REGIONE TOSCANA

Probabilità e scommesse

Grado scolastico: secondaria II grado

Area disciplinare: matematica

Liceo "E. Fermi" Cecina

Realizzato con il contributo della Regione Toscana
nell'ambito del progetto
Rete Scuole LSS a.s. 2019/2020

Probabilità e scommesse

Un approccio diverso dal solito

Classe 2C Liceo Scientifico

Liceo "E. Fermi" Cecina (LI)

Prof. Francesco Daddi

COLLOCAZIONE DEL PERCORSO EFFETTUATO NEL CURRICOLO VERTICALE

Il calcolo della probabilità ha valenza non solo dal punto di vista prettamente scolastico, ma ha importanti ricadute sul piano della cittadinanza attiva alla luce di una consapevole e corretta lettura della realtà quotidiana, dove il ricorso al dato statistico è frequente in tutti i campi (dall'economia alla politica, dalla finanza alle assicurazioni, dalla salute alla giustizia, dalla ricerca scientifica all'ecologia, insomma in ogni ambito delle attività umana).

Dalle Indicazioni Nazionali emerge: *saranno obiettivi dello studio: […] un'introduzione ai concetti di base del* ***calcolo delle probabilità e dell'analisi statistica****. […] Lo studente apprenderà la nozione di probabilità, con esempi tratti da contesti classici e con l'introduzione di nozioni di statistica. […] Un tema fondamentale di studio sara il concetto di algoritmo e l'elaborazione di strategie di risoluzioni algoritmiche nel caso di problemi semplici e di facile modellizzazione.*

OBIETTIVI ESSENZIALI DI APPRENDIMENTO

- Riconoscere l'importanza della conoscenza del calcolo della probabilità nella vita di tutti i giorni.

- Individuare in problemi la necessità di giungere alla soluzione mediante l'uso del calcolo delle probabilità.

- Riconoscere situazioni aleatorie e rappresentare mediante tabelle e grafici i risultati sperimentali ottenuti mediante elaborazioni con il foglio elettronico

- Recuperare o introdurre, nell'ambito della probabilità, altri concetti matematici: frazioni, percentuali, tabelle e grafici.

- Riconoscere una scommessa equa da una che non lo è; calcolare il guadagno (o perdita) medio in caso di scommessa non equa; stimare il guadagno (o perdita) dopo un certo numero di prove.

- Avviare alla comprensione della legge dei grandi numeri, facendo vedere in uno schema di prove ripetute, che eventi casuali, al crescere del numero delle prove, seguono una "crescente regolarità".

ELEMENTI SALIENTI DELL'APPROCCIO METODOLOGICO

Prima del percorso proposto, la classe aveva già affrontato una parte di statistica descrittiva lo scorso anno scolastico (ovvero nella classe prima), con una generica infarinatura del calcolo delle probabilità, mediante la quale la classe aveva comunque preso confidenza con i primi rudimenti. Il metodo proposto nel lavoro con la classe si è basato su queste conoscenze pregresse, partendo dalla regola del prodotto; si è cercato di avere dei modelli grafici di riferimento (tabelle, grafi), per cercare di far capire il perché della regola. Sono stati affrontati vari esempi (palline, dadi, compleanni, ecc.) in modo da spaziare il più possibile all'interno della materia. Si è passati successivamente al concetto di scommessa, centrale in tutta la teoria. Secondo Bruno De Finetti, infatti, ***"la probabilità di un evento E è il prezzo che un individuo giudica equo pagare per ricevere un importo unitario nel caso che l'evento E si verifichi"***. Sono stati proposti vari esempi, approfondendo in particolare il concetto di **scommessa equa**. Si è cercato il più possibile di adottare il metodo sperimentale in cui si cerca di analizzare la situazione alla luce di tante prove ripetute, per far vedere come un giocatore veda progressivamente impoverirsi il portafogli.

MATERIALI, APPARECCHI E STRUMENTI IMPIEGATI

- Quaderno per gli appunti
- Dadi esaedrici per eseguire delle semplici prove in classe
- Calcolatrice scientifica per il calcolo delle probabilità richieste nei vari problemi affrontati
- Software: foglio elettronico
- Fogliettini per un simulare un'estrazione di palline colorate da un'urna

AMBIENTI IN CUI È STATO SVILUPPATO IL PERCORSO

- Aula della classe per le lezioni tradizionali
- Laboratorio informatico della scuola per le numerose simulazioni con il foglio elettronico

TEMPO IMPIEGATO

- Per la messa a punto preliminare nel Gruppo LSS: 2 ore
- Per la progettazione specifica e dettagliata nella classe: 2 ore
- Tempo-scuola di sviluppo del percorso: 16 ore complessive. L’indirizzo specifico della classe prevede il progetto “FermiLab”, che consiste di ulteriori ore pomeridiane (di norma 2 settimanali) dove è possibile fare attività di laboratorio. Parte delle ore del presente percorso didattico sono state svolte nel laboratorio di informatica all’interno del FermiLab.

ALTRE INFORMAZIONI

Il percorso di probabilità seguito con la classe è durato praticamente tutto l’anno scolastico. Alla luce dell’emergenza sanitaria (marzo 2020), la progettazione del percorso didattico ha subito delle modifiche, rinunciando così ad alcune attività che avrebbero aiutato gli studenti nella comprensione dei complessi (e talvolta bizzarri) meccanismi del calcolo delle probabilità. Queste attività sono già “in cantiere” per il prossimo anno scolastico.

DESCRIZIONE DEL PERCORSO DIDATTICO

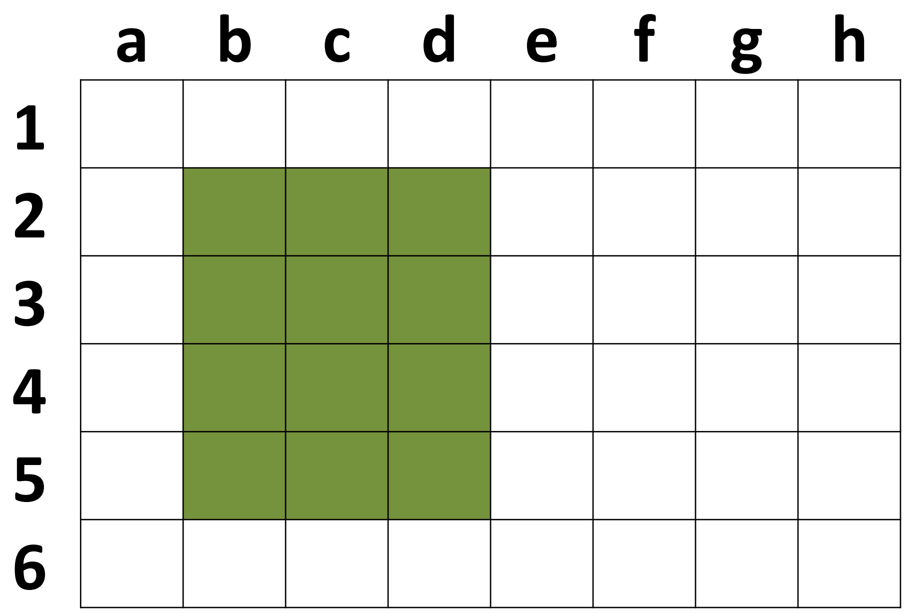
Lezione 1. Esperimenti indipendenti: la regola del prodotto

Giocando a battaglia navale consideriamo una tabella con 6 righe (numerate da 1 a 6) e 8 colonne (contrassegnate con le lettere da “a” a “h”). La tabella può essere considerata come un prodotto cartesiano:

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{a, b, c, d, e, f, g, h\} .$$

Una casella è individuata da una coppia come: (2,b), (5,a), (4,e), ecc.

Consideriamo ora un’imbarcazione posizionata nella tabella come segue:



Evidentemente si ha: **imbarcazione = {2,3,4,5} X {b,c,d}**.
Supponiamo che un giocatore spari a caso tentando di colpire l'imbarcazione; chiaramente, essendoci 4 x 3 = 12 casi favorevoli sul totale di 48 possibili, la probabilità di colpirla è data da **12/48 = 1/4.**
Vogliamo però seguire un altro ragionamento: supponiamo che il giocatore proceda operando due scelte successive, fra loro indipendenti, e cioè fissi la prima coordinata estraendo a sorte (naturalmente con uguale probabilità) un numero nell'insieme {1, 2, 3, 4, 5, 6} e poi estragga a sorte la seconda coordinata nell'insieme {a, b, c, d, e, f, g, h}. Nella prima scelta ha probabilità **4/6** di azzeccare, perché i casi favorevoli sono 4 su 6. Nella seconda scelta i casi favorevoli sono 3 su 8, quindi la probabilità di indovinare è **3/8**.
Dunque, passando dalla prima alla seconda scelta i casi possibili sono **6 x 8 = 48** (perché ogni caso si spezza in 8 casi di uguale probabilità) mentre i casi favorevoli (in modo analogo) sono **4 x 3 = 12**. Pertanto la probabilità è

$$p = \frac{4 \cdot 3}{6 \cdot 8} = \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{8} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

Estrazione di due palline con reinserimento

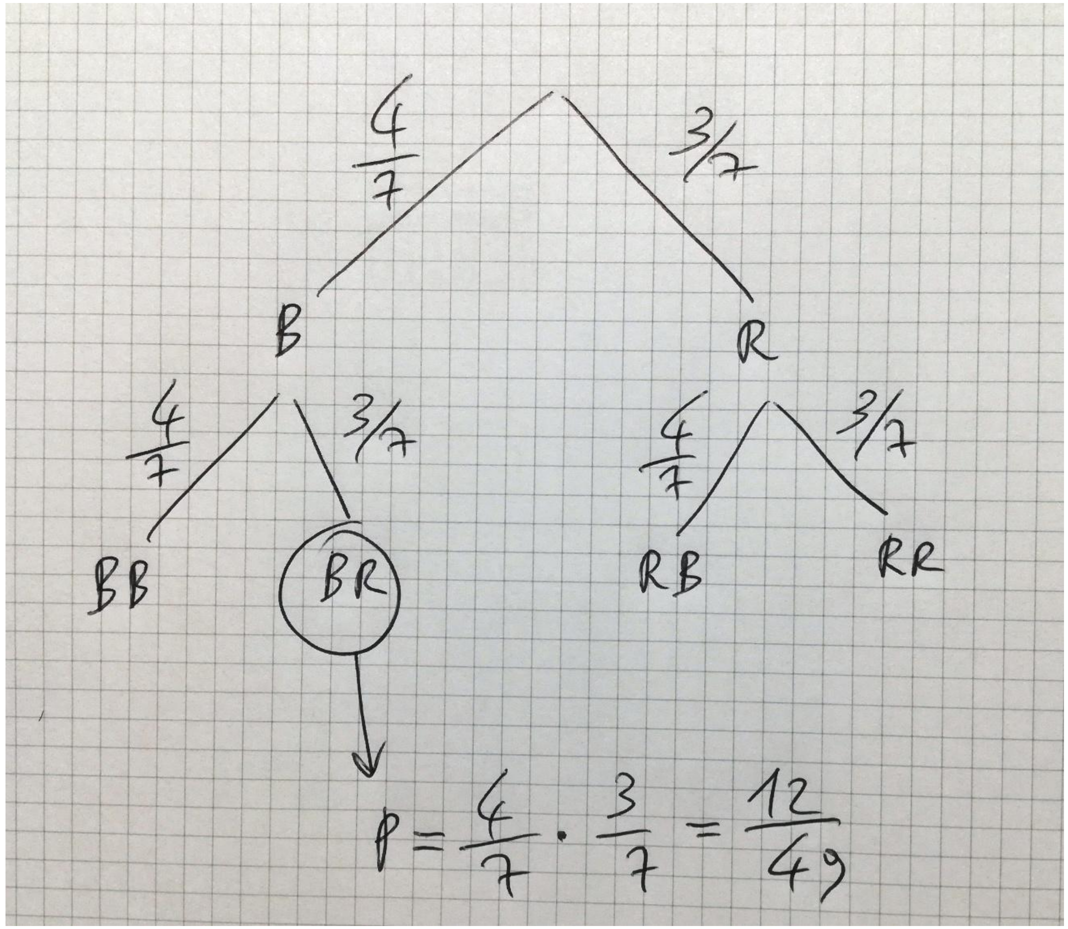
Abbiamo un sacchetto con 4 palline blu e 3 rosse. Estraendo due palline <u>con</u> reinserimento, qual è la probabilità di ottenere una pallina blu la prima volta e una pallina rossa la seconda volta? Per risolvere questo esercizio, è utile ripercorrere quanto visto in precedenza con la tabella:

	b1	**b2**	**b3**	**b4**	**r1**	**r2**	**r3**
b1							
b2							
b3							
b4							
r1							
r2							
r3							

La probabilità richiesta può essere calcolata come **rapporto di aree**:

$$p = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 7} = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{12}{49}$$

In alternativa, è possibile ricorrere ai **grafi**:



Si noti che questa è la modalità che in realtà sarà poi maggiormente seguita nella risoluzione degli esercizi.

