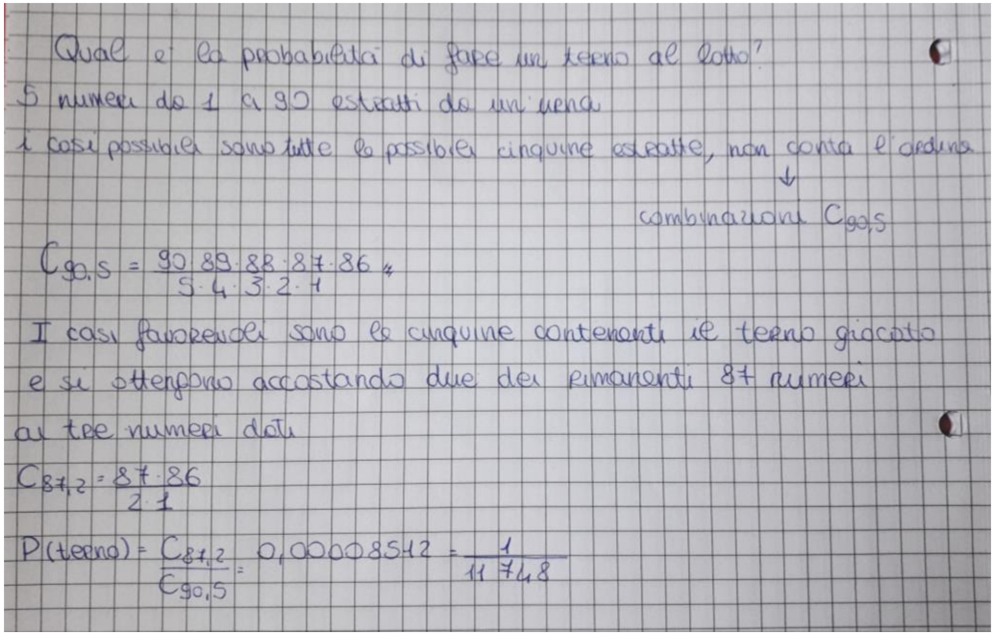
perché, in linea retta, un gabbiano bianco può sedersi in 8 posti qualsiasi esclusi il primo e l'ultimo dove avrà altri due gabbiani accanto, quindi la probabilità che l'altro bianco sia accanto è di 2 su i nove posti rimasti OPPURE si mette al primo o all'ultimo posto dove ha solo un gabbiano accanto quindi l'altro bianco ha una possibilità sui 9 posti rimasti di mettersi accanto.

argomenti proposti e discussi in classe:

calcolo combinatorio applicato alla probabilità – esercizio 2

Il calcolo combinatorio risulta particolarmente utile quando il numero di elementi è piuttosto alto. Per esempio …

Qual è la probabilità di fare un terno al lotto?



Qual è la probabilità di fare un terno al lotto?

5 numeri da 1 a 90 estratti da un'urna

i casi possibili sono tutte le possibili cinquine estratte, non conta l'ordine

↓

combinazioni $C_{90,5}$

$$C_{90,5} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

I casi favorevoli sono le cinquine contenenti il terno giocato e si ottengono accostando due dei rimanenti 87 numeri ai tre numeri dati

$$C_{87,2} = \frac{87 \cdot 86}{2 \cdot 1}$$

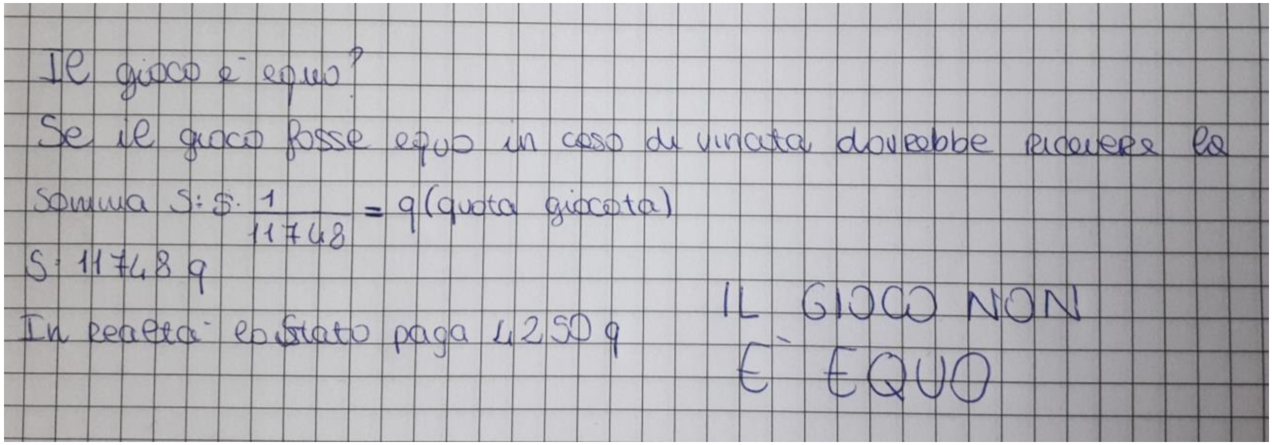
$$P(\text{terno}) = \frac{C_{87,2}}{C_{90,5}} = 0{,}00008512 = \frac{1}{11748}$$

Si è fatto osservare che tale probabilità risulta bassissima; ciò ha permesso di riprendere e ampliare la riflessione sui giochi equi già affrontata nel percorso sulla probabilità « Non tutto è certo!».

argomenti proposti e discussi in classe:
calcolo combinatorio applicato alla probabilità – esercizio 3

Il gioco del Lotto è equo?
Per esempio:

Quale somma S dovrebbe ricevere chi fa terno, se ha puntato una somma q?



