REGIONE TOSCANA

Prodotto realizzato con il contributo della Regione Toscana nell'ambito dell'azione regionale di sistema

Laboratori del Sapere Scientifico

Introduzione alle funzioni

L'uso di Geogebra per la costruzione dei concetti fondamentali

Percorso di apprendimento
per una classe terza Istituto Tecnico commerciale
Prof. C. Rutili

Motivazione alla scelta del percorso

Da anni mi rendo conto della difficoltà di passare tra diverse rappresentazioni semiotiche delle funzioni (algebrica, grafica, tabellare, insiemistica …).

Inoltre mi rendo conto che, molto spesso, la teoria e le definizioni sono parole appiccicate come etichette ai concetti studiati, ma completamente prive di senso e mai correlate a quanto svolto in pratica.

Pertanto ho pensato ad un percorso che, attraverso una trattazione di tipo esperienziale con l'utilizzo del computer e opportuni «artefatti», potesse ricollegare la teoria ad una esperienza fatta e, allo stesso tempo, aiutasse a comprendere meglio le diverse rappresentazioni semiotiche delle funzioni. (Hassan, 2005; Bartlini Bussi & Mariotti, 2009)

Collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale

Il percorso effettuato si colloca durante il terzo anno, quando si introduce il concetto di funzione e se ne vanno ad analizzare le caratteristiche.

Il percorso è strutturato nell’ottica di creare una metodologia didattica di tipo laboratoriale che possa poi essere ripetuta anche per gli altri argomenti collegati (calcolo dei limiti, derivate, integrali …).

Si rifà al concetto espresso nelle linee guida ministeriali in cui «la progettazione di un’attività formativa diretta allo sviluppo di competenze dunque non può non tener conto della necessità che le conoscenze fondamentali da questa implicate siano acquisite in maniera significativa, cioè comprese e padroneggiate in modo adeguato, che le abilità richieste siano disponibili a un livello confacente di correttezza e di consapevolezza di quando e come utilizzarle, che si sostenga il desiderio di acquisire conoscenze e sviluppare abilità nell’affrontare compiti e attività che ne esigono l’attivazione e l’integrazione.»

Collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale

Il percorso effettuato si colloca in una classe terza Tecnico Turistico nella prima parte dell'anno scolastico.

Introduce il concetto di funzione, affronta i concetti fondamentali quali dominio, insieme delle immagini, grafico e va a lavorare su alcune proprietà.

È propedeutico al successivo studio delle funzioni esponenziali e logaritmiche, nonché a tutto il percorso di analisi matematica.

Ha coinvolto una classe terza e un docente.

Obiettivi essenziali di apprendimento

Lo studente avrà acquisito consapevolezza del concetto di funzione, saprà parlare con cognizione di dominio e insieme delle immagini e sarà in grado di parlare delle principali proprietà delle funzioni.

Avrà inoltre acquisito consapevolezza della relazione tra la rappresentazione algebrica, tabellare e grafica delle funzioni, imparando a passare da una all'altra.

Saprà analizzare dominio, insieme delle immagini, intersezioni e segno di una funzione sia a partire da una rappresentazione algebrica che da una rappresentazione grafica.

Avrà una migliore capacità espositiva e sarà in grado di ricavare le informazioni che gli servono dai grafici delle funzioni incontrate.

Elementi salienti dell'approccio metodologico

Il percorso ha utilizzato attività in classe e attività in Laboratorio di Informatica, ma tutte quante avevano lo stesso approccio:

1. Presentazione di un «artefatto» che poteva essere sotto forma di un gioco o di un file di geometria dinamica da manipolare.
2. Interazione degli studenti con l’artefatto seguendo delle indicazioni iniziali o rispondendo ad una serie di richieste relative alla interazione avvenuta.
3. Discussione delle risposte e delle impressioni ottenute a seguito dell’interazione con l’artefatto e costruzione di un linguaggio condiviso basato su una esperienza comune.
4. Formalizzazione dei concetti.

Prerequisiti

- Piano Cartesiano: saper trovare i punti nel piano, saper disegnare rette dati due punti e data la loro equazione, conoscerne le equazioni.
- Equazioni e disequazioni (almeno di primo e secondo grado).

Prerequisiti fondamentali sono la conoscenza del calcolo algebrico e la capacità di risolvere equazioni e disequazioni di primo e secondo grado.

Inoltre è opportuno che la classe abbia lavorato sul piano cartesiano e che conosca l’applicativo Geogebra (anche se quest’ultimo potrebbe essere spiegato anche durante le lezioni).

Materiali, ambienti e tempi

Materiali impiegati: libro di testo, file progettati e forniti dall'insegnante, schede di lavoro con domande, computer con installato Geogebra.

Ambiente in cui è stato sviluppato il percorso: aula, laboratorio di Informatica.

Tempo impiegato:

a) messa a punto preliminare nel Gruppo LSS: 10 ore;

b) progettazione specifica e dettagliata nella classe: 20 ore (Realizzazione dei file di Geogebra e delle schede di lavoro);

c) tempo-scuola di sviluppo del percorso: 14 ore (da novembre a dicembre);

d) documentazione del Percorso: 20 ore.

INIZIO DEL PERCORSO

Lezione 1 (gioco input-output)

La classe viene divisa in due squadre e, a turno, uno studente viene scelto come possessore di una regola che permetta, dato un valore numerico, di ottenere un altro numero. Le due squadre dovranno dare a turno un input, ascoltare la risposta e decidere se sono in grado di indovinare la regola. Se indovinano, guadagnano un punto. Se non indovinano danno la possibilità alla squadra avversaria di dare due input.

