REGIONE TOSCANA

Laboratori del Sapere Scientifico

Dalle relazioni d’equivalenza alla costruzione di insiemi numerici

Grado scolastico: scuola secondaria di secondo grado

Area disciplinare: matematica

I.S.I.S. “B. Varchi”

Realizzato con il contributo della Regione Toscana nell’ambito del progetto

Rete Scuole LSS a.s. 2019/2020

Dalle relazioni d'equivalenza alla costruzione di insiemi numerici

Classe : seconda liceo scientifico
Insegnate: Francesco Degli Innocenti

Collocazione del percorso all'interno delle linee guida per i licei scientifici

Il percorso si inserisce all'interno delle linee guida in cui si dice che :

"L'approfondimento degli aspetti tecnici, sebbene maggiore nel liceo scientifico che in altri licei, non perderà mai di vista l'obiettivo della comprensione in profondità degli aspetti concettuali della disciplina. L'indicazione principale e': pochi concetti e metodi fondamentali, acquisiti in profondità. "

Più precisamente, il percorso si inserisce nel contesto dello studio degli insiemi numerici: naturali, interi, razionali e reali.
A tale proposito si fa riferimento alle connessioni tra matematica e pensiero filosofico.

Obiettivi essenziali di apprendimento

- Conoscere la differenza tra frazione e numero razionale
- Saper operare in $\mathbf{Z_n}$
- Conoscere la costruzione dei principali insiemi numerici
- Saper riflettere criticamente sui risultati ottenuti e dargli un significato
- Sviluppo di una logica “in piccolo” e di una “logica in grande”, ciò di dare un’idea della struttura logica che sta dietro ad un percorso matematico (F. Enriques, “Insegnamento dinamico”, periodico di matematiche, serie IV, vol. 1 n.1, anno 1921.)

Approccio metodologico

Il metodo utilizzato per affrontare gli argomenti previsti è stato sempre, essenzialmente, lo stesso:

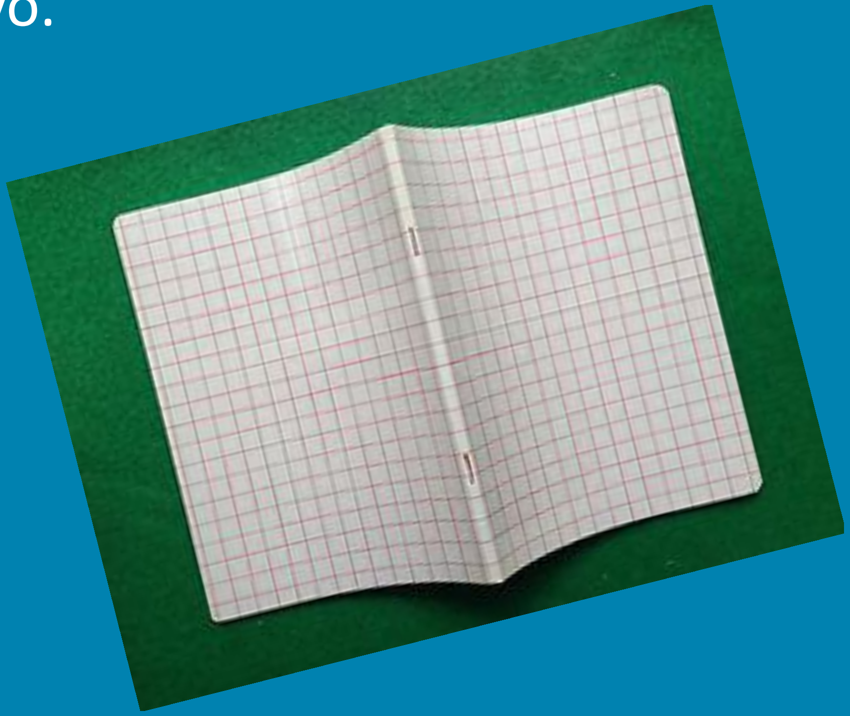
1. partire da un documento o da un esercizio guidato;

2. riflettere insieme su quanto svolto singolarmente dagli studenti;

3. collocare nella giusta prospettiva teorica i risultati ottenuti.

Materiali, apparecchi e strumenti utilizzati

Il lavoro si è incentrato principalmente sull’utilizzo di schede di lavoro e tabelle da compilare. Per introdurre l’insieme N si è utilizzato un testo narrativo.



Ambiente in cui è stato sviluppato il percorso

Il percorso è stato svolto interamente in classe.

Tempo impiegato

- Progettazione 6 ore
- Realizzazione 10 ore
- Rendicontazione 10 ore

Totale 26 ore

Prerequisiti

- Definizione di relazione.
- Rappresentazione di una relazione.
- Definizione di relazione d'equivalenza.

Esempi significativi:

- congruenza
- equivalenza
- parallelismo
- uguaglianza

- Definizione di insieme quoziente e di classe d'equivalenza.