Il gioco è equo?
Se il gioco fosse equo in caso di vincita dovrebbe ricevere la somma S: $S \cdot \frac{1}{11748} = q$ (quota giocata)
$S = 11748\, q$
In realtà lo Stato paga $4250\, q$

IL GIOCO NON È EQUO

Quindi chi conosce la matematica non gioca al Lotto … !

argomenti proposti e discussi in classe:
il problema delle prove ripetute – esercizio 1

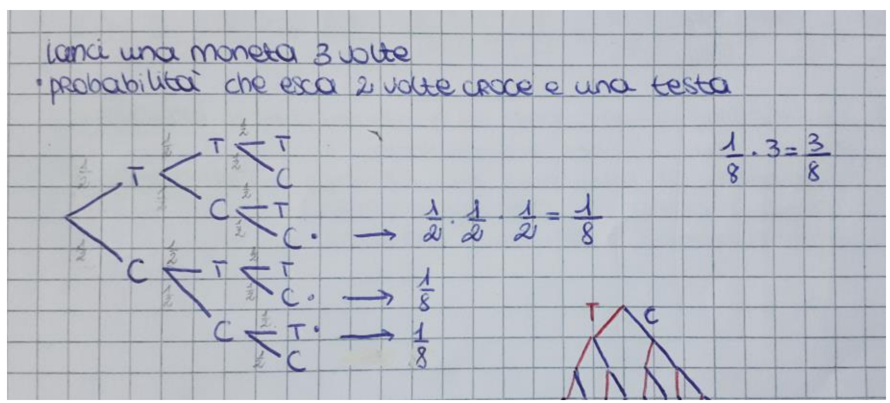
E se ripetiamo un certo numero *n* di volte un dato esperimento, qual è la probabilità che un evento fissato si verifichi *k* volte?

Per esempio …

Lanciando 3 volte una moneta, qual è la probabilità di ottenere 2 volte croce?

Per risolvere il problema,

- alcuni studenti hanno utilizzato il grafo ad albero: «ogni terna ha una probabilità di verificarsi di $(1/2)^3 = 1/8$; i casi favorevoli sono 3: CCT, CTC e TCC; quindi la probabilità P(2C,1T) è $3\cdot(1/2)^3$».



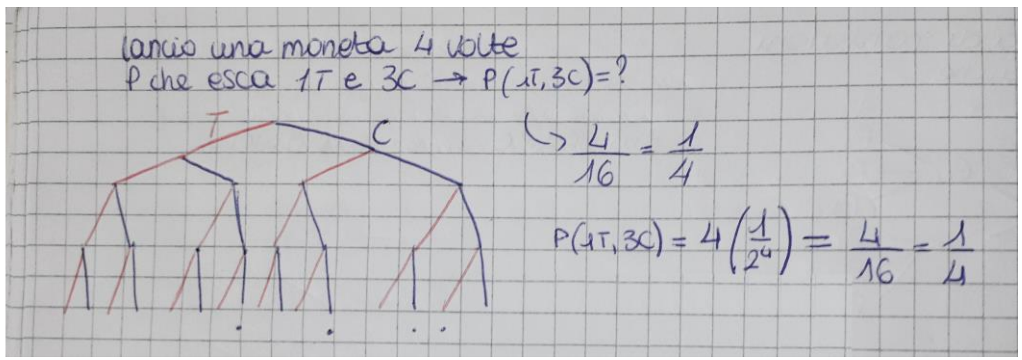
- altri hanno risposto: «per ogni lancio ho due possibilità, T o C, quindi ci sono 2^3 casi possibili; i casi favorevoli sono 3: CCT, CTC e TCC; quindi la probabilità P(2C,1T) è 3/8».

argomenti proposti e discussi in classe:

il problema delle prove ripetute – esercizio 2

… oppure …

Lanciando 4 volte una moneta, qual è la probabilità di ottenere 3 volte croce?



Gli studenti hanno risolto in diversi modi:

- «utilizzando il grafo ad albero si ottengono 4 casi favorevoli e 16 casi possibili, quindi la probabilità P(3C,1T) è 4/16»;
- «ogni quaterna ha una probabilità di verificarsi di $(1/2)^4 = 1/16$; i casi favorevoli sono 4; quindi la probabilità è

$$P(3C,1T) = 4\cdot (1/2)^4 = (1/4)$$».

argomenti proposti e discussi in classe:
il problema delle prove ripetute – esercizio 3, 4

Lanciando 5 volte una moneta, qual è la probabilità di ottenere 3 volte testa?

Mentre cercavano il numero di cinquine del tipo TTCCC, uno studente ha notato che

- «il problema era analogo a quello di determinare l'anagramma della parola MAMMA, cioè le combinazioni di 5 elementi a gruppi di 3, $C_{5,3}$; la probabilità cercata era quindi:

$$P(3C,2T) = C_{5,3} \cdot (1/2)^5»$$

E nel caso del lancio di un dado?

Lanciando 5 volte un dado, qual è la probabilità di ottenere 3 volte il numero 6?

- «la probabilità che esca il 6 è $P(6)=(1/6)$, la probabilità che non esca è $1-P(6)=5/6$, il numero di cinquine corrisponde alle combinazioni di 5 elementi a gruppi di 3, $C_{5,3}$; la risposta al problema è dunque:

$$P(\text{tre volte 6 su 5 lanci}) = C_{5,3} \cdot (1/6)^3 \cdot (5/6)^2».$$

argomenti proposti e discussi in classe:
il teorema delle prove ripetute o di Bernoulli

… e infine, generalizzando:

- se un esperimento è ripetuto nelle stesse condizioni *n* volte e un evento *E* ha probabilità *p* di verificarsi e *q*=1-*p* di non verificarsi, la probabilità che l'evento *E* si verifichi *k* volte su *n* prove è:

$$P_{(k,n)} = C_{n,k} \cdot (p)^{k} \cdot (q)^{n-k}$$

noto come

teorema delle prove ripetute (o di Bernoulli).