Vediamo ora una richiesta diversa dalla precedente.

Abbiamo il solito sacchetto con 4 palline blu e 3 rosse; estraendo due palline **con reinserimento**, qual è la probabilità di ottenere **una pallina rossa e una pallina rossa**?

Per risolvere questo esercizio, in cui lo studente deve prestare attenzione al fatto che stavolta **non è indicato l'ordine di estrazione**, è utile ripercorrere quanto visto in precedenza con la tabella:

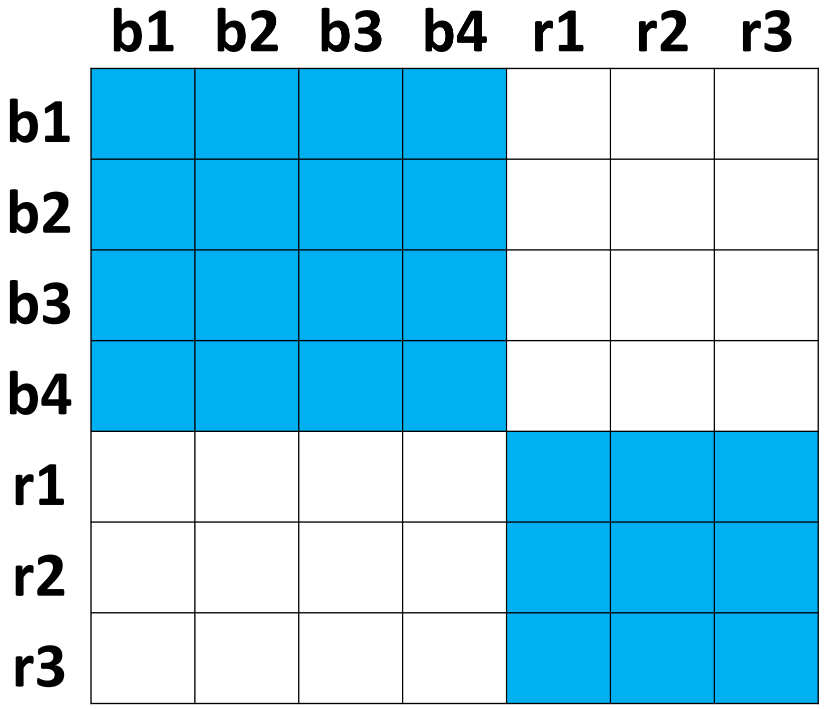
$$p = \frac{4 \cdot 3}{7 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 4}{7 \cdot 7} = \frac{24}{49}$$

	b1	**b2**	**b3**	**b4**	**r1**	**r2**	**r3**
b1							
b2							
b3							
b4							
r1							
r2							
r3							

Facendo riferimento ancora allo stesso sacchetto di palline, risolviamo il problema seguente:

Qual è la probabilità di ottenere due palline dello stesso colore?

La situazione stavolta è la seguente:



La probabilità pertanto è uguale a $p = \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 7} + \frac{3 \cdot 3}{7 \cdot 7} = \frac{25}{49}$

Estrazioni con reinserimento

Questo esercizio è stato proposto **per casa**, per rinforzare i concetti visti in classe.

Ci sono 12 palline totali in un sacchetto. Alcune alcune sono rosse e altre sono nere. La probabilità di estrarre 3 palline rosse con reinserimento è uguale a $\frac{125}{1728}$. Quante sono le palline rosse?

SOLUZIONE:

x = n° palline rosse

$$P(RRR) = \frac{x}{12} \cdot \frac{x}{12} \cdot \frac{x}{12} = \left(\frac{x}{12}\right)^3 = \frac{x^3}{12^3} = \frac{x^3}{1728}$$

Per "caso" tra $\frac{x^3}{1728}$ e $\frac{125}{1728}$ hanno lo stesso denominatore

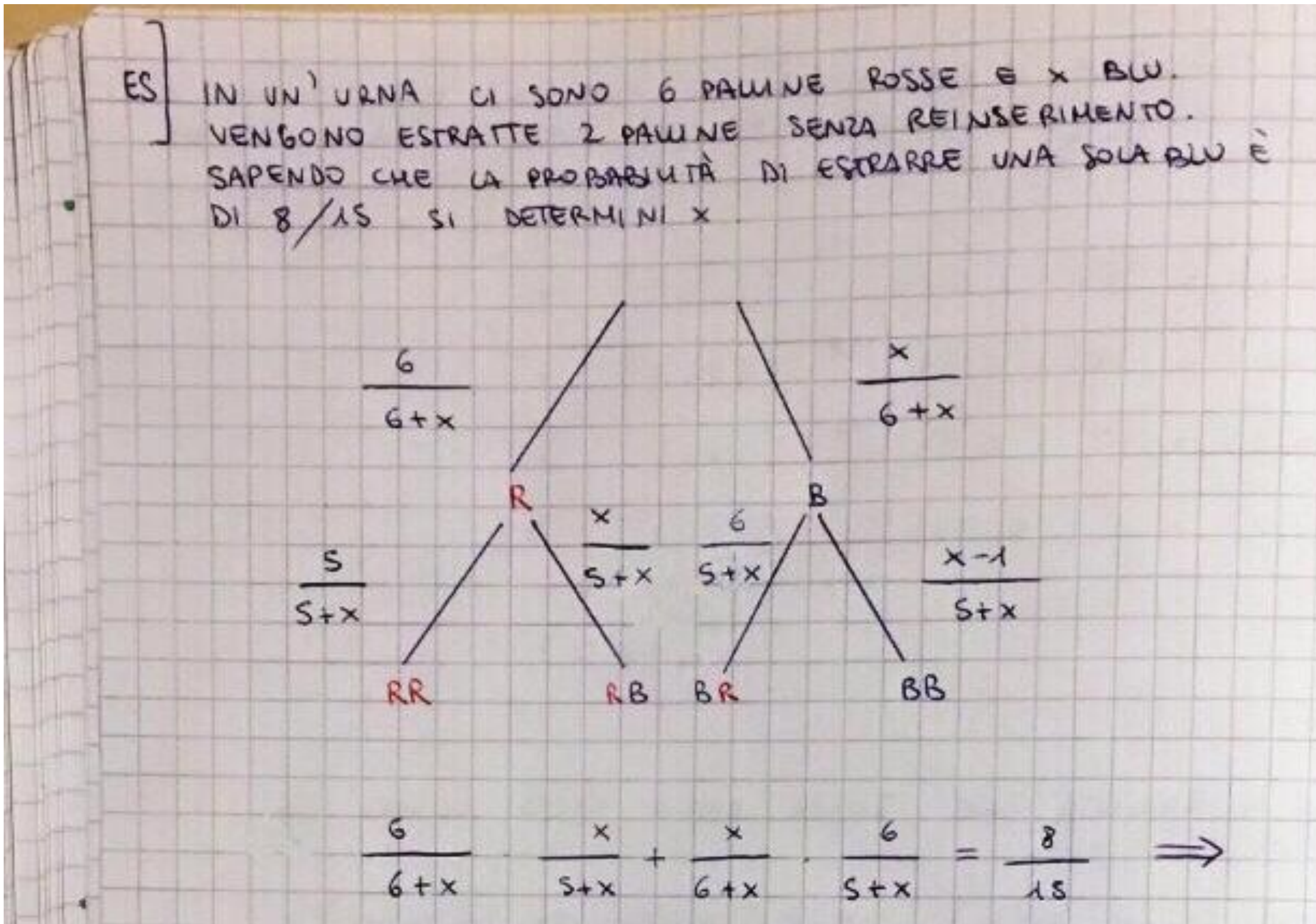
$$\frac{x^3}{\cancel{1728}} = \frac{125}{\cancel{1728}}$$

$$x^3 = 125$$

$$x = 5$$

Estrazioni senza reinserimento

<u>Lezione2</u>. Avendo analizzato estrazioni con reinserimento, facendo uso dei grafi, è risultato conveniente affrontare subito alcuni esercizi con le estrazioni **SENZA** reinserimento. Aspettare oltre sarebbe stato controproducente.



Ecco qui sotto un altro esercizio (**senza reinserimento**) assegnato per casa:

Da un sacchetto di 12 palline vengono estratte 2 palline rosse con probabilità $\frac{18}{33}$. Quante sono le palline nere. L'estrazione viene effettuata senza reinserimento.

SOLUZIONE:

x = n° palline rosse

$12-x$ = n° palline nere

$$P(rr) = \frac{18}{33}$$

$$\frac{x}{12} \cdot \frac{x-1}{11} = \frac{18}{33}$$

$$x(x-1) = \frac{12 \cdot 11 \cdot 18}{13}$$

$$x(x-1) = 72$$

Lo studente a questo punto deve prestare molta attenzione al **controllo dei risultati**. L'unica soluzione accettabile è **x = 9** (chiaramente l'altra soluzione x = -8 deve essere scartata in quanto negativa).

Dadi regolari e dadi truccati

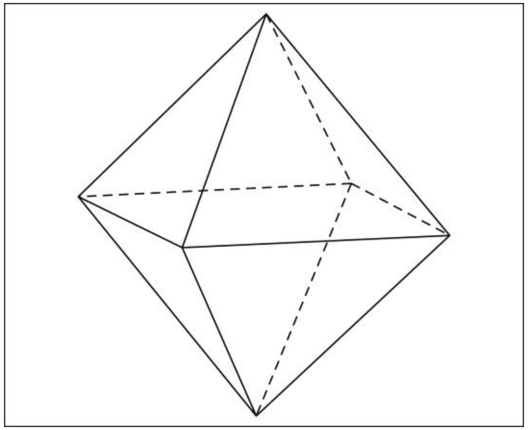
Lanciando un dado non truccato a 6 facce, qual è la probabilità di ottenere la faccia "2"? Ovviamente la risposta è = 1/6 .

Lanciando invece un dado a 6 facce, **truccato** in modo che la **faccia "2"** appaia con probabilità **3/8** e le altre facce abbiano la stessa probabilità di uscita, qual è la probabilità che, nei prossimi due lanci consecutivi, si ottenga sempre "2"?

$$p = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

Quale modello potrebbe essere scelto per rappresentare la situazione dal punto di vista pratico? Qui ci vuole un po' di fantasia…

Basta considerare un ***ottaedro***: su tre facce scriviamo "2", sulle altre cinque scriviamo invece gli altri 5 numeri.