Esempi significativi:

-classificare a meno di congruenza

-classificare a meno di equivalenza

- Concetto di direzione

Contenuti del percorso

- aritmetica modulare e applicazioni
- costruzione di Q
- costruzione di Z
- costruzione dei numeri naturali come classi di equivalenza di insiemi equipotenti

Il percorso

Si è deciso di affrontare la costruzione degli insiemi numerici nell'ordine inverso a quello logicamente seguito, ovvero siamo partiti da Z_n per arrivare ad N anziché fare il contrario. Questo tipo di approccio ci ha permesso di:

- partire da Z_n dato che la costruzione di questo insieme numerico è più simile allo studio da loro fatto per le relazioni di equivalenza che già conoscevano;

- costruire insiemi in cui la relazione di equivalenza cha li definisce ha dei richiami diretti con le loro preconoscenze (es. frazioni equivalenti che rappresentano lo stesso numero razionale)

Z_n

Per introdurre tale insieme numerico è stato chiesto di risolvere i seguenti esercizi

Esercizio 1

Consideriamo in Z la seguente relazione:

a e b sono in relazione se, e solo se, hanno lo stesso resto quando sono divisi per n.

Si scrive $a \equiv_n b$.

Verifica che si tratta di una relazione di equivalenza

Questa domanda è stata risolta da tutti gli studenti senza difficoltà.

Dato che la precedente relazione ($\equiv_n$) abbiamo scoperto essere una relazione di equivalenza adesso ci è possibile studiare l'insieme quoziente che indicheremo con $\mathbf{Z_n}$.

Esercizio 2

Studiare l'insieme quoziente Z_{12} :

- descrivere le classi di equivalenza a parole
- descrivere e caratterizzare le classi d'equivalenza in termini matematici
- Trovare un esempio in cui si utilizza $\mathbf{Z_{12}}$.

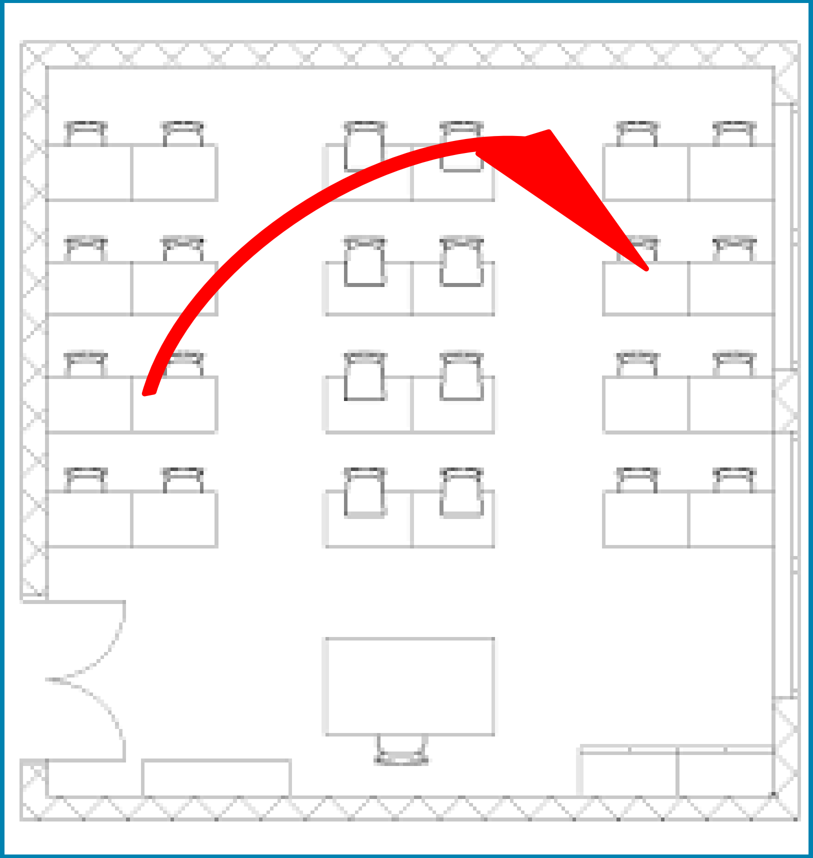
Considerazioni sull’esercizio

Mentre quasi tutti hanno saputo risolvere i primi due punti dell’esercizio 2, l’ultimo punto ha creato maggiori difficoltà.

Nessuno degli alunni ha, infatti, intuito il legame con l’aritmetica dell’orologio. Ho dovuto quindi guidarli a tale osservazione attraverso domande. Ad esempio: “se ora l’orologio segna le 3.00, tra 12 ore che ore segnerà?”.