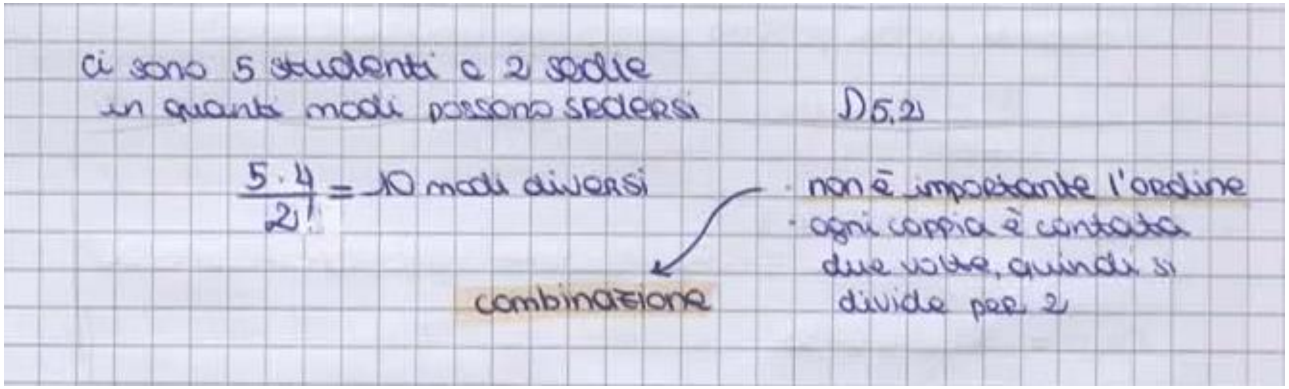
argomenti proposti

A questo punto l'insegnante ha proposto esercizi in cui gli studenti hanno consolidato le conoscenze acquisite relative ai concetti affrontati.

Nel seguito vengono presentati documenti relativi a questa fase di lavoro condotta sia con lavori individuali che di gruppo con lo scopo di controllare che almeno le competenze minime richieste fossero state acquisite dalla maggior parte degli alunni.

un esempio di svolgimento dell'esercizio n.1 eseguito in classe dagli studenti

5 studenti salgono sull'autobus, se ci sono soltanto due seggiolini liberi, in quanti modi si può scegliere una coppia di studenti da far sedere?



ci sono 5 studenti e 2 sedie
in quanti modi possono sedersi

$D_{5,2}$

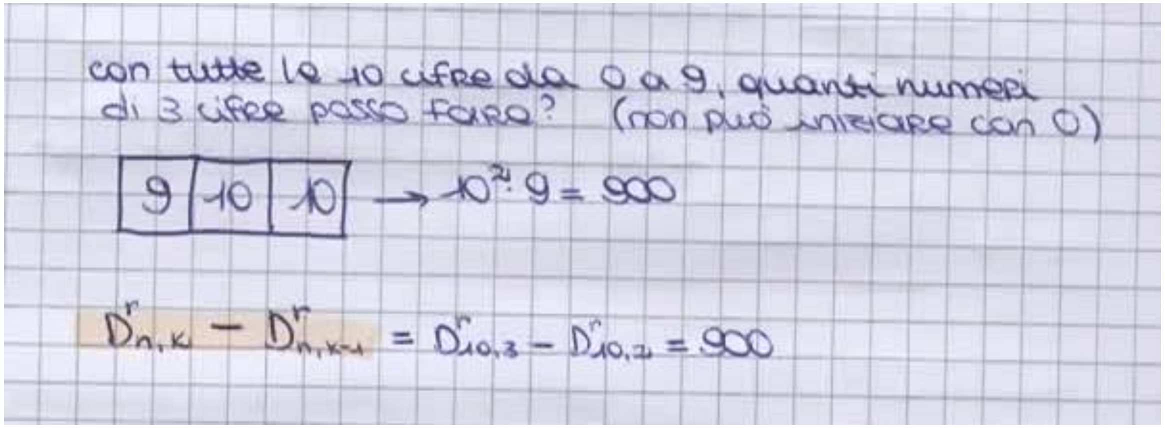
$\frac{5 \cdot 4}{2!} = 10$ modi diversi

· non è importante l'ordine
· ogni coppia è contata due volte, quindi si divide per 2

combinazione

un esempio di svolgimento dell'esercizio n.2 eseguito in classe dagli studenti

Quanti numeri di tre cifre, anche ripetute, si possono comporre con le dieci cifre 0, 1, …, 9?



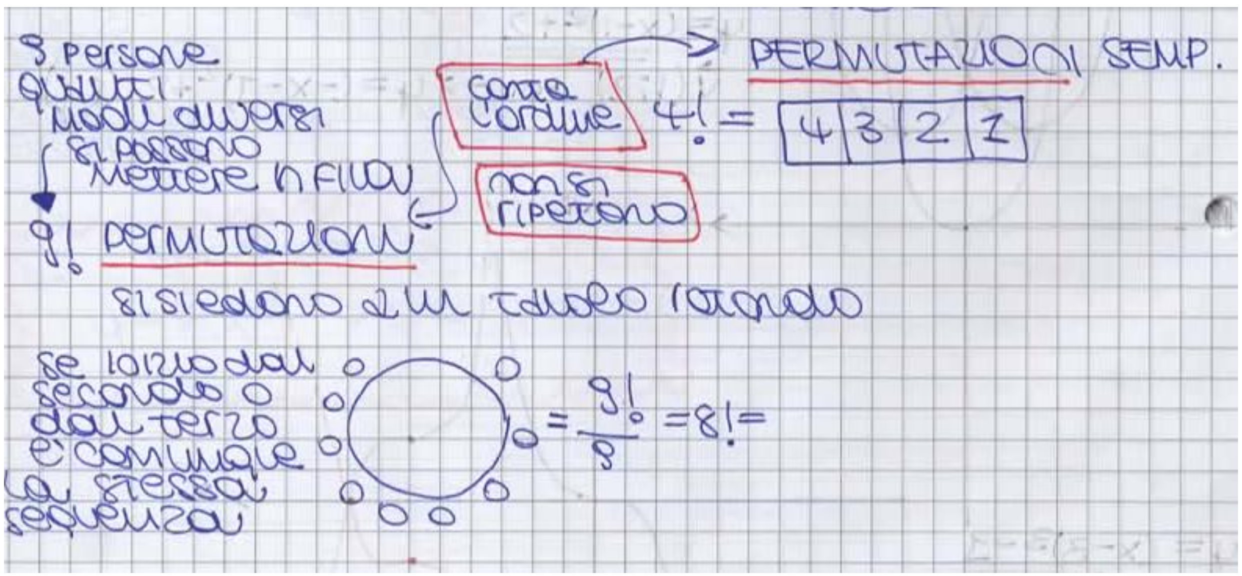
con tutte le 10 cifre da 0 a 9, quanti numeri di 3 cifre posso fare? (non può iniziare con 0)