10 lanci di un dado

Lanciando 10 volte un dado regolare a 6 facce, qual è la probabilità di ottenere <u>sempre</u> "6"?

$$p = \left(\frac{1}{6}\right)^{10} = \frac{1}{60466176} \approx 1{,}7 \cdot 10^{-8}$$

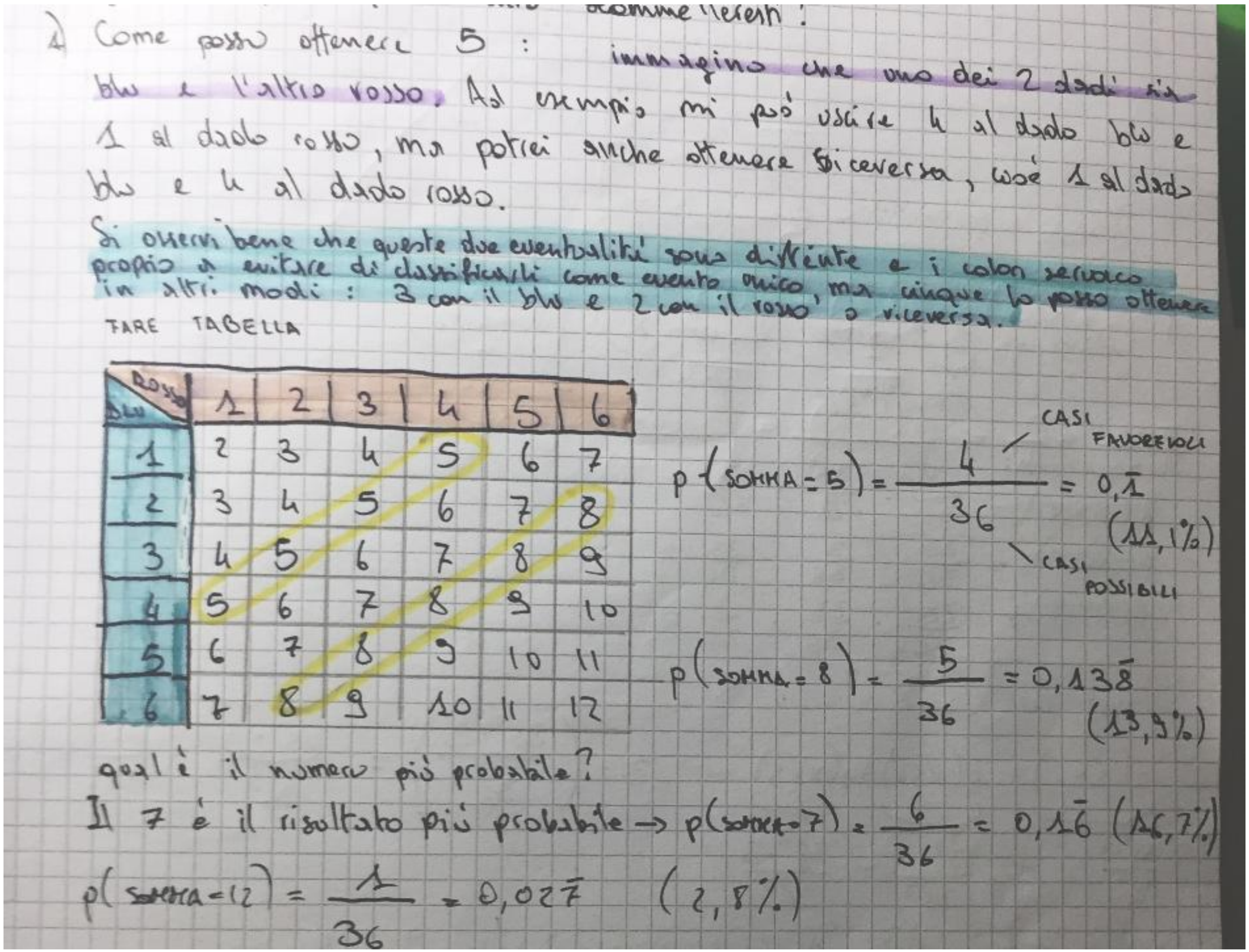
Lanciando 10 volte un dado regolare a 6 facce, qual è la probabilità di non ottenere <u>neanche una volta</u> "6"?

In questo esercizio alcuni studenti fanno confusione, interpretando erroneamente questo evento come il complementare di quello appena calcolato. La soluzione si basa sul fatto che non ottenere "6" in ogni singolo lancio ha probabilità = 5/6, quindi risulta

$$p = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = \frac{9765625}{60466176} \approx 0{,}16$$

Singolo lancio di una coppia di dadi

Lanciando una coppia di dadi regolari a 6 facce, qual è la probabilità di ottenere come somma "5"? E "8"? Su quale evento <u>scommetteresti</u>?


1) Come posso ottenere 5: immagino che uno dei 2 dadi sia blu e l'altro rosso. Ad esempio mi può uscire 4 al dado blu e 1 al dado rosso, ma potrei anche ottenere viceversa, cioè 1 al dado blu e 4 al dado rosso.
Si osservi bene che queste due eventualità sono differenti e i colori servono proprio a evitare di classificarli come evento unico, ma cinque lo posso ottenere in altri modi: 3 con il blu e 2 con il rosso o viceversa.
FARE TABELLA

Blu \ Rosso	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$p(\text{SOMMA}=5) = \frac{4}{36} = 0,\bar{1} \quad (11,1\%)$$

CASI FAVOREVOLI; CASI POSSIBILI

$$p(\text{SOMMA}=8) = \frac{5}{36} = 0,13\bar{8} \quad (13,9\%)$$

qual è il numero più probabile?
Il 7 è il risultato più probabile $\rightarrow p(\text{somma}=7) = \frac{6}{36} = 0,1\bar{6}$ (16,7%)

$$p(\text{somma}=12) = \frac{1}{36} = 0,02\bar{7} \quad (2,8\%)$$

Si vede chiaramente che la tabella è un metodo molto comodo perché permette di tenere sotto controllo la situazione.

Nel caso di due dadi regolari, questa tavola è detta "***tavola dell'addizione***".

Possiamo analizzare che cosa succede se abbiamo **due dadi <u>diversi</u>**, ad esempio un dado a 4 facce e un dado a 8 facce, chiedendoci la probabilità di ottenere "9" come somma delle due facce uscite:

$$p = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9
6	7	8	9	10
7	8	9	10	11
8	9	10	11	12

Tre lanci di due dadi

Lanciando tre volte una coppia di dadi equilibrati a 6 facce, qual è la probabilità di ottenere "10" esattamente una volta?

Indicando con "S" il successo (ottenere "10") e con "X" l'insuccesso (ovvero una somma diversa da 10), si elencano i casi favorevoli:

S X X

X S X

X X S

Nel primo caso la probabilità è $P(SXX) = \frac{3}{36} \cdot \frac{33}{36} \cdot \frac{33}{36} = \frac{121}{1728}$

Nel secondo caso la probabilità è $P(XSX) = \frac{33}{36} \cdot \frac{3}{36} \cdot \frac{33}{36} = \frac{121}{1728}$

Nel terzo caso la probabilità è $P(XXS) = \frac{33}{36} \cdot \frac{33}{36} \cdot \frac{3}{36} = \frac{121}{1728}$

La probabilità richiesta è data dalla somma, ed è pertanto = $3 \cdot \frac{121}{1728} = \frac{121}{576} \approx 0{,}21$

Come esercizio di rinforzo, ho proposto il seguente:

Lanciando tre volte una coppia di dadi equilibrati a 6 facce, qual è la probabilità di ottenere <u>almeno</u> due volte "9"?

In questo caso lo studente deve fare attenzione al significato di "***<u>almeno</u>***".

Qual è la probabilità di ottenere almeno due volte 9 in 3 lanci?

S → ottengo "9"

X → non ottengo "9"

$$P(SSX) = \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{32}{36}$$

$$P(SXS) = \frac{4}{36} \cdot \frac{32}{36} \cdot \frac{4}{36}$$

$$P(XSS) = \frac{32}{36} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{36}$$

$$P(SSS) = \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{36} \cdot \frac{4}{36}$$

P(IN 3 LANCI ALMENO 2 VOLTE "9") =

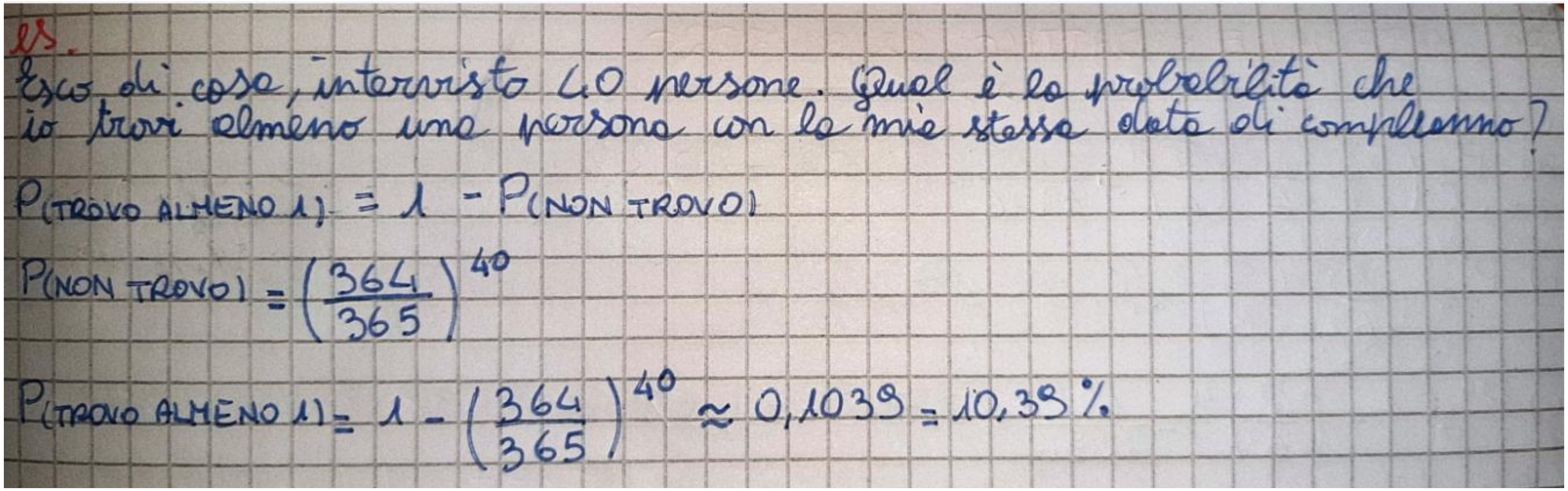
$$P(SSX) + P(SXS) + P(XSS) + P(SSS) =$$

$$3 \cdot \left(\left(\frac{4}{36}\right)^2 \cdot \frac{32}{36} \right) + \left(\frac{4}{36}\right)^3 = \frac{25}{729} \simeq 0{,}034$$

Intervistare 40 persone sul loro compleanno

Esco di casa e intervisto 40 persone. Qual è la probabilità che trovi almeno una persona con la mia stessa data di compleanno?

Si noti che l'anno non ci interessa; ovviamente supponiamo una distribuzione uniforme delle nascite e ignoriamo i bisestili.



es.

Esco di casa, intervisto 40 persone. Qual è la probabilità che io trovi almeno una persona con la mia stessa data di compleanno?