Gli alunni si sono accorti tutti di essere in una aritmetica modulare ed alcuni hanno proposte due possibili letture: in Z_{12} oppure Z_{24}

L'osservazione di Francesca…



Mentre stavamo ragionando insieme su $\mathbf{Z}_{12}$ ho notato che Francesca aveva cambiato posto spostandosi dalla seconda
alla terza fila (in classe c'è la regola che non si può cambiare
posto se non per avvicinarsi alla lavagna).
Quando le ho fatto notare che non poteva retrocedere lei mi ha risposto che **in realtà in $\mathbf{Z}_n$ si era avvicinata**!!

… coinvolge tutta la classe

Questa osservazione ci ha permesso di riflettere maggiormente su $\mathbf{Z_n}$. Siamo così arrivati a dire che in $\mathbf{Z_2}$ la terza fila è equivalente alla prima!

Gli studenti a questo punto si sono interessati maggiormente al problema e ognuno voleva capire in quale $\mathbf{Z_n}$ si doveva mettere per poter andare in ultima fila!

L’osservazione di Tommaso

A questo punto Tommaso ha fatto notare che quando ad italiano fanno le interrogazioni estraggono a sorte un numero dalla pagina dell’antologia per trovare il malcapitato. Tommaso ha capito e spiegato alla classe che la Professoressa di italiano stava usando (senza saperlo) $\mathbf{Z_{23}}$.

Molto soddisfatto ha detto che lo avrebbe spiegato all’insegnate d’italiano!

Esercizi in classe

A questo punto abbiamo continuato a lavorare sulle classi resto facendo nuovi esercizi.

Riporto di seguito alcuni di essi.

Esercizio 1

Per ciascuno dei numeri seguenti determinare il minimo intero positivo modulo 12 a cui è congruente:
19, 149, -11, -128

Questo esercizio ci ha permesso di rivedere il concetto di divisione con resto, già affrontato alla scuola primaria e secondaria di primo grado.

Abbiamo inoltre riflettuto su come si **calcola il resto quando si divide un numero negativo**. Precisazione questa su cui i ragazzi non avevano mai lavorato prima.

Dati due numeri a e b eseguire la divisione con resto significa determinare due numeri q e r con $0 \leq r < |b|$ tali che $a = qb+r$. Ad esempio -12:5 ha come quoziente -3 e resto +3, infatti $-12 = -3*5+3$

Esercizio 2

Completa le due tabelle relative alla somma e moltiplicazione in Z_{12}.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

*	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0												
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
11												

Abbiamo riflettuto sul significato di **elemento invertibile** rispetto ad una data operazione.

Abbiamo inoltre notato analogie e differenze con Z.
In Z tutti gli elementi sono invertibili rispetto alla somma e solo 1 è invertibile rispetto al prodotto.

In Z_{12} tutti gli elementi sono invertibili rispetto alla somma ma solo alcuni lo sono rispetto alla moltiplicazione.

Classi resto e realtà

Esercizio 3

Se adesso sono le ore 14 (= 2 P.M.) che ora del giorno (o della notte) sarà tra 1000 ore ?

Questo esercizio ci ha fatto principalmente lavorare sulla "traduzione" del testo dal linguaggio comune al linguaggio matematico . Abbiamo quindi riflettuto sul fatto che il problema si riconduce a lavorare in $\mathbf{Z}_{24}$.

Esercizio 4

Se lo scorso anno Natale era di mercoledì, in che giorno cadrà Natale quest'anno? E nel 2032 ?

Per prima cosa capito che il problema si risolve lavorando in Z_7.

Successivamente abbiamo lavorato sul calcolo dei giorni intercorsi e quindi abbiamo dovuto considerare:

- ci sono anni bisestili e quindi non tutti gli anni sono di 365 giorni,
- i giorni sono numerati da 1 a 7 e quindi non partiamo a contare da zero ma dal numero corrispondente al giorno di partenza.

Q

Per introdurre tale insieme numerico è stato chiesto di risolvere il seguente esercizio