$\boxed{9}\boxed{10}\boxed{10} \rightarrow 10^2 \cdot 9 = 900$

$D^r_{n,k} - D^r_{n,k-1} = D^r_{10,3} - D^r_{10,2} = 900$

un esempio di svolgimento dell’esercizio n.3 eseguito in classe dagli studenti

In quanti modi diversi 9 persone possono sedersi su 9 sedie allineate?
E attorno a un tavolo rotondo?



un esempio di svolgimento dell’esercizio n.4 eseguito in classe dagli studenti

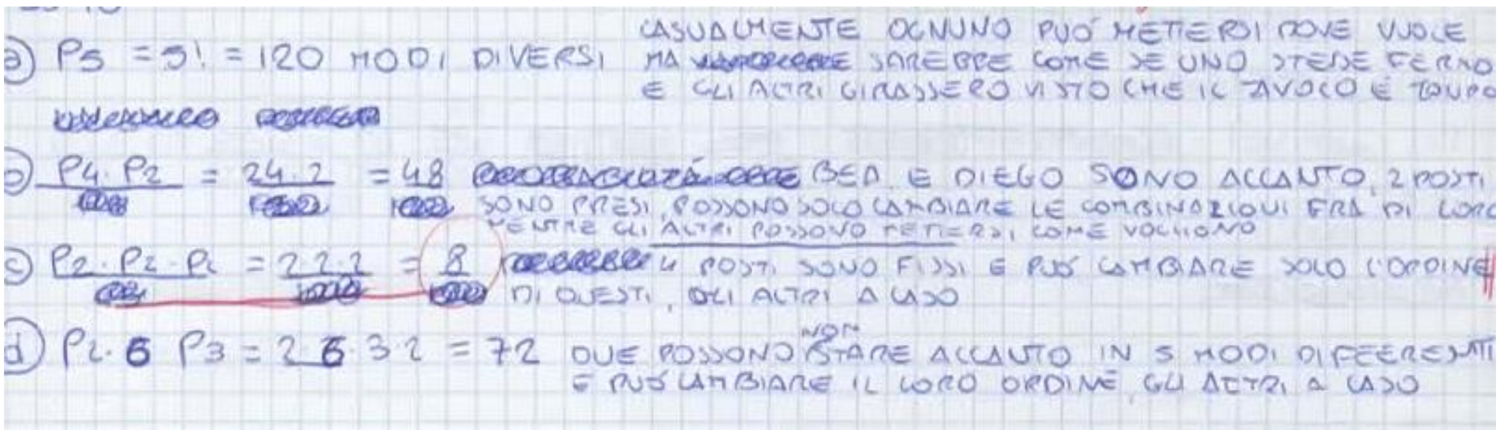
Angela, Beatrice, Carlo, Diego, Elena e Fabrizio siedono a un tavolo circolare di un ristorante per la cena. Calcola il numero di modi distinti in cui i sei amici possono sedersi al tavolo:

a) se si siedono casualmente,

b) se Beatrice e Diego vogliono stare vicini,

c) se non solo Beatrice e Diego ma anche Angela e Carlo vogliono stare vicini,

d) se Carlo e Elena non vogliono stare vicini.



a) $P_5 = 5! = 120$ MODI DIVERSI — CASUALMENTE OGNUNO PUÓ METTERSI DOVE VUOLE MA SAREBBE COME SE UNO STESSE FERMO E GLI ALTRI GIRASSERO VISTO CHE IL TAVOLO É TONDO

b) $P_4 \cdot P_2 = 24 \cdot 2 = 48$ — BEA E DIEGO SONO ACCANTO, 2 POSTI SONO PRESI, POSSONO SOLO CAMBIARE LE COMBINAZIONI FRA DI LORO MENTRE GLI ALTRI POSSONO METTERSI COME VOGLIONO

c) $P_2 \cdot P_2 \cdot P_2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ — 4 POSTI SONO FISSI E PUÓ CAMBIARE SOLO L'ORDINE DI QUESTI, GLI ALTRI A CASO

d) $P_2 \cdot 6\, P_3 = 2 \cdot 6 \cdot 3! = 72$ — DUE NON POSSONO STARE ACCANTO IN 5 MODI DIFFERENTI E PUÓ CAMBIARE IL LORO ORDINE, GLI ALTRI A CASO

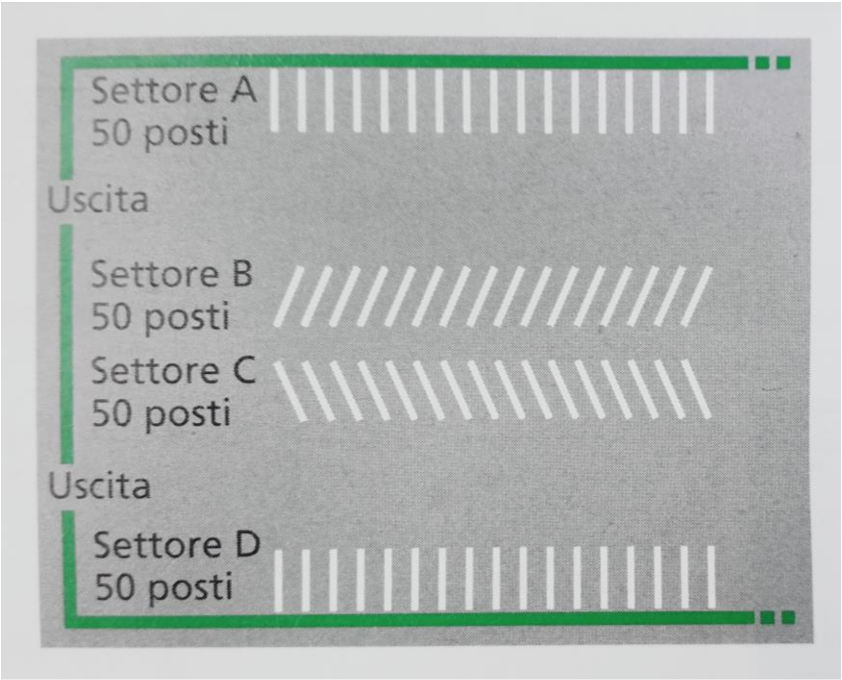
argomenti proposti e discussi in classe:
esercitazione