$P(\text{TROVO ALMENO } 1) = 1 - P(\text{NON TROVO})$

$P(\text{NON TROVO}) = \left(\frac{364}{365}\right)^{40}$

$P(\text{TROVO ALMENO } 1) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^{40} \approx 0{,}1039 = 10{,}39\%$

Anche se gli studenti **non conoscono ancora i logaritmi**, è stato interessante far calcolare loro il minor numero di persone in modo che la probabilità suddetta superi il 50%. I ragazzi hanno capito che la calcolatrice permette di **fare delle stime** (competenza fondamentale da acquisire) e, con un po' di pazienza e metodo, ci aiuta a determinare la soluzione (intera) del problema.

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{100} \approx 0{,}24$$

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{200} \approx 0{,}42$$

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{300} \approx 0{,}56$$

Questo problema è stato l'occasione per introdurre, seppur in modo poco approfondito, **il metodo di bisezione**. Alla fine, alcuni ragazzi indipendentemente dal docente, sono finalmente arrivati alla soluzione ($n = 253$):

$$1-\left(\frac{364}{365}\right)^{253} \approx 0{,}5005$$

Visto che la probabilità è molto vicina a 0,5 possiamo affermare che possiamo scommettere (quasi) alla pari di trovare almeno una persona sui 253 intervistati che festeggia il compleanno nel mio stesso giorno.

Introduzione al concetto di scommessa equa

<u>Lezione 3</u>. Consideriamo un sacchetto contenente 5 palline, di cui 3 rosse e 2 blu. Augusto e Bernardo fanno il seguente gioco: Augusto riceve 3 euro da Bernardo se la pallina estratta è rossa, mentre in caso contrario Bernardo dà 4 euro ad Augusto. Vediamo qual è il risultato probabile del gioco, quando lo si gioca per un numero N molto grande di volte (ogni volta la pallina estratta viene rimessa nel sacchetto).
Se la pallina rossa è estratta per R volte, ci interessa sapere quanto ricava in media Augusto per ogni estrazione: Augusto riceve 3R euro, quindi per ogni estrazione riceve 3R/N. Se ammettiamo che il numero R/N (frequenza relativa) possa essere sostituito con la probabilità (= 3/5), **il ricavo possibile di Augusto è = 3/5 * 3 = 1,80 euro per ogni estrazione.** Nello stesso tempo, però, Augusto ha una perdita di 4 euro tutte le volte che esce una pallina blu; quindi **Augusto ha una perdita probabile uguale a 2/5 * 4 = 1,60 euro per ogni estrazione.**
In definitiva, Augusto ha un guadagno medio di 0,20 euro (=1,80-1,60 euro) per ogni estrazione; è molto probabile, pertanto, che dopo una lunga serie di estrazioni, Augusto risulti vincitore con un guadagno medio vicino a 0,20 euro per ogni estrazione. **La scommessa, quindi, NON è equa.** Tuttavia la fortuna è "capricciosa" e può benissimo accadere, specialmente dopo una serie non troppo lunga di partite, che le cose vadano in modo diverso.

A questo punto abbiamo eseguito delle simulazioni **utilizzando il foglio elettronico**:

n	casuale	rossa	blu	guadagno
1	=CASUALE.TRA(1;5)	=SE(B2<=3;1;0)	=SE(B2>3;1;0)	=3*C2-4*D2
=1+A2	=CASUALE.TRA(1;5)	=SE(B3<=3;1;0)	=SE(B3>3;1;0)	=F2+3*C3-4*D3
=1+A3	=CASUALE.TRA(1;5)	=SE(B4<=3;1;0)	=SE(B4>3;1;0)	=F3+3*C4-4*D4

Abbiamo notato che, se il numero di prove non è molto alto, può accadere che Augusto sia in perdita, ma **alla lunga Augusto ci guadagna**. Dalla tabella emerge che, anche con **600 prove**, siamo lontani dal valore teorico (= 0,20 euro).

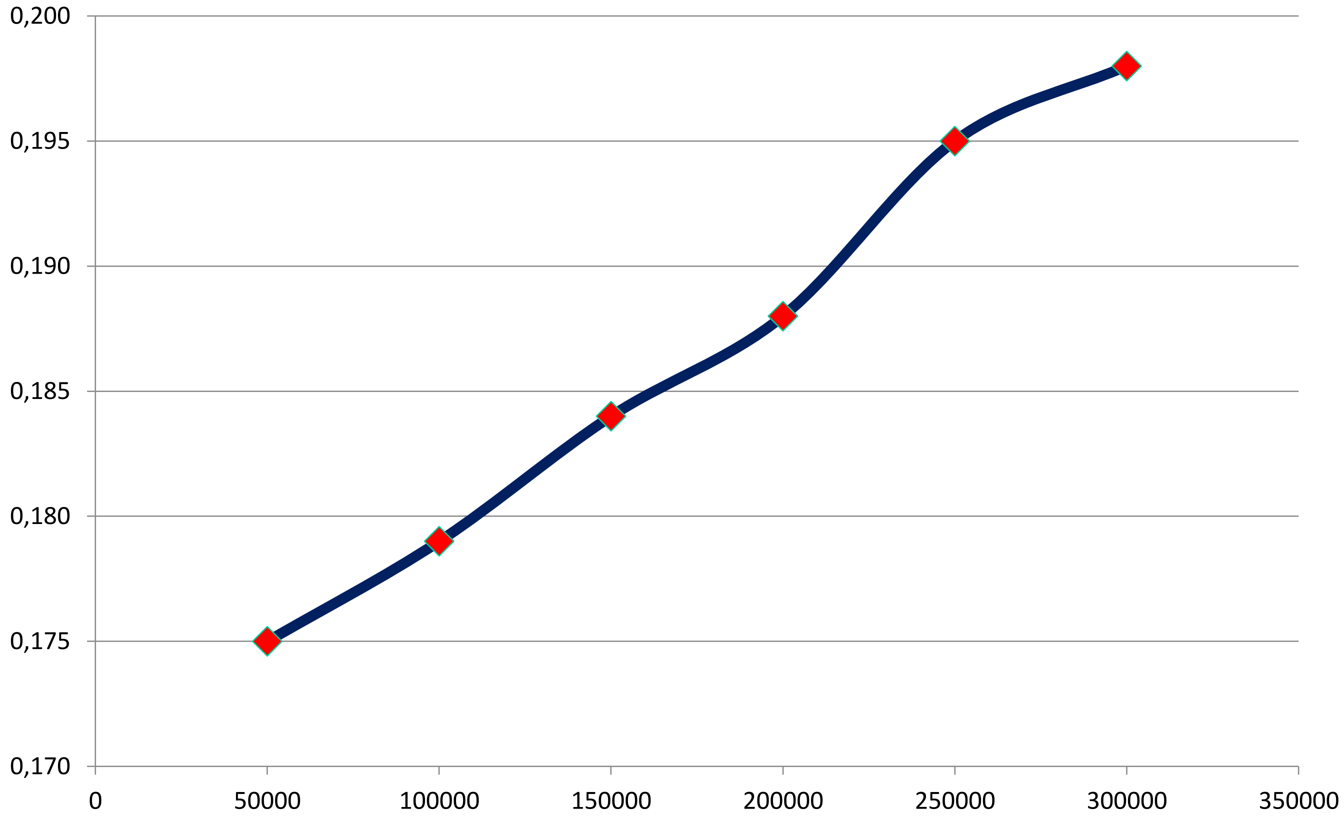
estrazioni	guadagno	guadagno medio
50	-7	-0,140
100	-18	-0,180
150	6	0,040
200	44	0,220
250	61	0,244
300	99	0,330
350	67	0,191
400	14	0,035
450	-18	-0,040
500	-15	-0,030
550	30	0,055
600	47	0,078

Con un gran numero di prove possiamo notare che il guadagno medio tende ad avvicinarsi al valore teorico calcolato (= 0,20 euro ad estrazione).

estrazioni	guadagno	guadagno medio
1000	228	0,228
10000	1608	0,161
50000	8733	0,175
100000	17942	0,179
150000	27627	0,184
200000	37529	0,188
250000	48831	0,195
300000	59251	0,198

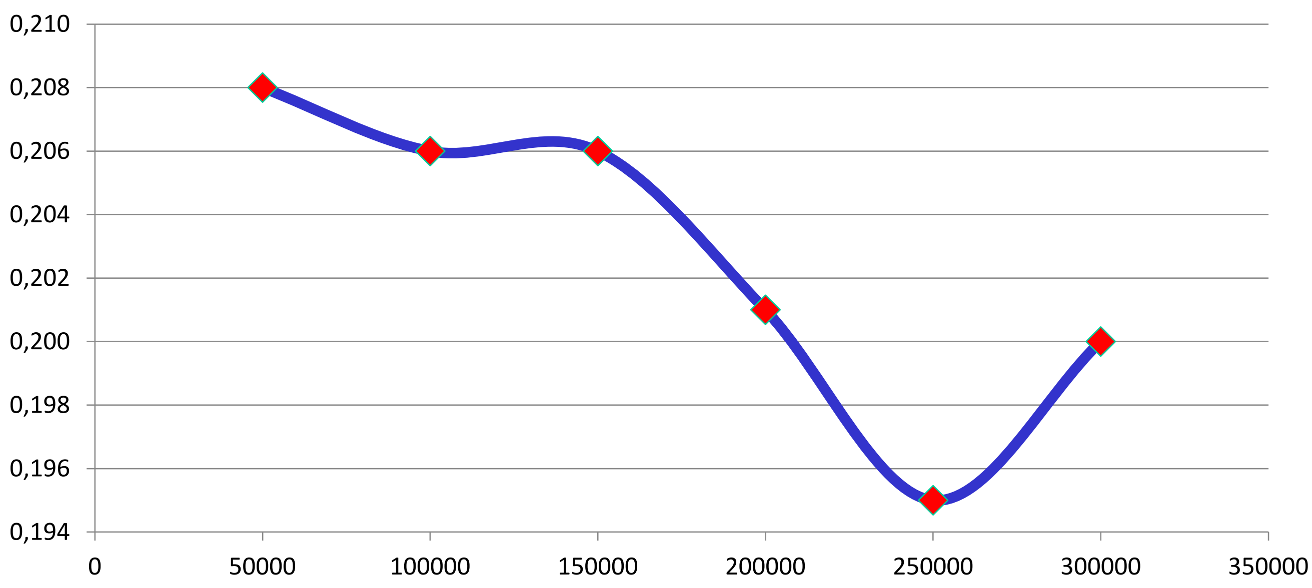
Infatti il risultato 0,198 è “vicino” a 0,20 (valore teorico). Ho inoltre fatto notare agli studenti che, confrontando i risultati relativi a due n diversi, può capitare di ottenere un guadagno medio più vicino a 0,20 con un numero inferiore di prove; nella tabella è sufficiente confrontare **n=1000 (0,228 euro)** con **n=10000 (0,161 euro)**.

Tracciando il grafico relativo è possibile osservare che il guadagno medio si avvicina a 0,20 euro. Eseguendo tante simulazioni (sempre con il foglio elettronico), si osserva che la metà delle volte il grafico non oscilla attorno al valore teorico, ma si avvicina dal basso (come in questo caso) oppure dall’alto.