Esercizio

Nel prodotto cartesiano $Z \times Z^*$ si introduce la

Seguente relazione

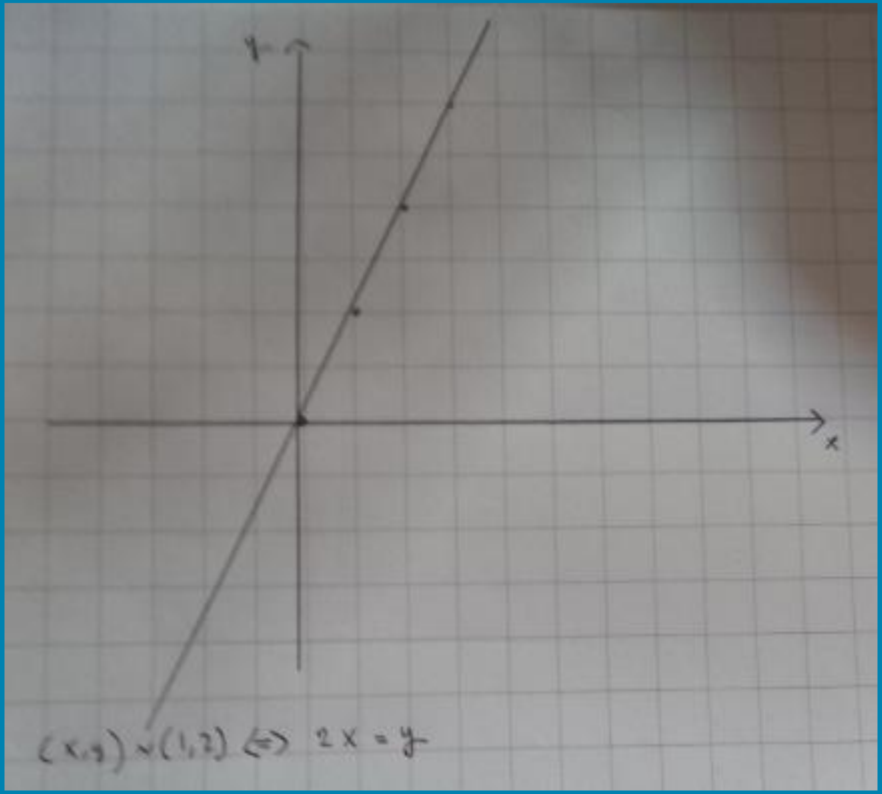
$$(a,b)\sim(c,d) \text{ se e solo se } ad=bc.$$

a) Provare che ~ è una relazione d’equivalenza
b) Calcola la classe d’equivalenza di (1;2)
c) A cosa ti fa pensare questa classe d’equivalenza?

Considerazioni sull'esercizio

a) Il primo punto è stato svolto da tutti impostando un sistema, anche se nessuno si è posto il problema della discussione!

b) Il secondo punto è stato svolto da tutti anche se solo pochi hanno considerato anche le coppie di numeri negativi. Questo quesito è stato occasione anche per riparlare di **diretta proporzionalità** e della sua rappresentazione grafica dato che alcuni studenti avevano rappresentato la classe d'equivalenza sul piano cartesiano.



Francesco ha rappresentato la classe d’equivalenza di (1;2) sul piano cartesiano.
Ha considerato sia le coppie di numeri positivi che negativi ma non ha tenuto conto che la relazione è in ZxZ e non in RxR.

Questo ci ha permesso di riprendere il **concetto di funzione, dominio e immagine** che avevamo affrontato l’anno precedente.

Laura ha notato che la classe d'equivalenza di (1;2) conteneva tutte le coppie che avevano lo stesso rapporto, infatti la rappresentazione grafica è quella di una successione di punti che si trovano tutti su una retta di fissato coefficiente angolare.

c) Nel terzo punto abbiamo ragionato meglio sul significato di "avere lo stesso rapporto" e siamo arrivati a dire che le coppie di numeri equivalenti sono come frazioni equivalenti.

QUINDI:
l'insieme quoziente è in corrispondenza biunivoca con Q .

Frazioni e numeri razionali

Dopo aver fatto la costruzione dei numeri razionali ci siamo interrogati sul significato di frazione e la sua corrispondenza con un numero razionale.

Per molti ragazzi questa corrispondenza non è scontata . Abbiamo quindi riesaminato la costruzione di Q evidenziando come le coppie di numeri interi rappresentano le frazioni mentre le classi d'equivalenza rappresentano i numeri razionali.

A questo punto è stato chiaro a tutti che i numeri razionali sono classi d'equivalenza i cui elementi sono le frazioni.

Z

Per introdurre tale insieme numerico è stato chiesto di risolvere il seguente esercizio

Esercizio

In NxN considera la relazione

$$(a,b)\sim(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$$

a) Verifica che è una relazione d'equivalenza

b) Descrivi le classi di equivalenza di (0,0), (1,0), (0,1), (3,2).