Esercitazione

1. Si lancia 8 volte una moneta. Quanti sono i possibili esiti? Quanti contengono 4 teste?
2. Si lancia 10 volte una moneta. Calcola la probabilità che esca testa almeno 2 volte.
3. **Area di parcheggio**

Perché un'area di parcheggio sia a norma di legge è necessario che ci sia almeno un posto riservato ai disabili ogni 50 posti disponibili o frazione di 50.

Ciò vuol dire che in un'area di sosta con 49 posti ci deve essere almeno un posto riservato ai disabili; in un'area di sosta con 51 posti ce ne devono essere almeno 2. Un'area di sosta ha 200 posti disposti come in figura e si è deciso di rispettare la normativa riservando il numero minimo di posti ai disabili.



a. In quanti modi si possono scegliere i posti riservati ai disabili?

b. Se il progettista vuole che in ogni settore ci sia esattamente un posto per disabili, in quanti modi si possono scegliere i posti riservati?

c. Per migliorare il servizio, oltre al vincolo precedente, si decide anche di collocare almeno 2 posti riservati in uno dei quattro parcheggi più vicini all'uscita. Quanti sono, in questo caso, le possibili collocazioni dei 4 posti per disabili?

un esempio di svolgimento degli esercizi n.1 e n.2 eseguito in classe dagli studenti

… esercizio 1

1) I possibili esiti sono $2^8 = 256$.

$\cancel{\binom{8}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{1}{256} = \frac{70}{256}$ $\quad C_{8,4} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 70$

Di questi 256, 70 contengono 4 teste.

esercizio 2

P(TESTA ALMENO 2 VOLTE) $= 1 - \left[\binom{10}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^9 + \binom{10}{10}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]$

SI FA LA PROB. INVERSA CALCOLANDO QUALE LA PROB. CHE ESCANO TUTTE CROCI O SOLO UNA TESTA

$= 1 - \left[\cancel{10}^{5}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{1}{512} + 1\cdot\frac{1}{1024}\cdot 1\right]$

$= 1 - \left[\frac{5}{512} + \frac{1}{1024}\right]$

$= 1 - \left[\frac{10+1}{1024}\right]$

$= 1 - \frac{11}{1024} = \frac{1024-11}{1024} = \boxed{\frac{1013}{1024}}$

$1 - \left\{\left[\binom{10}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\frac{1}{2}\right] + \left[\binom{10}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]\right\} =$

$1 - \left\{\left[10\cdot\frac{1}{512}\cdot\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{1024}\right]\right\} =$

$1 - \left\{\left[10\cdot\frac{1}{1024}\right] + \frac{1}{1024}\right\} =$

$1 - \left\{\frac{5}{512} + \frac{1}{1024}\right\} =$

$1 - \frac{11}{1024} = \frac{1013}{1024}$

ho applicato $\binom{n}{k} p^k\cdot(1-p)^{n-k}$ ma ho usato il modo inverso dato che era più veloce (presenza di "ALMENO" nel testo)

un esempio di svolgimento dell’esercizio n.3 eseguito in classe dagli studenti

… esercizio 3

ⓐ $C_{200,4} = \dfrac{200 \cdot 199 \cdot 198 \cdot 197}{4!} = 64.684.950$

ⓑ $D_{50,4} = 50$ ✓

$50 \cdot 50 \cdot 50 \cdot 50 = 6.250.000$ ✓

ⓒ $50 \cdot 50 \cdot C_{4,2} = 50 \cdot 50 \cdot \left(\dfrac{4 \cdot 3}{2!}\right) = 50 \cdot 50 \cdot 6 = 15.000$

verifica (1) eseguita in classe dagli studenti

1. Un professore interroga i suoi alunni a due alla volta. Stabilire quante coppie diverse può interrogare, sapendo che la classe ha 20 studenti.
2. In quanti modi 10 persone possono disporsi su 10 sedie a) allineate? b) a un tavolo rotondo?
3. a) Quanti sono gli anagrammi, anche privi di significato, della parola CASSAPANCA? b) Quanti cominciano con la C? c) Quanti finiscono per ANCA?
4. Trova in quanti modi è possibile estrarre da un mazzo di 52 carte:
   a) 2 carte qualunque; b) 2 carte in modo che siano entrambe di cuori; c) 2 carte in modo che siano una di fiori e una di quadri; d) 2 carte in modo che almeno una di esse sia a cuori.
5. Calcola quanti numeri di quattro cifre si possono formare con le cifre 0, 1, …, 9 e quanti di essi:
   a) hanno cifre distinte; b) sono pari; c) terminano per 0; d) sono minori di 3000.
6. Due macchine producono lo stesso pezzo. La prima produce il 40% di tutto il quantitativo e il 97% della sua produzione è senza difetti. La seconda produce i pezzi restanti, il 6% dei quali risultano difettosi. Calcola la probabilità che a) estraendo un pezzo a caso, esso sia difettoso; b) il pezzo estratto sia stato prodotto dalla prima macchina, sapendo che è difettoso.
7. Un sacchetto contiene cinque palline numerate da 1 a 5. Calcola la probabilità dei seguenti eventi:
   A: “estrarre una pallina con un numero primo”; B: “estrarre un multiplo di due”;
   C: “estrarre un numero primo diverso da 2”.
8. Lanciando una moneta sei volte, calcola la probabilità di ottenere testa a) una volta; b) mai; c) almeno due volte; d) al più due volte.
9. Un’urna contiene 4 palline blu e 6 rosse. Si estraggono contemporaneamente 5 palline. Calcola la probabilità che: a) due siano blu e tre rosse; b) siano tutte rosse; c) non siano tutte blu; d) non siano tutte rosse.