Questo è uno dei casi <u>più difficili da ottenere</u> in quanto si ha un’oscillazione attorno a 0,20 euro.

estrazioni	guadagno	guadagno medio
1000	382	0,382
10000	1755	0,176
50000	10420	0,208
100000	20560	0,206
150000	30931	0,206
200000	40259	0,201
250000	48747	0,195
300000	59972	0,200



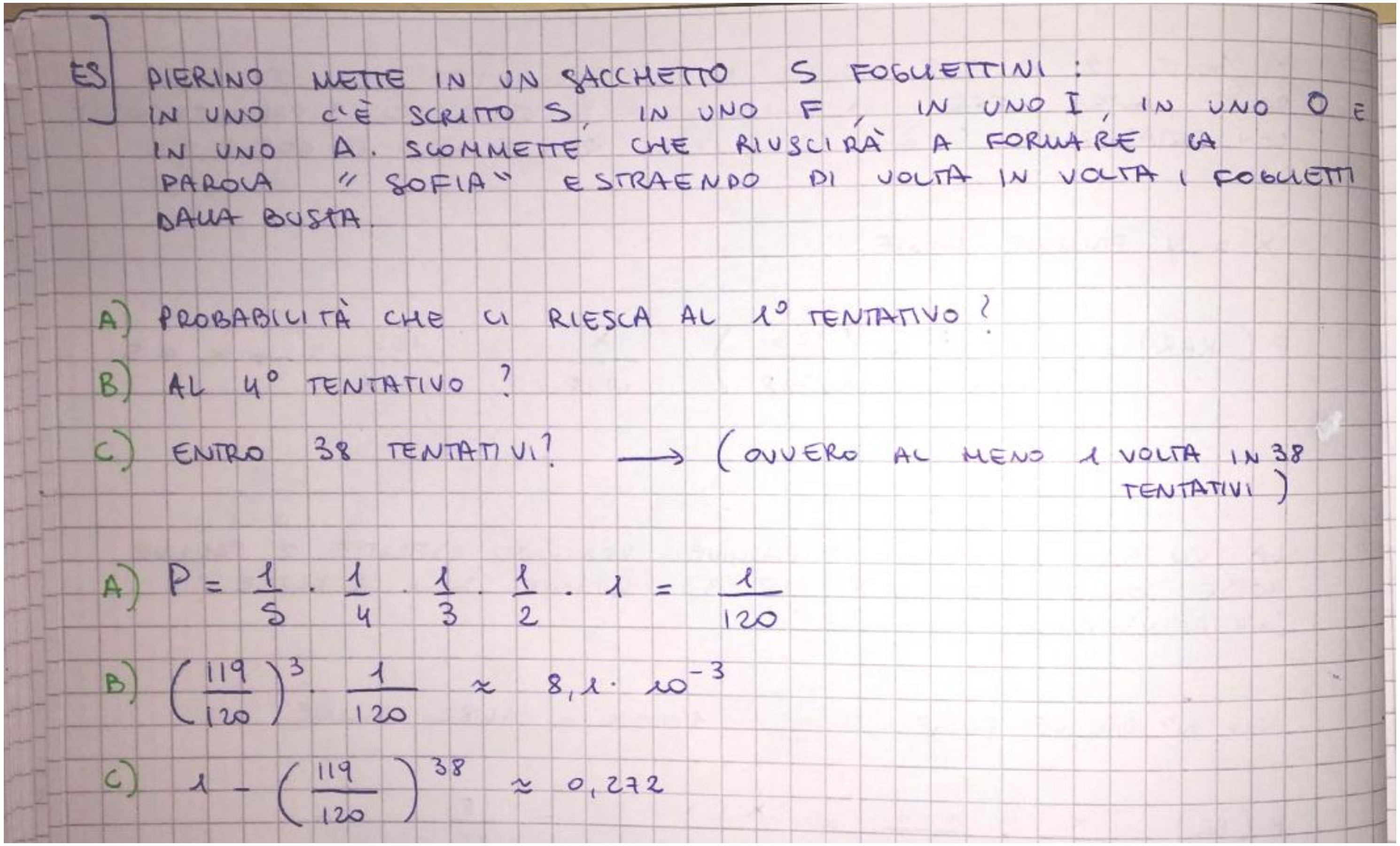
La domanda naturale da porre alla classe è la seguente: quanto dovrebbe pagare Augusto per rendere **equa** la scommessa? Vogliamo cioè far sì che **il guadagno medio risulti pari a 0**. Indicata con x la "quota" da pagare, deve essere:

$$3 \cdot \frac{3}{5} + (-x) \cdot \frac{2}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4{,}50 \ \ euro$$

estrazioni	guadagno	guadagno medio
50000	-75	-0,002
100000	-457,5	-0,005
150000	-330	-0,002
200000	187,5	0,001
250000	1132,5	0,005
300000	352,5	0,001

estrazioni	guadagno	guadagno medio
50000	-705	-0,014
100000	-660	-0,007
150000	712,5	0,005
200000	945	0,005
250000	30	0,000
300000	-150	-0,001

Un problema sulle permutazioni



ES] PIERINO METTE IN UN SACCHETTO 5 FOGLIETTINI: IN UNO C'È SCRITTO S, IN UNO F, IN UNO I, IN UNO O E IN UNO A. SCOMMETTE CHE RIUSCIRÀ A FORMARE LA PAROLA "SOFIA" ESTRAENDO DI VOLTA IN VOLTA I FOGLIETTI DALLA BUSTA.

A) PROBABILITÀ CHE CI RIESCA AL 1° TENTATIVO?

B) AL 4° TENTATIVO?

C) ENTRO 38 TENTATIVI? → (OVVERO AL MENO 1 VOLTA IN 38 TENTATIVI)

A) $P = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{120}$

B) $\left(\frac{119}{120}\right)^3 \cdot \frac{1}{120} \approx 8{,}1 \cdot 10^{-3}$

C) $1 - \left(\frac{119}{120}\right)^{38} \approx 0{,}272$

A partire da questo esercizio, alla fine ho chiesto quale sarebbe il **biglietto x da pagare** per scommettere <u>alla pari</u> con l'evento C, se in caso di vincita si riscuotono 5 euro.

Per il biglietto: $(5 - x) \cdot \left(1 - \left(\frac{119}{120}\right)^{38}\right) + (-x) \cdot \left(\frac{119}{120}\right)^{38} = 0 \quad \rightarrow \quad x \approx 1{,}36\ euro$

Problema dei compleanni coincidenti

Lezione 4. Pierino viene invitato a una festa di compleanno dove ci sono 8 persone in totale. Gli viene in mente di fare una scommessa: se riuscirà a trovare almeno una coppia di persone che compiono gli anni nello stesso giorno riceverà 10 euro.

In caso contrario, dovrà pagare 1,30 euro. Si tratta di una scommessa equa?

Si tratta di un esercizio più impegnativo del precedente e occorre un approccio diverso. Non solo: alcuni studenti, avendo già affrontato un problema sui compleanni, hanno fatto parecchia confusione… Ho fatto notare la sostanziale differenza tra i due problemi.

Conviene in questo caso calcolare la **probabilità dell'evento contrario**.

Si mettono in fila le 8 persone: la prima segna sul calendario la sua data di compleanno, la seconda fa la stessa cosa (ha probabilità **364/365** di non segnare la stessa data del primo), la terza ha probabilità **363/365** di trovare spazio libero sul calendario, e così via fino all'ottavo che ha una probabilità pari a **358/365**.

A questo punto è sufficiente moltiplicare queste singole probabilità (si veda la diapositiva successiva):

Quand'è che Pierino perde? Perde se e solo se le 8 persone hanno compleanni in giorni distinti.

È più facile calcolare quest'ultima probabilità.

SOLUZIONE

$$P(\text{PERDE}) = \underbrace{\frac{365}{365}}_{1^a p.} \cdot \underbrace{\frac{364}{365}}_{2^a p.} \cdot \underbrace{\frac{363}{365}}_{3^a p.} \cdot \underbrace{\frac{362}{365}}_{4^a p.} \cdot \underbrace{\frac{361}{365}}_{5^a p.} \cdot \underbrace{\frac{360}{365}}_{6^a p.} \cdot \underbrace{\frac{359}{365}}_{7^a p.} \cdot \underbrace{\frac{358}{365}}_{8^a p.} \simeq 0,92566$$

$$P(\text{VINCE}) = 1 - P(\text{PERDE}) = 0,074335 = 7,4335\ \%$$

Se consideriamo 23 persone si ha una probabilità pari a circa 50,7. Dato che 23 è un numero "basso", ed è proprio per questo motivo che questo problema è universalmente conosciuto come **"paradosso del compleanno"**.

Da notare che alcuni studenti pensavano che, per avere una probabilità maggiore del 50%, fossero necessari almeno 183 persone (ragionando erroneamente e cercando un valore vicino alla metà di 365).

Restava da analizzare la scommessa:

Se vince Pierino prende 10 €. Quanto deve pagare in caso di sconfitta affinché il gioco sia equilibrato?

$$10€ \cdot 0{,}074335 + (-x) \cdot 0{,}92566 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{-10€ \cdot 0{,}074335}{-0{,}92566} \simeq 0{,}80\,€$$

Nel nostro caso, quindi, **la scommessa <u>non</u> è equa**:
Pierino è ovviamente svantaggiato, dal momento che risulta

$$\mathbf{1{,}30 > 0{,}80}$$

Quante estrazioni per l'ultima pallina blu?

Il seguente problema è servito come propedeutico per uno successivo:

In una scatola ci sono 5 palline, di cui 3 rosse e 2 blu. Enrico estrae a caso una pallina ala volta, senza reinserimento, fino a quando non restano più palline blu nella scatola. Qual è la probabilità che l'ultima pallina blu sia estratta esattamente dopo k estrazioni?

Ovviamente il numero minimo di estrazioni è k = 2, mentre il massimo è k = 5.
Vediamo il caso **k = 2**:
L'unico caso favorevole è **BB** (ossia Blu alla prima estrazione e Blu alla seconda), per cui la probabilità è

$$p(BB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

Nel caso **k = 3** i casi favorevoli sono due: **RBB, BRB**, per cui si ha

$$p(RBB) + p(BRB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

Caso k = 4 : i casi favorevoli sono **RRBB, RBRB, BRRB** per cui si ha

$$p(RRBB) + p(RBRB) + p(BRRB) =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

Per affrontare infine il caso **k = 5** possiamo agire come visto nei tre casi precedenti, ma possiamo sfruttare il fatto che la somma delle quattro probabilità deve essere uguale a 1. Si trova che la probabilità richiesta è

$$p = 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10}\right) = \frac{2}{5}$$

Come buona regola da seguire in questi casi, ho suggerito agli studenti di verificare il risultato (cioè 2/5) come esercizio assegnato per casa.

Per questo problema abbiamo deciso di fare una simulazione.
In assenza di biglie colorate, ciascun studente ha creato **5 foglietti** sui quali ha scritto **B, B, R, R, R** e ha iniziato a estrarre a caso i foglietti fino ad esaurire quelli recanti la scritta “B”. Tutto ciò è stato ripetuto per 3 volte, dopodiché abbiamo messo insieme i risultati (54 in totale, un numero piccolo ma è stata un’esperienza che è rimasta impressa proprio perché la classe è stata la vera protagonista).

numero di estrazioni	**2**	**3**	**4**	**5**
frequenza assoluta	6	14	16	18
frequenza assoluta teorica	5,40	10,80	16,20	21,60

Il risultato ci ha soddisfatto solo in parte. Nella settimana successiva, sfruttando le ore della **sperimentazione “FermiLab”**, abbiamo eseguito dapprima **2000 prove** utilizzando il foglio elettronico:

casuale	**estraz.**	**blu**	**rosse**	
=CASUALE()	0	2	=5-I3	
=CASUALE()	=1+H3	=SE(G3<I3/(I3+J3);I3-1;I3)	=4-I4	
=CASUALE()	=1+H4	=SE(G4<I4/(I4+J4);I4-1;I4)	=3-I5	=SE(I5=0;H5)
=CASUALE()	=1+H5	=SE(G5<I5/(I5+J5);I5-1;I5)	=2-I6	=SE(I6=0;H6)
=CASUALE()	=1+H6	=SE(G6<I6/(I6+J6);I6-1;I6)	=1-I7	=SE(I7=0;H7)
	=1+H7	=SE(G7<I7/(I7+J7);I7-1;I7)	0	=SE(I8=0;H8)
				=MIN(K5:K8)

Questi sono stati i risultati (**2000 prove**):

num. Estrazioni	2	3	4	5
frequenza sperim.	210	374	580	836
frequenza teorica	200	400	600	800

num. Estrazioni	2	3	4	5
frequenza relat. sperim.	0,105	0,187	0,290	0,418
frequenza rel. teorica	0,100	0,200	0,300	0,400

Successivamente abbiamo eseguito **10000 prove**:

num. Estrazioni	2	3	4	5
frequenza sperim.	1054	2018	2973	3955
frequenza teorica	1000	2000	3000	4000

num. Estrazioni	2	3	4	5
frequenza relat. sperim.	0,105	0,202	0,297	0,396
frequenza rel. teorica	0,100	0,200	0,300	0,400

Si nota che, aumentando il numero di prove, le frequenze relative sperimentali tendono ad avvicinarsi alle loro corrispondenti teoriche.