c) Prova che ogni classe di equivalenza contiene

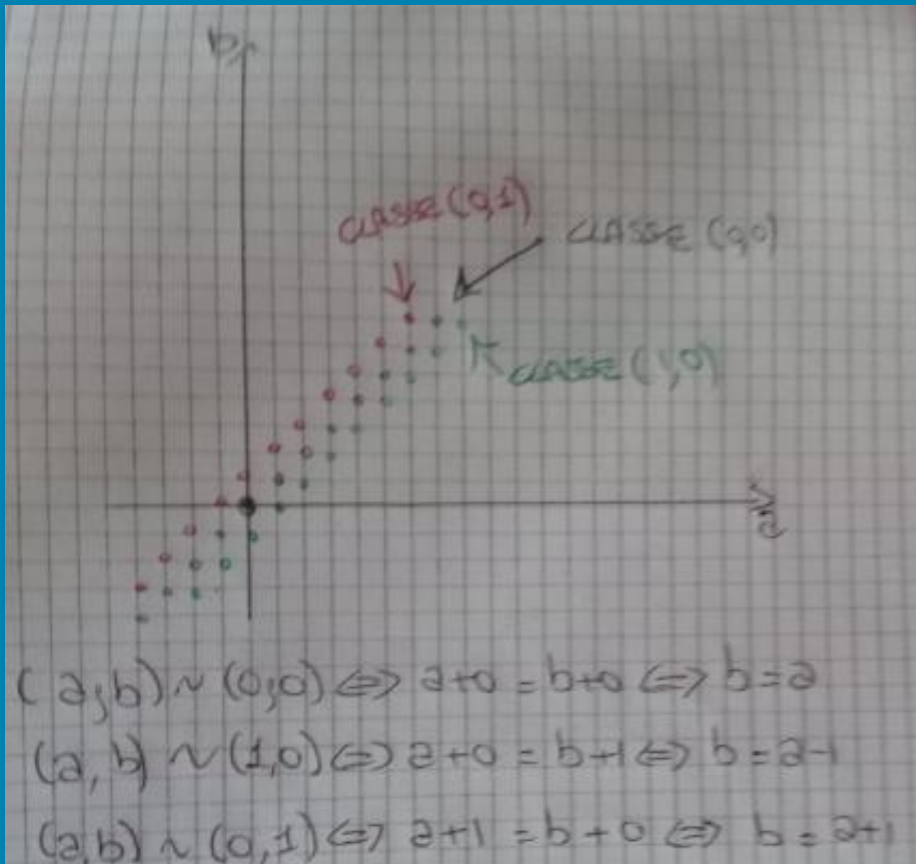
almeno una coppia (a,b) avente una componente nulla.

c) A quale insieme numerico assomiglia l'insieme quoziente? Perché?

Considerazioni sull'esercizio

a) Il primo punto non ha presentato nessuna difficoltà

b) In molti hanno trovato alcuni elementi delle classi d'equivalenza richiesti. Solo alcuni hanno determinato completamente le classi d'equivalenza e solo Agnese ha dato una rappresentazione grafica (punti su rette parallele alla bisettrice del primo e terzo quadrante)



Agnese ha rappresentato correttamente le classi d'equivalenza.
Si è ricordata che le classi sono formate da punti discreti che si trovano su una retta ma non ha tenuto conto del fatto che la relazione è definita su NxN e quindi sono punti discreti su una semiretta.

A partire da queste osservazioni siamo arrivati a dire che:

le classi di equivalenza sono le semirette uscenti dall'origine e parallele alla bisettrice del I° e III° quadrante e il loro insieme forma **l'insieme quoziente.**

Usando esempi numerici, siamo arrivati a dire che:

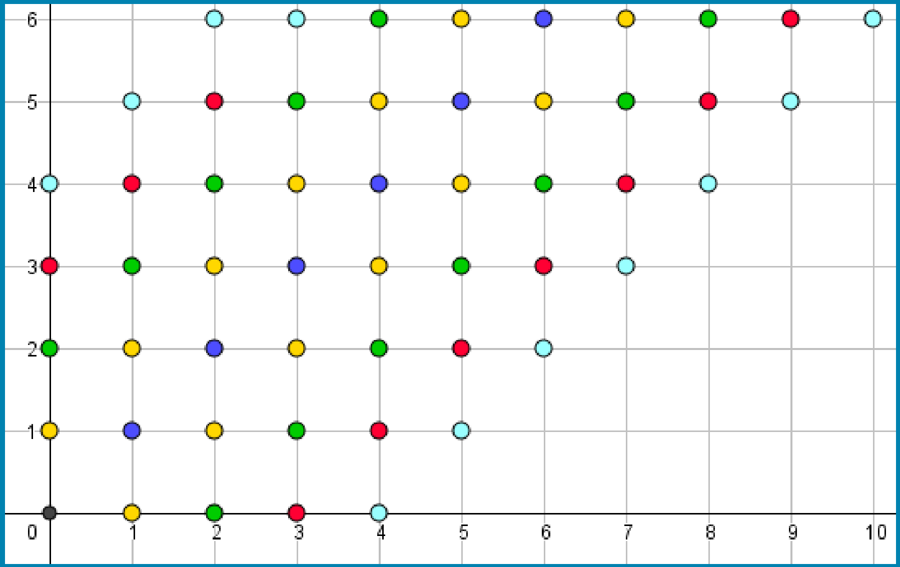
- (a,b) contiene (a-b,0) se a≥b
- contiene (0,b-a) se a≤b .

c) A partire da questo risultato abbiamo osservato che per ogni punto del semiasse positivo delle ascisse e per ogni punto del semiasse positivo delle ordinate c’era una classe d’equivalenza.

Da qui abbiamo capito che l’insieme quoziente è come se contenesse due copie di N.