un esempio di svolgimento della verifica (1) eseguita in classe dagli studenti

Esercizi della verifica svolti da uno studente:

Es 1

$\boxed{20}\boxed{19}$ $\frac{20 \cdot 19}{2!} = 190$ si tratta di una combinazione quindi $\frac{20!}{18! \cdot 2!} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \cancel{18!}}{2 \cdot \cancel{18!}} = 190$

Es 2

ⓐ le persone si possono disporre in $10!$ perché ogni persona può occupare una sedia

$10! = 3'628'800$

ⓑ le persone si ~~dispongono~~ dispongono in un tavolo rotondo, quindi si ha $\frac{10!}{10} = 9!$

$9! = 362'880$

Es 3

ⓐ si tratta di combinazione, quindi non è importante l'ordine, $\frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} = 37'800$

ⓑ $\boxed{2}$ $\frac{\cancel{4} \cdot 9!}{4! \cdot \cancel{2}2} =$ ~~15120~~ 7560

ⓒ $\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$

Es 4

ⓐ $C_{52,2} = \frac{52 \cdot 51 \cdot \cancel{50!}}{2 \cdot \cancel{50!}} = 1326$ ⓑ $C_{13,2} = \frac{13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{2! \cdot \cancel{11!}} = 78$

ⓒ $\boxed{13}\boxed{13}$ $\cancel{2} \cdot \frac{13 \cdot 13}{2} = \frac{169}{\cancel{2}}$ ⓓ $C_{13,1} \cdot C_{13,2} = 13 \cdot 78 = 1014$

Es 5

$\boxed{9}\boxed{10}\boxed{10}\boxed{10}$ $10^3 \cdot 9 = 9000$ sono disposizioni con ripetizione quindi abbiamo che nella prima casella ci possono stare 9, mentre nelle altre tutti i numeri quindi 10

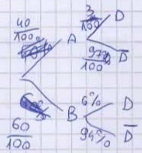
ⓐ $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$

lo stesso ragionamento dell'es. prima solo che ora non possiamo più ripetere i numeri

ⓒ $\boxed{9}\boxed{10}\boxed{10}\boxed{1}$ nell'ultima casella c'è una sola possibilità quindi il risultato sarà $10^2 \cdot 9 = 900$

ⓓ $\boxed{2}\boxed{10}\boxed{10}\boxed{10}$ abbiamo solo due possibilità nella prima casella, mentre le altre caselle abbiamo tutti i numeri e sarà $2 \cdot 10^3 = 2'000$

Es 6



$D_A = \frac{40 \cdot 3}{100 \cdot 100} = \frac{120}{10000}$ $D_A + D_B = \frac{48}{1000} = 0{,}048$

$D_B = \frac{60 \cdot 6}{10'000} = \frac{360}{10000}$

ⓑ $\frac{\frac{12}{1000}}{\frac{48}{1000}} = \frac{12}{\cancel{1000}} \cdot \frac{\cancel{1000}}{48} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Es 7

ⓐ i casi possibili sono 5, ovvero il numero delle palline e quelli favorevoli sono 3, 2, 5 quindi $P_{e_1} = \frac{3}{5}$

ⓑ i casi possibili sono 5, e quelli favorevoli sono 2 e 4 $P_{e_2} = \frac{2}{5}$

ⓒ i casi possibili sono 5, e quelli favorevoli sono 3 e 5 quindi $P_{e_3} = \frac{2}{5}$

Es 8

ⓐ lanci $= 6$ TCCCCC casi $\frac{6!}{5!} = \frac{720}{120} = 6$ $P_{e_1} = \frac{6}{2^6} = \frac{6}{64} = 0{,}093$

ⓑ CCCCCC $\frac{6!}{6!} = 1$ $P_{e_2} = \frac{1}{64} = 0{,}016$

$P_{e_3} = P_{e_2} + P_{e_1} = \frac{7}{64} = 0{,}11$

ⓒ $\frac{64}{64} - \frac{7}{64} = \frac{57}{64}$ è la probabilità contraria cioè $\frac{64-7}{64} = \frac{57}{64} = 0{,}89$

ⓓ $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ $\frac{15}{64} = 0{,}23$

P almeno due volte è $0{,}23 + 0{,}11 = 0{,}34$

Es 9

4 B 6 R

$C_{10,5} = \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 252$ e sono i casi possibili

ⓐ $P_e = \frac{120}{252} \cong 0{,}48$ casi fav. $= C_{4,2} \cdot C_{6,3}$ $\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$ $\frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$

$6 \cdot 20 = 120$

ⓑ $P_e = \frac{6}{252} = 0{,}024$ $C_{6,5} = \frac{6!}{5!} = 6$

ⓓ $P_e = 1 - 0{,}024 = 0{,}976$

ⓒ $P_e = 1$ perché le palline blu sono 4 e se ne estraggo 5 c'è almeno una rossa

un esempio di svolgimento della verifica (1) eseguita in classe dagli studenti

Alcuni esercizi della verifica svolti da un altro studente:

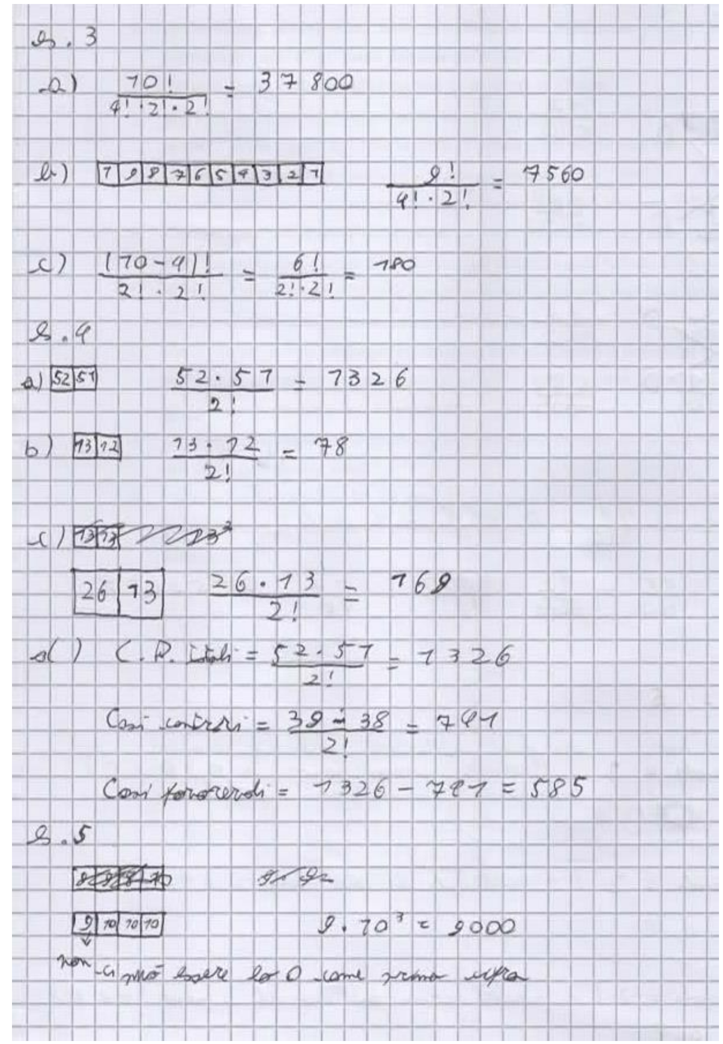
Es. 1

$\frac{20\cdot 19}{2!} = 190$ $\boxed{20 \mid 19}$ Combinazioni

Es. 2

a) $10! = 3628800$ $\boxed{10 \mid 9 \mid 8 \mid 7 \mid 6 \mid 5 \mid 4 \mid 3 \mid 2 \mid 1}$

b) $\frac{10\cdot 9!}{10} = 362880$ Perché?



Es. 3

a) $\frac{10!}{4!\cdot 2!\cdot 2!} = 37800$

b) $\boxed{1 \mid 9 \mid 8 \mid 7 \mid 6 \mid 5 \mid 4 \mid 3 \mid 2 \mid 1}$ $\frac{9!}{4!\cdot 2!} = 7560$

c) $\frac{(10-4)!}{2!\cdot 2!} = \frac{6!}{2!\cdot 2!} = 180$

Es. 4

a) $\boxed{52 \mid 51}$ $\frac{52\cdot 51}{2!} = 1326$

b) $\boxed{13 \mid 12}$ $\frac{13\cdot 12}{2!} = 78$

c) $\boxed{26 \mid 13}$ $\frac{26\cdot 13}{2!} = 169$

d) C.P. totali $= \frac{52\cdot 51}{2!} = 1326$

Casi contrari $= \frac{39\cdot 38}{2!} = 741$

Casi favorevoli $= 1326 - 741 = 585$

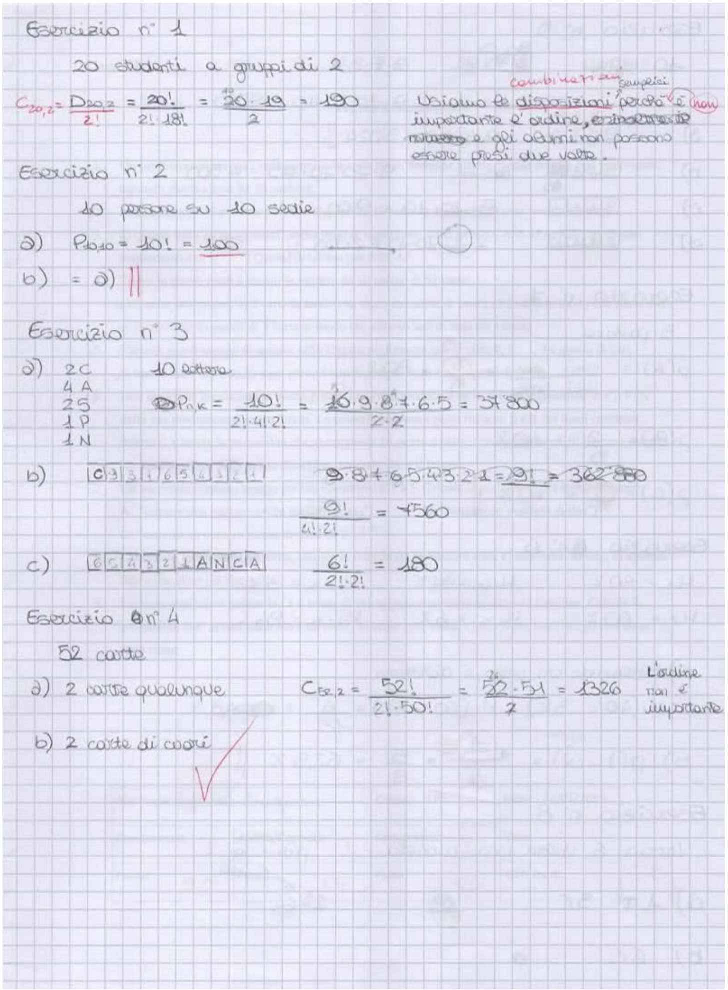
Es. 5

$\boxed{9 \mid 10 \mid 10 \mid 10}$ $9\cdot 10^3 = 9000$

non ci può essere lo 0 come prima cifra

un esempio di svolgimento della verifica (1) eseguita in classe dagli studenti:

non sempre la soluzione è corretta



Esercizio n° 1

20 studenti a gruppi di 2

$C_{20,2} = \frac{D_{20,2}}{2!} = \frac{20!}{2! \cdot 18!} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$

combinazioni semplici

Usiamo le ~~disposizioni~~ perché è non importante l'ordine, ~~[illegible]~~ e gli alunni non possono essere presi due volte.