Tutto per una frittata…

<u>Lezione 5</u>. Il cuoco Rémy ha 12 uova, ma sa che due di queste sono vecchie. Se deve fare una frittata con 2 uova, si risponda alle seguenti domande, sapendo che rompe un uovo alla volta.

a) Qual è la probabilità che sia fortunato, ossia che gli sia sufficiente rompere in totale solo due uova?

b) Qual è la probabilità che ne debba rompere in totale esattamente 3?

c) Qual è la probabilità che ne debba rompere in totale esattamente 4?

d) Rémy fa una scommessa con il suo collega Alfredo:

- **se riesce a non rompere neanche un uovo vecchio vincerà 5,00 euro;**
- **se invece rompe esattamente un uovo vecchio perderà 10,00 euro;**
- **se rompe entrambe le uova vecchie dovrà pagare 13,00 euro ad Alfredo.**

Si tratta di una scommessa equa?

Procedendo come visto in precedenza (si parla di uova al posto delle palline, ma è sostanzialmente lo stesso esercizio) si ricavano le singole probabilità:

$$p_a = \frac{15}{22} \;,\quad p_b = \frac{6}{22} \;,\quad p_c = \frac{1}{22}$$

Per quanto riguarda la scommessa abbiamo:

$$5{,}00 \cdot \frac{15}{22} + (-10{,}00) \cdot \frac{6}{22} + (-13{,}00) \cdot \frac{1}{22} = \frac{1}{11} \approx 0{,}09 \ \textit{euro}.$$

Non si tratta di una scommessa equa, in quanto. **Rémy è favorito (il suo *guadagno medio* è infatti positivo).**
Per renderla equa potrebbero accordarsi facendo pagare 15,00 euro (invece di 13,00 euro) nel terzo caso. Il valore 15 è stato individuato dalla classe (praticamente i ragazzi hanno ripreso l'equazione scritta in precedenza dove hanno inserito l'incognita x al posto di (-13).

Per far capire meglio il concetto di **vincita media**, abbiamo fatto la seguente simulazione con il foglio elettronico: prima con il caso "13 euro" (scommessa non equa), successivamente con il caso "15 euro" (scommessa equa):

Questo è lo schema che abbiamo implementato sul foglio elettronico:

n. prove	casuale	2 uova rotte	3 uova rotte	4 uova rotte	**guadagno**
1	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D4<=15;1;0)	=SE(E(D4>15;D4<=21);1;0)	=SE(D4=22;1;0)	**=5*E4-10*F4-13*G4**
=1+C4	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D5<=15;1;0)	=SE(E(D5>15;D5<=21);1;0)	=SE(D5=22;1;0)	**=H4+5*E5-10*F5-13*G5**
=1+C5	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D6<=15;1;0)	=SE(E(D6>15;D6<=21);1;0)	=SE(D6=22;1;0)	**=H5+5*E6-10*F6-13*G6**
=1+C6	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D7<=15;1;0)	=SE(E(D7>15;D7<=21);1;0)	=SE(D7=22;1;0)	**=H6+5*E7-10*F7-13*G7**
=1+C7	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D8<=15;1;0)	=SE(E(D8>15;D8<=21);1;0)	=SE(D8=22;1;0)	**=H7+5*E8-10*F8-13*G8**
=1+C8	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D9<=15;1;0)	=SE(E(D9>15;D9<=21);1;0)	=SE(D9=22;1;0)	**=H8+5*E9-10*F9-13*G9**
=1+C9	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D10<=15;1;0)	=SE(E(D10>15;D10<=21);1;0)	=SE(D10=22;1;0)	**=H9+5*E10-10*F10-13*G10**
=1+C10	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D11<=15;1;0)	=SE(E(D11>15;D11<=21);1;0)	=SE(D11=22;1;0)	**=H10+5*E11-10*F11-13*G11**
=1+C11	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D12<=15;1;0)	=SE(E(D12>15;D12<=21);1;0)	=SE(D12=22;1;0)	**=H11+5*E12-10*F12-13*G12**
=1+C12	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D13<=15;1;0)	=SE(E(D13>15;D13<=21);1;0)	=SE(D13=22;1;0)	**=H12+5*E13-10*F13-13*G13**
=1+C13	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D14<=15;1;0)	=SE(E(D14>15;D14<=21);1;0)	=SE(D14=22;1;0)	**=H13+5*E14-10*F14-13*G14**
=1+C14	=CASUALE.TRA(1;22)	=SE(D15<=15;1;0)	=SE(E(D15>15;D15<=21);1;0)	=SE(D15=22;1;0)	**=H14+5*E15-10*F15-13*G15**

È utile far osservare alla classe che, se le prove sono poche, il cuoco **<u>può</u>** essere in perdita. Ma fin qui niente di così strano…

n. prove	casuale	2 uova rotte	3 uova rotte	4 uova rotte	**guadagno**
1	9	1	0	0	**5**
2	4	1	0	0	**10**
3	18	0	1	0	**0**
4	6	1	0	0	**5**
5	12	1	0	0	**10**
6	9	1	0	0	**15**
7	14	1	0	0	**20**
8	22	0	0	1	**7**
9	11	1	0	0	**12**
10	21	0	1	0	**2**
11	20	0	1	0	**-8**
12	4	1	0	0	**-3**

Se invece le prove sono **“tante”**, il cuoco non può essere in perdita (per essere più precisi: la probabilità che ciò accada con un numero molto grande di prove è così piccola da poterla trascurare senza troppi problemi).
Ecco i risultati ottenuti con **3 milioni di prove**. Si osserva come il guadagno medio sia “vicino” a quello teorico (=1/11 , ossia circa 0,090 euro)

n. prove	guadagno	Guadagno medio
300000	28695	**0,0957**
600000	53295	**0,0888**
900000	80451	**0,0894**
1200000	101808	**0,0848**
1500000	128271	**0,0855**
1800000	160947	**0,0894**
2100000	188199	**0,0896**
2400000	217824	**0,0908**
2700000	241998	**0,0896**
3000000	270204	**0,0901**

Per approfondire la situazione è stato utile analizzare il caso in cui la scommessa risulta **equa**. Si tratta cioè di modificare il file sul foglio elettronico inserendo "15" al posto di "13". **I ragazzi si aspettavano di ottenere, con il crescere del numero di prove, un guadagno sempre più vicino a zero.** Sono rimasti molto colpiti quando hanno visto che i risultati erano in valore assoluto ***molto grandi*** rispetto a quanto previsto, **a volte positivi** (il cuoco alla fine guadagna) e **a volte negativi** (il cuoco alla fine perde).

n. prove	guadagno	media/prova
300000	4000	**0,0133**
300000	2785	**0,0093**
300000	-8875	**-0,0296**
300000	2810	**0,0094**
300000	-735	**-0,0025**
300000	-4020	**-0,0134**
300000	-1185	**-0,0040**
300000	245	**0,0008**
300000	-4215	**-0,0141**
300000	4285	**0,0143**

La roulette francese

<u>Lezione 6</u>. Quindi la conclusione è stata: **se la scommessa è equa NON significa che dopo tante prove saremo in pareggio (o quasi).** La scommessa equa implica che non sappiamo, a priori, **<u>chi dei due sarà in perdita</u>.**

Questo è un aspetto poco intuitivo del calcolo delle probabilità.

Per chiarire ulteriormente l'importanza dei concetti in gioco, abbiamo affrontato il problema della **roulette francese**:

ci sono 37 settori, numerati da 0 a 36. Si punta su un numero e, se esce proprio quel numero, si guadagnano 35 euro, in caso contrario, si perde 1 euro. Che cosa accade se si gioca <u>tante</u> volte? Il **<u>guadagno medio è negativo</u>** (i casinò la sanno lunga, d'altronde non sono organizzazioni di beneficenza …)

$$g = 35 \cdot \frac{1}{37} + (-1) \cdot \frac{36}{37} = -\frac{1}{37} \approx -0{,}027 \; euro.$$

Questi sono i risultati ottenuti con il foglio elettronico:

prove	guadagno	**guadagno medio**
100	80	**0,800**
500	220	**0,440**
1000	152	**0,152**
5000	580	**0,116**
10000	548	**0,055**
50000	-2300	**-0,046**
100000	-4420	**-0,044**
200000	-6536	**-0,033**
300000	-7896	**-0,026**

Come si può osservare **può capitare di essere in attivo addirittura dopo 10000 prove!** Ma i gestori del casinò possono dormire tranquilli: all'aumentare del numero di prove, il guadagno medio tende ad avvicinarsi al valore teorico (circa = -0,027 euro). Queste osservazioni sono cruciali per conoscere le dinamiche (e i conseguenti **pericoli**) legate al **gioco d'azzardo**. I ragazzi hanno 15-16 anni e devono conoscere queste cose!

Il gioco del Lotto non è un gioco equo

Anche **il gioco del Lotto** (in cui un privato ha come avversario l'amministrazione dello Stato) **non è mai equo** ed è svantaggioso per il privato. Alzi la mano chi si aspettava diversamente…
Può accadere che, in casi fortunati, un giocatore realizzi una buona vincita, ma nella generalità dei casi lo Stato incasserà una somma molto superiore a quella che distribuisce per le vincite. Anche nelle case da gioco (come visto nel caso della roulette) **chi, alla lunga, ci rimette è sempre il cliente.**
Il calcolo delle probabilità, anche al livello elementare, porta a renderci conto razionalmente di queste situazioni e ci insegna a non impiegare in questo modo il proprio denaro.

Esercizio assegnato per casa alla classe: **estraendo 5 palline da un'urna in cui sono presenti 90 palline numerate (da 1 a 90), quale dovrebbe essere la vincita nel caso di un ambo, se abbiamo giocato una schedina da 1 euro? Qual è invece la quota che ci versa lo Stato?**

Una scommessa sportiva

Alba e Bruno fanno una scommessa sportiva sul campionato NBA. **Alba, in caso di vittoria dei Lakers guadagna da Bruno 6,00 euro, mentre se ciò non accadesse pagherà 1,40 euro a Bruno.** Ammettendo che la scommessa sia equa, qual è la probabilità che i Lakers conquistino il titolo?

PROBABILITÀ

Alba e Bruno fanno una certa scommessa sportiva: su un evento della pallacanestro sui Lakers.
Alba in caso di vittoria dei Lakers guadagna da Bruno 6 € mentre se ciò non accadesse Alba pagherà 1,40 € a Bruno.
Alla luce di questi dati qual è la probabilità che i Lakers conquistino lo scudetto del 2020?