A questo punto è stato naturale associare tale quoziente all’insieme **Z**.

I vantaggi della rappresentazione grafica



L'idea dei ragazzi di rappresentare graficamente la relazione è stata molto utile per rendere maggiormente concreta la relazione studiata.

Come si vede dalla figura risulta molto chiaro che ogni coppia ha un rappresentate con una componente nulla.

Si vede inoltre bene che i numeri corrispondenti ai punti sul semiasse positivo delle ascisse corrispondono ai numeri positivi mentre quelli sul semiasse positivo delle ordinate ai numeri negativi.

N

Per introdurre l’insieme dei numeri naturali **si è fornito un racconto** tratto da “Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici” di E. Giusti.

I ragazzi lo hanno letto in classe e successivamente abbiamo discusso di quanto avevano capito del racconto cercando di giungere ad una costruzione dei numeri naturali.

Per semplicità in questa presentazione ho evidenziato in giallo le parti del racconto utili allo scopo ma i ragazzi hanno lavorato senza questo aiuto.

Sarà, disse Qwfwq, e poi io non voglio contraddire nessuno, anzi dichiaro solennemente -prenda nota, e non si dimentichi di scriverlo- che sono pronto a ritrattare tutto quello che dovesse risultare in contrasto con l 'insegnamento degli stregoni. Però in quei giorni là che non c'erano ancora i numeri io invece c'ero, e mi ricordo bene come sono andate le cose, mica come questi ragazzi qui che stanno sempre dietro a fare conti e non si accorgono nemmeno se gli passa un elefante davanti al naso.
Quanti eravamo allora non lo so; c'era Gianni con sua moglie, Franco e Kwqw che non erano sposati, Maria, quelli di là dalla strada, e tutti noi. E anche Vfnkw, naturalmente. Ogni tanto qualcuno provava a contarci, ma senza i numeri non veniva mai giusto: mettetevi insieme uno a uno, diceva, tu e tu, tu e Giorgio, tu con quello, Kskj con Maria, e avanti di questo passo, ma alla fine ne avanzava sempre qualcuno e bisognava ricominciare da capo. Una volta sono capitato con un maiale; un puzzo che per levarmelo di dosso mi dovetti anche lavare, non le dico. E poi era tutta fatica e perdita di tempo inutile, tanto i maiali non li sapevamo contare lo stesso. Ma di tempo a quell'epoca ce n'era quanto si voleva, e in questo modo si facevano sempre nuove conoscenze, che sembravamo più di quanti poi si era veramente.
E la sera tutti vicino al fuoco a parlare e a raccontare storie. Di che si parlava, dice? non è che ci fossero tanti Argomenti; di mangiare e di caccia, di caccia e di mangiare. Bastava che uno prendesse -che so?- una scimmia, un uccello, anche un pesce, e non la smetteva più di raccontare come e dove e com'era stato difficile, finché tutti non l'avevano imparato a memoria. Una volta che Franco ha preso un topo, grosso sì, ma sempre un topo, ce l'ha rifrullato per un mese di seguito.
Ma il peggiore era Vfnkw. Bravo eh, bravo era bravo, non c'è niente da dire. E poi mica come questi ragazzotti, che a parole le sparano grosse ma poi, quando vai a vedere, se hanno preso un lucertolone che ci mangiano si e no una volta è già tanto. No, no, per Vfnkw ci voleva ben altro; lui se non era minimo minimo un cinghiale o una gazzella non ci si metteva nemmeno. Tempo sprecato, diceva, è più la fatica che fai che quello che mangi.
Ma soprattutto era un cacciatore di tigri. Appena si sentiva un ruggito strano nella foresta, o magari si scopriva che qualcuno, che era andato a raccogliere legna nel bosco, non tornava a casa da un pezzo, lui cominciava ad affilare i coltelli, avvelenava le frecce, rinforzava la punta della lancia, e dopo un po' lo vedevi prendere la strada del bosco, e potevi star certo che non sarebbe tornato senza la tigre

. Poteva passare un giorno come un mese, ma a un certo punto lo rivedevi, magro, sporco, una volta con un braccio mezzo staccato, ma sempre con la sua brava pelle di tigre nuova sulle spalle, e le zanne da mostrare a tutti. La festa durava come minimo tre giorni, e lui sempre a raccontare, ogni volta aggiungendo particolari che pareva li inventasse lì per lì.

Fin qui non ci sarebbe niente di male. Ma a lui non gli bastava che tutti stessero lì a sentirlo per tutta la festa; la vita secondo lui si divideva in due parti, quando andava a caccia e quando raccontava, e tutti gli altri buoni ad ascoltare. Si era fatto anche un osso dove faceva una tacca per ogni tigre che ammazzava, e a ognuna aveva dato un nome: Unghia, Duna, Stria, Quatta, Cinghia, e se li ricordava tutti, uno dopo l'altro, e di tutte sapeva raccontare vita, morte e miracoli; come l'aveva trovata, e come era riuscito a mettersi sottovento, e dove si era appostato, e come gli era saltata addosso, e come aveva perso la lancia, e dove aveva colpito col coltello, e come e dove e quando.