Esercizio n° 2

10 persone su 10 sedie

a) $P_{10,10} = 10! = 100$

b) = a) ||

Esercizio n° 3

a) 2 C
4 A
2 S
1 P
1 N

10 lettere

$P_{n,k} = \frac{10!}{2! \cdot 4! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 37'800$

b) C 9 3 4 6 5 4 3 2 1

$9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 9! = 362'880$

$\frac{9!}{4! \cdot 2!} = 7560$

c) 6 5 4 3 2 1 A N C A

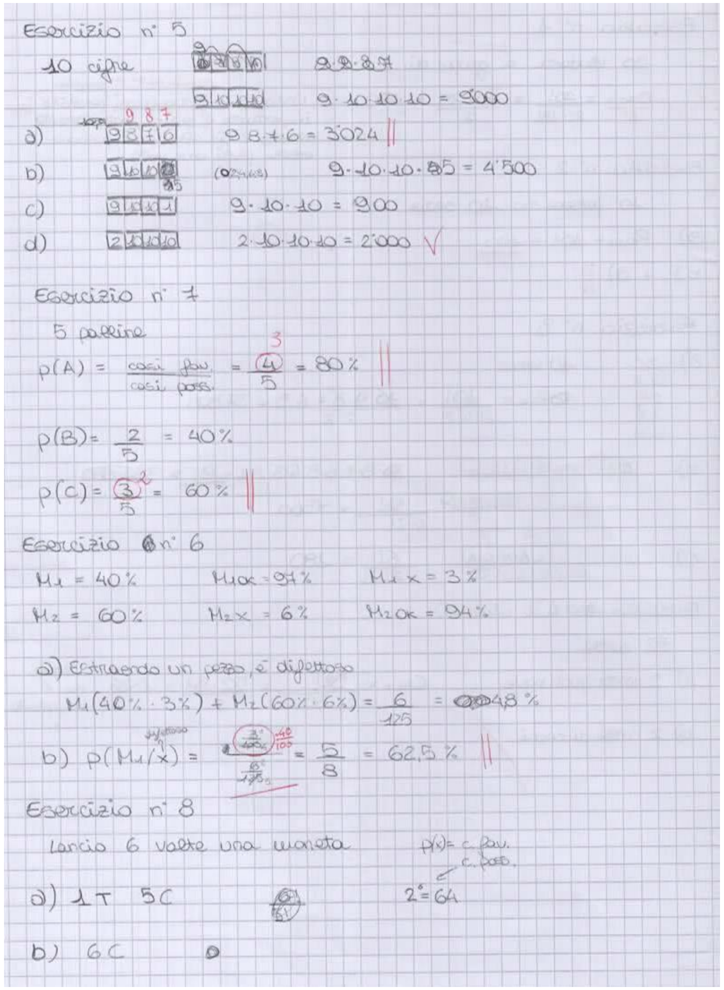
$\frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$

Esercizio n° 4

52 carte

a) 2 carte qualunque $C_{52,2} = \frac{52!}{2! \cdot 50!} = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$ L'ordine non è importante

b) 2 carte di cuori



Esercizio n° 5

10 cifre

$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$

a) 9 8 7 6 $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3'024$ ||

b) 9 10 10 5 (0,2,4,6,8) $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4'500$

c) 9 10 10 1 $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$

d) 2 10 10 10 $2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2'000$ √

Esercizio n° 7

5 palline

$p(A) = \frac{\text{casi fav.}}{\text{casi poss.}} = \frac{4}{5} = 80\%$ ||

$p(B) = \frac{2}{5} = 40\%$

$p(C) = \frac{3}{5} = 60\%$ ||

Esercizio n° 6

$M_1 = 40\%$ $M_{1OK} = 97\%$ $M_1 x = 3\%$

$M_2 = 60\%$ $M_2 x = 6\%$ $M_{2OK} = 94\%$

a) Estraendo un pezzo, è difettoso

$M_1(40\% \cdot 3\%) + M_2(60\% \cdot 6\%) = \frac{6}{125} = 4{,}8\%$

b) $p(M_1/x) = \frac{\frac{3}{250}}{\frac{6}{125}} = \frac{5}{8} = 62{,}5\%$ ||

Esercizio n° 8

Lancio 6 volte una moneta

$p(x) = \frac{\text{c. fav.}}{\text{c. poss.}}$

a) 1 T 5 C $2^6 = 64$

b) 6 C

risultati ottenuti

- Tutti gli studenti sono in grado di analizzare le caratteristiche delle situazioni proposte e risolvere correttamente esercizi di calcolo combinatorio e delle probabilità anche utilizzando varie modalità grafiche almeno relativamente agli obiettivi minimi.

- Tutti gli studenti hanno assimilato in modo corretto il concetto di frazione e applicato correttamente le varie proprietà nelle operazioni proposte almeno relativamente agli obiettivi minimi.

Nessuno studente ha avuto il giudizio sospeso in matematica alla fine dell’anno scolastico.

valutazione dell’efficacia del percorso didattico sperimentato

- L’attività svolta ha permesso agli studenti di completare lo studio del calcolo delle probabilità con l’applicazione del calcolo combinatorio.
- Gli studenti hanno spesso sperimentato in prima persona le situazioni proposte, il che ha permesso loro di apprendere in modo giocoso e, trattandosi di una classe prima, questo ha aiutato il consolidamento del “gruppo classe”.
- Questo tipo di approccio ha ottimizzando i tempi di lavoro permettendo di anticipare alla prima classe il calcolo combinatorio che di solito viene affrontato nella classe quarta.
- Costante attenzione è stata data alla contestualizzazione e alla esposizione verbale dei concetti affrontati.
- L’attività svolta ha anche permesso di rafforzare le competenze degli studenti nella "*peer education*" tramite lavori di gruppo.