Mi metto nei panni di Alba

$$p \cdot 6 + (1-p)\cdot(-1{,}4) = 0$$

p: prob di vincere

$(1-p)$: prob che non vincono

$$p6 - 1{,}4 + p1{,}4 = 0$$

$$p = \frac{7}{37} \cong 0{,}189 \qquad 18{,}9\%$$

Differenza tra teste e croci…

Lezione 7. Esercizio molto insidioso: lanciando "tante" volte una moneta non truccata, la differenza tra il numero di teste e quello di croci tende ad annullarsi?

Ho posto questa domanda a tante persone, anche a laureati in discipline scientifiche; spesso ho ricevuto, purtroppo, una risposta totalmente errata… La stessa cosa, naturalmente, è successa anche con la mia 2C. Grazie alle simulazioni (utilizzando come al solito il foglio elettronico) ci accorgiamo della situazione.

n	casuale	testa	Tot. teste	percentuale
1	=CASUALE.TRA(1;2)	=SE(C3=1;1;0)	=D3	=E3/B3*100
=1+B3	=CASUALE.TRA(1;2)	=SE(C4=1;1;0)	=E3+D4	=E4/B4*100
=1+B4	=CASUALE.TRA(1;2)	=SE(C5=1;1;0)	=E4+D5	=E5/B5*100
=1+B5	=CASUALE.TRA(1;2)	=SE(C6=1;1;0)	=E5+D6	=E6/B6*100
=1+B6	=CASUALE.TRA(1;2)	=SE(C7=1;1;0)	=E6+D7	=E7/B7*100

n	teste	**Differenza teste-croci**
100	42	**-8**
1000	502	**2**
10000	5003	**3**
50000	25319	**319**
100000	50433	**433**
200000	100682	**682**
300000	150777	**777**
400000	200841	**841**
500000	251038	**1038**
600000	301147	**1147**
700000	351236	**1236**
800000	401186	**1186**
900000	451086	**1086**
1000000	501458	**1458**

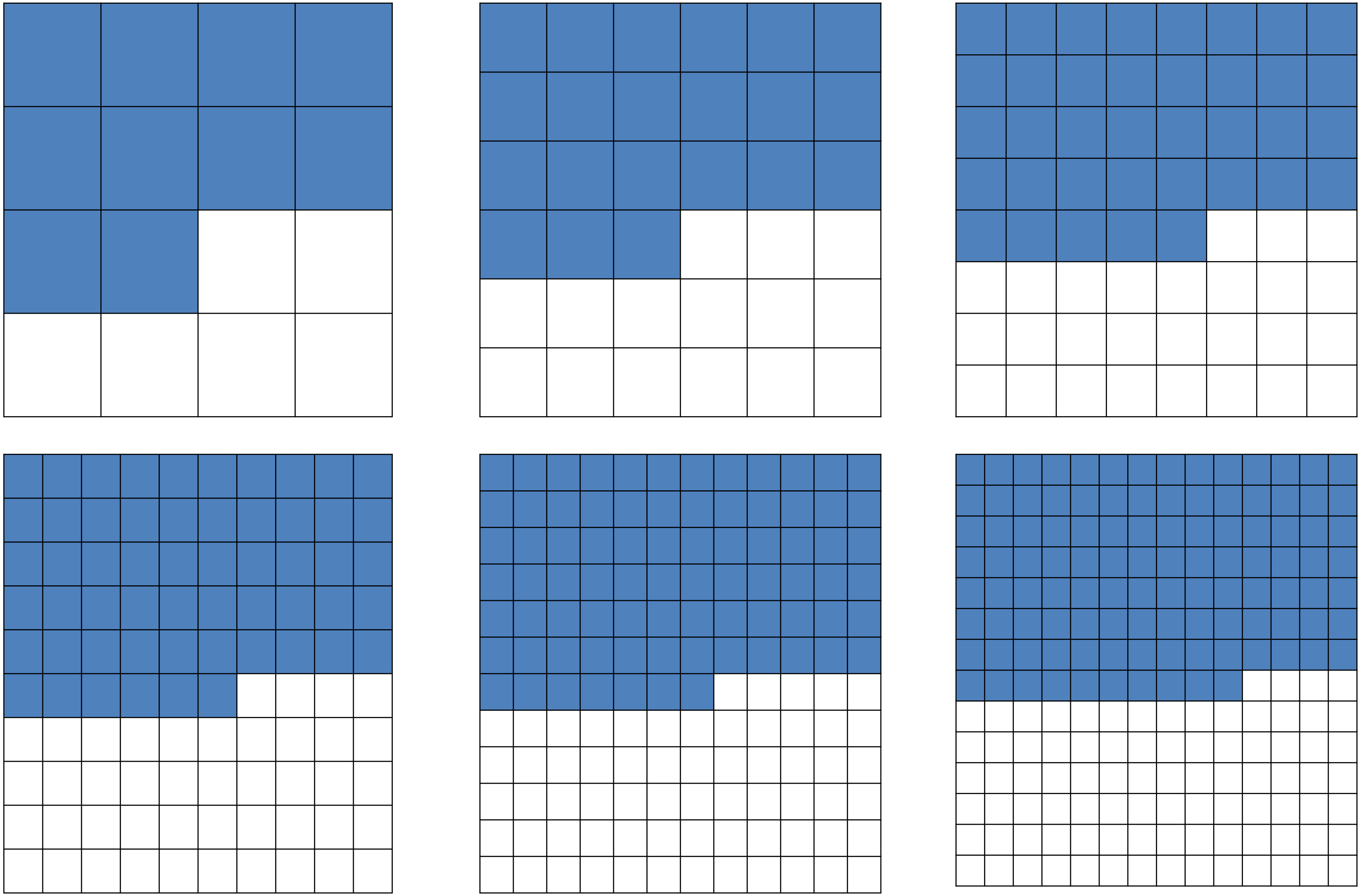
Si scopre che **la differenza tra teste e croci <u>tende ad aumentare</u> con il numero dei lanci effettuati.**

Con l'aumentare dei lanci, nonostante la differenza tra le teste e le croci aumenti, si osserva però che **la percentuale di croci tende a 1/2 (= 0,5), ossia al valore teorico (la moneta è regolare, ossia non è truccata).**

n	teste	**percentuale**
100	42	**0,4200**
1000	502	**0,5020**
10000	5003	**0,5003**
50000	25319	**0,5064**
100000	50433	**0,5043**
200000	100682	**0,5034**
300000	150777	**0,5026**
400000	200841	**0,5021**
500000	251038	**0,5021**
600000	301147	**0,5019**
700000	351236	**0,5018**
800000	401186	**0,5015**
900000	451086	**0,5012**
1000000	501458	**0,5015**

Didatticamente è molto interessante cercare di spiegare questi risultati. Torna comodo il modello della tabella quadrata, suddivisa in tanti quadratini uguali. Consideriamo un numero di prove pari a (2*n)^2, in modo da poter considerare ogni quadratino come l'esito di un lancio della moneta. Coloriamo **il quadratino se e solo se l'esito è testa.**

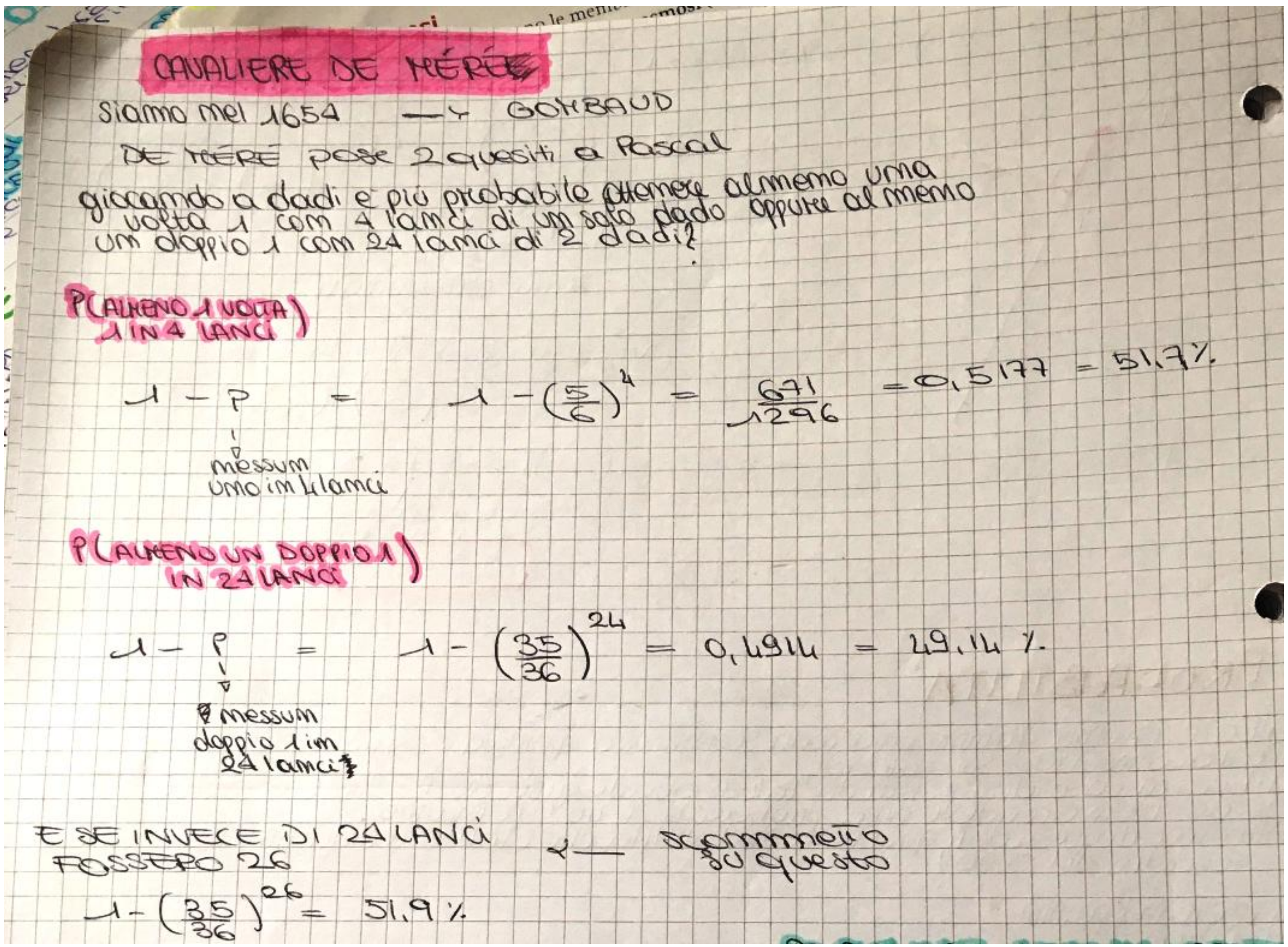
n	teste	differenza	**percentuale**
16	10	4	**0,625**
36	21	6	**0,583**
64	37	10	**0,578**
100	56	12	**0,560**
144	79	14	**0,549**
196	108	20	**0,551**



Anche se la differenza tra il numero di teste e di croci aumenta, l'area colorata tende a diventare uguale alla metà dell'intero quadrato.