E non c'era verso di tagliar corto; potevi avere la carne sul fuoco che si bruciava, o il bambino che piangeva, finché non aveva finito non lasciava andare nessuno.

Insomma, un vero inferno, con noi che cercavamo di evitarlo in tutti i modi, e Vfnkw che si nascondeva dietro un formicaio o appollaiato su un ramo di un albero, e quando meno te l'aspettavi ti piombava addosso con il suo osso e le sue storie.

Guarda, diceva indicando il quarto segno sull'osso, questa è Quatta; lei stava acquattata sotto un cespuglio e io dietro aspettavo che uscisse per cercare da mangiare. Per tre giorni e tre notti sono stato li senza mangiare e senza dormire... le risparmio il resto, che non finiremmo più.

Era diventata una fissazione; c'erano rimasti solo i ragazzi, che per un po' lo stavano a sentire, ma poi cominciavano a dargli la baia, e gli andavano dietro ripetendo: Unghia, Duna, Stria, Quatta, Cinghia, Tesa, Seta, Lotta, Nova, e via tutta la cantilena.

Alle prime questo faceva comodo, che ormai dal rumore si poteva capire dove stava Vfnkw e svicolare alla svelta quando si avvicinava. Ma per stare appresso a lui, i ragazzi avevano smesso di correre, di lottare, di tirare sassi, di giocare alla guerra, di arrampicarsi sugli alberi; insomma non facevano più tutte le cose importanti, che gli sarebbero servite da grandi, e invece perdevano il loro tempo dietro a Vfnkw e ai suoi segni sull'osso.

Così dopo un po' che questa storia andava avanti siamo andati dal capo, per chiedergli di mettere a posto le cose. Lui per un po' è stato a sentirci, poi ha messo sù quell'aria distratta che fa sempre quando riflette, e che non promette niente di buono, e ci ha detto di andare e di non preoccuparci, che ci avrebbe pensato lui, e insomma quelle cose che si dicono quando si vuole mandare via qualcuno per riflettere con comodo. E infatti dopo qualche giorno non si sono visti più né i ragazzi né Vfnkw, che tutti pensavano che fosse tornato a caccia, anche se non si era sentito di nessuna tigre nelle vicinanze.

Solo dopo ci siamo accorti che stavano tutti in una capanna abbandonata vicino al fiume, con ognuno in mano una specie d'osso, a guardare bene una tavoletta fatta di argilla, sulla quale facevano strani segni. In mezzo c'era Vfnkw, che controllava che tutti ripetessero bene i nomi delle tigri, e ogni tanto si voltava verso gli stregoni, che stavano in un angolo della stanza e parlottavano tra loro. Ogni giorno il capo veniva a vedere che tutto andasse bene.

Per farla breve, dopo qualche mese di questa storia vedo arrivare uno dei ragazzi più grandi, con la sua brava tavoletta in mano, che mi dice: dunque, tu hai stria maiali e cinghia galline, devi pagare duna galline al capo.

E fa un segno sulla tavoletta -questo è il tuo nome, dice- e vicino altri segni come quelli di Vfnkw.

Ora, fino a quel momento ci si metteva un po' d'accordo tra noi; ogni tanto uno prendeva una gallina e andava dal capo: capo, t'ho portato una gallina, e tutti erano contenti. Da allora invece tutto è scritto e regolato; chi paga una gallina, chi due, chi anche un maiale. Così il capo, i suoi esattori e gli stregoni s'ingrassano, e il popolo... ma questo non lo scriva, sa com'è.

Insomma, adesso sappiamo quanti siamo, siamo quattrocentosessantacinque. E tutti e quattrocentosessantacinque paghiamo al capo un decimo di quello che raccogliamo o che cacciamo. Sia ben chiaro, io dico che il capo ha diritto a ricevere il giusto dai sudditi, e un villaggio popoloso e importante come il nostro deve essere difeso e ben organizzato, e anche il culto ha le sue spese, che poi quando stiamo male sono loro che ci curano. Ma a tutto c'è un limite; se continua così, finirà che dovremo pagare, dico per assurdo, anche un terzo dei nostri guadagni. E intanto Vfnkw se ne sta seduto alla tavola del capo, e si mangia i nostri maiali e le nostre galline. Ma la pagherà, stia certo. Guardi, mi sono fatto un osso dove registro tutto.

E. Giusti, “Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici”, 1999, Bollati Boringhieri

Il testo è risultato semplice nella comprensione della trama e divertente.

I ragazzi sono rimasti all’inizio un po’ perplessi dal registro narrativo utilizzato: non era quello solito della matematica!

Questa differenza di registro li ha in parte divertiti e in parte destabilizzati in quanto non riuscivano più a trovare i classici appigli (richieste) della matematica.

Una volta iniziata la discussione la maggiore difficoltà incontrata per arrivare al concetto di numero naturale è stata quella di distinguere tra l'ordine dei segni e quello che rappresentavano (l'insieme delle tigri morte).

In questo forse il testo non è propriamente trasparente. Dopo aver discusso ed essersi confrontati siamo arrivati a dire che:

nel racconto un numero naturale è rappresentato da un insieme che ha la quantità di elementi dell'insieme individuato dal nome di una delle tigri uccise.

Da qui siamo passati a dire che un numero naturale è una classe d'equivalenza di **insiemi equipotenti** (cioè con lo stesso numero di elementi).

Verifiche degli apprendimenti

Le verifiche sono state di due tipi:

- Collettiva: *brainstorming* sulle strategie di risoluzione degli esercizi e sulla concettualizzazione finale delle costruzioni fatte.
- Individuale: risoluzione di alcuni esercizi (principalmente sulle classi resto)

Verifica collettiva
Costruzione di uno schema riassuntivo

- Insieme dei numeri naturali, N

Da cui si costruisce …

Da cui si costruisce

- Insieme dei numeri interi, Z

- Insieme dei numeri razionali, Q

- Insieme delle classi resto, Z_n

Da cui …

…. Si costruiscono numeri reali argomento che non è stato sviluppato in questo lavoro

Verifica individuale

Esercizio 1

Senza sapere quanto fa 7^{99} , dire quanto vale il resto della divisione per 12.

- $7 \cdot 7 = 49$, ma in Z_{12} equivale ad 1 , ossia $7 \cdot 7 \equiv 1$
- $7 \cdot 7 \cdot 7 = \ldots$ invece di fare $49 \cdot 7$ si può fare, in Z_{12}, $1 \cdot 7$ e ottenere così 7 .
- Cioè 7 è il resto di $7 \cdot 7 \cdot 7$ diviso per 12 $\Rightarrow 7 \cdot 7 \cdot 7 \equiv 7$
- Possiamo scrivere
- $7^{99} = 7^{98} \cdot 7 = (7^2)^{49} \cdot 7 \Rightarrow 7^{99} \equiv (1)^{49} \cdot 7 \equiv 7$

Puoi generalizzare il risultato per un generico esponente?

L'informazione può essere così generalizzata:

- $7^{\text{pari}} \equiv 1$, $7^{\text{dispari}} \equiv 7$.

Esercizio 2

Sia $n=293\cdot19$. Determinare il resto della divisione di n per 7.

- Per dire quale è il resto dobbiamo trovare nella classe di $293\cdot19$ modulo 7 il rappresentante a tale che $0\leq a<7$.
- Dividiamo per 7 : $293 = 41\cdot7+6$, $19 =2\cdot7+5$
- passiamo alle classi in Z_7 :

$$293=41\cdot7 + 6 =6 ,$$

$$19 =2\cdot7 + 5 = 5$$

- Quindi $293\cdot19 = 6 \cdot5 = 30$
- Riduciamo ancora modulo 7 : $30= 2$.
- Quindi 2 è il resto di $(293\cdot19) : 7$

Esercizio 3

Con quale cifra termina il numero 333^{222} ?

Per calcolare l'ultima cifra del numero è necessario calcolare la sua classe modulo 10.

Quindi con il calcolo in Z_{10}:

- 333^{222} è equivalente alla classe di $3^{222}=(3^2)^{111}=9^{111}$
- Che è equivalente a
- $(-1)^{111}=-1$.
- Dunque essendo -1 equivalente a 9 si ha che l'ultima cifra è 9.

Risultati ottenuti

- Promuovere una visione globale della matematica
- Promuovere la capacità di interpretare i risultati ottenuti
- Sviluppare la capacità di fare collegamenti
- Sviluppare il concetto di costruzione in matematica
- Sviluppo del linguaggio matematico attraverso l'uso di registri linguistici e simbolici diversi

Questi obiettivi di maggior respiro devono ancora essere consolidati e interiorizzati dagli studenti.

- Sapere lavorare con le classi resto
- Conoscere gli insiemi numerici e come si costruisce uno a partire dall'altro
- Conoscere le relazioni tra diversi insiemi numerici

Questi obiettivi sono stati mediamente raggiunti da tutti i ragazzi

Valutazione dell'efficacia del percorso didattico sperimentato

PRO

1. I ragazzi sono stati più partecipi alle attività
2. I ragazzi hanno sviluppato maggiormente competenze argomentative ed esplorative
3. Sviluppo di competenze di *cooperative learning*

CONTRO

1. I tempi per presentare gli argomenti sono aumentati notevolmente
2. Solo gli studenti più predisposti per la disciplina hanno potenziato la competenza di saper congetturare