Il cavaliere de Méré chiede consiglio a Pascal

<u>Lezione 8</u>. Abbiamo affrontato anche il famosissimo problema (importante dal punto di vista della storia della matematica) proposto dal Cavaliere de Méré a Pascal: **"Giocando a dadi è più probabile ottenere almeno una volta 1 con 4 lanci di un solo dado, oppure almeno un doppio 1 con 24 lanci di due dadi"**

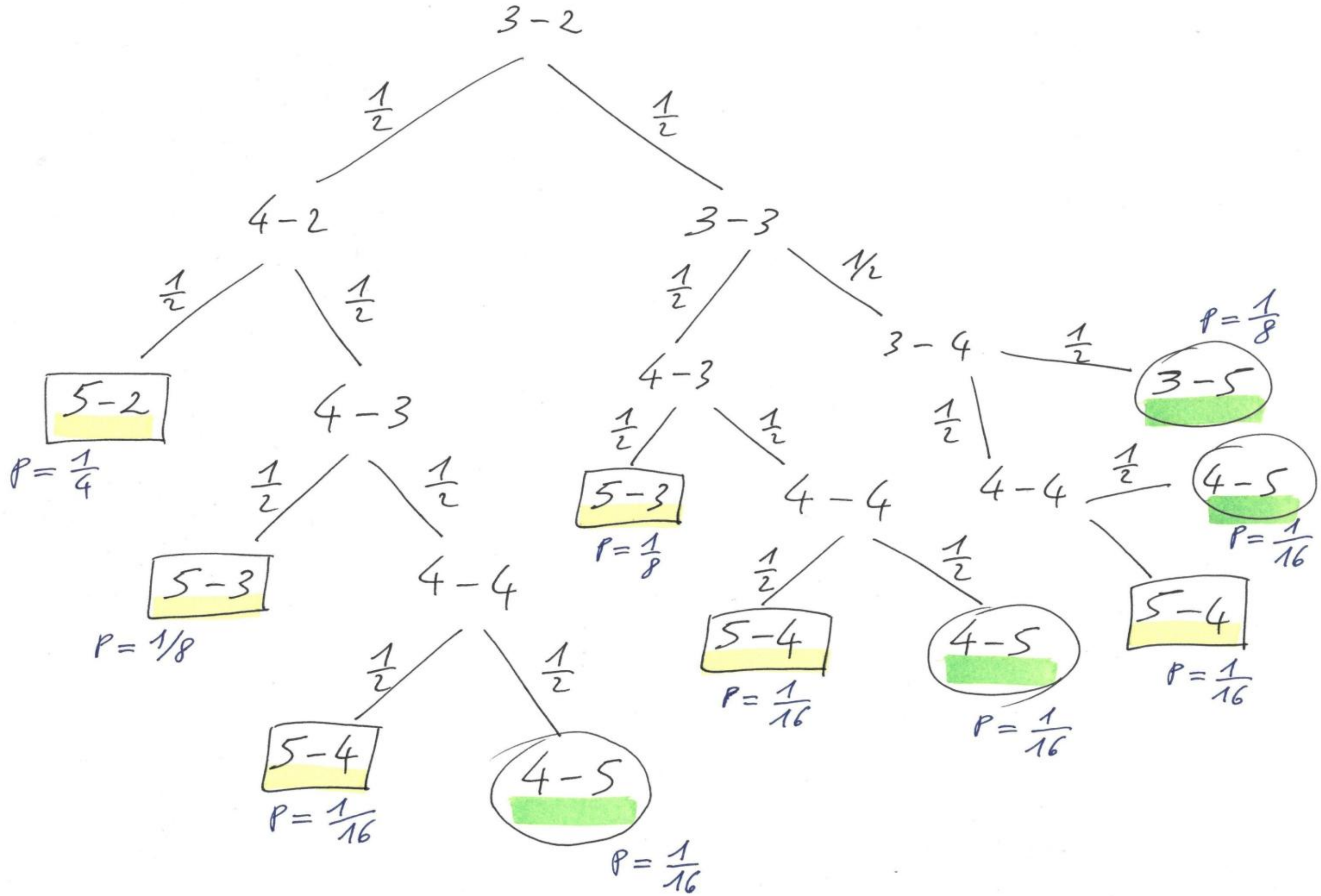


Problema della divisione della posta (gioco interrotto)

Anche il seguente problema può essere ricondotto ai quesiti che il cavaliere de Méré pose a Blaise Pascal.

Giulia e Renata si sfidano al seguente gioco:
lanciano una moneta e, se esce Testa, Giulia guadagna 1 punto; in caso contrario, cioè se esce Croce, è Renata a guadagnare 1 punto. Vince chi arriva prima a **5 punti**.
Ad un certo punto Giulia sta vincendo per **3-2**; purtroppo, prima del sesto lancio, la moneta viene smarrita in un tombino.
Come devono **spartirsi un premio di 32 euro** che era stato messo in palio?

Il problema può essere affrontato in più modi. Per esigenze di spazio, qui riportiamo il grafo che abbiamo prodotto per analizzare tutte le situazioni che si possono presentare (si veda la diapositiva successiva):



I 32 euro vanno allora così suddivisi: a Renata spettano

$$\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\right)\cdot 32\, euro = 10\, euro$$

e pertanto a Giulia vanno i restanti **(32 – 10) euro = 22 euro.**

VERIFICA DEGLI APPRENDIMENTI

Durante l'anno scolastico ho assegnato vari esercizi nelle verifiche scritte, nelle quali erano presenti anche problemi sugli altri argomenti affrontati (sistemi lineari, equazioni e disequazioni, ecc.); riportiamo qui 6 esempi.

Nei primi 4 esercizi viene richiesta sostanzialmente una padronanza degli elementi di base; lo studente deve essere in grado di riconoscere subito il modello di riferimento, facendo attenzione allo schema da seguire nella risoluzione.

Negli ultimi 2 esercizi si è cercato di spingersi ancora più in là, analizzando il processo di apprendimento più in generale.

Esercizio 1. Si consideri un dado non truccato a 12 facce che viene lanciato 10 volte. Qual è la probabilità di non ottenere neanche un "12"? Qual è la probabilità di ottenere almeno due volte "12" ?
[50% delle risposte corrette]

Esercizio 2. In un sacchetto ci sono 4 palline verdi e le altre blu. Se vengono estratte due palline senza reinserimento, la probabilità di otteneme due di colore diverso è uguale a 24/45. Quante sono le palline blu?
[67% delle risp. corrette]

Esercizio 3. Qual è la probabilità di ottenere esattamente una testa lanciando tre volte una moneta equilibrata?
[60% delle risposte corrette]

Esercizio 4. Da una scatola contenente 4 palline rosse e 3 palline blu, si estraggono senza reinserimento due palline. Qual è la probabilità che una sia blu e l'altra rossa? Cosa accade se l'estrazione è condotta **con** reinserimento? **[72% delle risposte corrette]**

Esercizio 5. Tiberio fa una scommessa con Bruno. Tiberio lancia 4 volte un dado non truccato a 6 facce e, se ottiene esattamente due volte la faccia 6, ottiene da Bruno un premio da 3, 00 euro, mentre se ottiene almeno tre volte la faccia 6 riceve 10, 00 euro. Se non ottiene neanche una volta la faccia 6, Tiberio sarà invece costretto a pagare 40, 00 euro. Come si devono comportare nel caso in cui Tiberio ottenga esattamente una volta la faccia 6, se vogliono far sì che il gioco risulti equo? **[22% delle risposte corrette]**

Esercizio 6. Annalisa fa un gioco con Robertina. Annalisa lancia una moneta equilibrata e, se esce testa, vince 5 euro. Se invece esce croce Robertina estrae una carta da un mazzo di carte toscane da 40: se non è un asso Robertina riceve 1 euro. Come si devono comportare nel caso in cui Robertina estragga un asso, se vogliono far sì che il gioco risulti equo? **[39% delle risposte corrette]**

RISULTATI OTTENUTI (analisi critica in relazione agli apprendimenti degli alunni)

Per quanto riguarda l'esercizio 1 i risultati non sono stati molto soddisfacenti: 2 studenti hanno sbagliato anche la prima richiesta e altri 7 hanno fatto confusione analizzando "la probabilità di ottenere **almeno** due volte 12".

Ho notato che spesso gli errori, oltre al contenuto strettamente matematico, si fondano anche sulla **comprensione del testo**.

A tale proposito, ho dedicato un po' di tempo (DAD inclusa) a questo specifico aspetto, trasversalmente rispetto ai vari argomenti trattati durante l'anno scolastico.

Per l’esercizio 2 si sono invece riscontrati essenzialmente errori algebrici nella risoluzione dell’equazione connessa al problema. Inoltre gli studenti sono stati poco attenti: era infatti possibile **verificare la soluzione** (tra le altre cose intuibile anche per tentativi…). Ho notato infatti da parte egli alunni una generale **mancanza di controllo dei risultati ottenuti**.

Nell’esercizio 3 ci sono stati errori nell’impostazione del problema: alcuni ragazzi hanno analizzato solo il caso in cui esce testa **solo** al primo lancio, ignorando in questo modo gli altri due casi (che hanno la medesima probabilità).

L'esercizio 4 è stato quello che ha ottenuto maggiore successo rispetto agli altri. Ci sono però 5 studenti che non hanno inquadrato in modo corretto il problema: c'è confusione tra **"una pallina è blu e l'altra è rossa"** con **"la <u>prima</u> estratta è blu e la <u>seconda</u> estratta è rossa"**. Anche qui siamo alle prese con la comprensione del testo.

I risultati degli esercizi 5 e 6 sono stati meno convincenti, essenzialmente in linea con le previsioni. La difficoltà qui infatti è chiaramente maggiore rispetto ai primi 4 esercizi, dal momento che, oltre a richiedere le abilità descritte in precedenza, vengono richieste competenze legate al concetto di scommessa equa. Solo 4 studenti sono riusciti a risolvere senza errori l'esercizio 5 (che è risultato più ostico in quanto l'analisi dei casi è più complessa rispetto all'esercizio 6), fornendo un'adeguata motivazione e seguendo un procedimento coerente.

VALUTAZIONE DELL'EFFICACIA DEL PERCORSO DIDATTICO SPERIMENTATO IN ORDINE ALLE ASPETTATIVE E ALLE MOTIVAZIONI DEL GRUPPO DI RICERCA LSS.

Con questo percorso si è cercato di seguire un approccio diverso dal solito al calcolo delle probabilità, basato principalmente sul concetto di scommessa.

Si vuole in particolare sensibilizzare gli studenti delle scuole superiori sui rischi relativi al gioco d'azzardo, fornendo agli stessi gli strumenti sufficienti per riconoscere i casi in cui una scommessa è "conveniente" da quelli in cui non lo è. Dal punto di vista della consapevolezza del futuro cittadino, basta infatti prendere in considerazione un qualsiasi gioco a premi per rendersi conto, senza troppe difficoltà, che il banco è sempre avvantaggiato ("*il banco non perde mai*")…

Si è cercato a più riprese di far capire che, in questi giochi, al crescere del numero delle prove effettuate, tutte nelle stesse condizioni, la perdita del giocatore tende a diventare sempre più grande.

Il percorso ha avuto esito sostanzialmente positivo per la metodologia adottata e gli strumenti utilizzati. Ovviamente, essendo una classe seconda del liceo scientifico, sarà opportuno in futuro ritornare periodicamente su queste tematiche, in modo che "facciano presa" su tutti gli studenti, evitando così che vengano dimenticate come accade purtroppo a tante tecniche insegnate nel corso del quinquennio. D'altra parte non è possibile pensare la probabilità come un argomento che viene affrontato frettolosamente e in modo sommario, per non sottrarre troppo tempo ad altri argomenti reputati più basilari.

Nella scuola secondaria il calcolo delle probabilità dovrebbe infatti rivestire un ruolo centrale e di primo piano; quello a cui si assiste, però, va nella direzione contraria, in quanto il suo insegnamento viene spesso sottostimato e trascurato. Il calcolo delle probabilità è una delle parti più ostiche da insegnare e da apprendere: le sue idee, i suoi modelli, l'interpretazione dei risultati ottenuti sono costantemente esposti al rischio di malintesi e, spesso, l'intuizione porta inesorabilmente a ragionamenti totalmente errati.