Il professore è colui che comunicare le regole agli studenti.

La prima volta potrebbe essere opportuno che il detentore della regola sia il professore stesso per far capire come funziona il gioco. Poi verranno chiamati gli studenti.

Sulla lavagna verrà scritta la tabella input/output in modo da tenere traccia dei dati trovati ad ogni manche. Anche gli altri studenti dovranno trascrivere la tabella sui loro quaderni per mantenere il lavoro fatto.

Nel momento in cui viene indovinata la regola si chiede anche di provare a scrivere la formula, se ce ne è una, che permette di trovare l’output dall’input chiamando l’input come x. (Appena viene chiesto di indicare un numero ignoto con una lettera, il 95% degli studenti utilizzerà la lettera x). La squadra che ci riesce ottiene un punto aggiuntivo. Da notare che di lettere ne servono due, ma non viene detto esplicitamente: nel fare l’esercizio verrà spontaneo agli studenti utilizzare una seconda lettere per l’output e quasi sempre sarà la y (in caso contrario è bene che la proponga l’insegnante per non generare confusione con le scritture successive)

Ecco alcuni esempi di regole da proporre:

- Aggiungi 1 al numero che ti viene detto.
- Moltiplica per due il numero che ti viene detto.
- Fai il quadrato del numero che ti viene detto.
- Fai il reciproco del numero che ti viene detto.
- Rispondi 5 a qualsiasi input.
- Rispondi 6 se ti viene detto un numero positivo, 2 se ti viene detto un numero negativo, non posso rispondere se ti viene detto 0.
- Rispondi 1 se ti viene detto un numero intero pari, 0 se ti viene detto un numero intero dispari, non posso rispondere se non ti viene detto un numero intero o zero.
- Moltiplica il numero per 3 e poi sottrai 2.

Consegne per casa.
Importante è sottolineare che le risposte saranno poi oggetto di discussione tutti insieme e più risposte ci saranno, più sarà utile la discussione.

1. Da una partita al gioco degli input e degli output viene fuori la seguente tabella:

Input	Output
4	2
…	3
…	1
-9	Non risponde
25	5
-4	…
0	…

- Riesci a capire la regola utilizzata? Potresti completare la tabella?
- Perché con input -9 non si riesce a dare un output?
- Potresti fare un altro esempio di numero per cui non si riesce a trovare un output?

2. Alice e Filippo provano a indovinare la regola che sta dietro alla seguente tabella:

Input	Output
0	-1
1	0
-1	0
2	3
-2	3
…	8

Alice dice che tale regola consiste nel fare il quadrato dell’input e poi sottrarre 1. Filippo dice invece che la regola consiste nel moltiplicare l’input aumentato di uno per l’input diminuito di uno.

- Chi dei due ha ragione?
- Potresti scrivere la regola di Alice come formula indicando con x il valore generico dell’input? E con quella di Filippo?
- Quanti valori danno come output 3?
- Sapresti completare la tabella dicendo quali valori danno come output 8?
- Confronta con l’esercizio precedente. In questo caso, ci sono valori che, messi come input, non danno nessun risultato come output? Sapresti spiegare il perché?

3. Analizza la seguente tabella:

- Riesci a capire la regola che è stata usata? E sapresti scriverla come formula?
- Riesci a completare la tabella?
- Spiega come mai non ci sono output se l'input è 0.
- Ci sono altri numeri per cui non è possibile trovare un output?

Input	Output
0	Non risponde
1	1
2	$\frac{1}{2}$
-3	$-\frac{1}{3}$
$\sqrt{5}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\frac{2}{3}$	…
…	$-\frac{1}{7}$

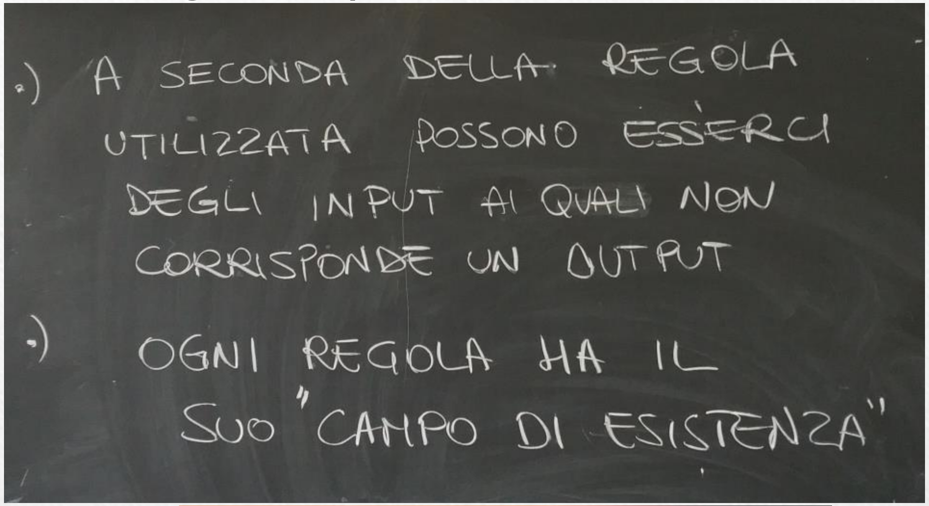
4. Analizza la seguente tabella:

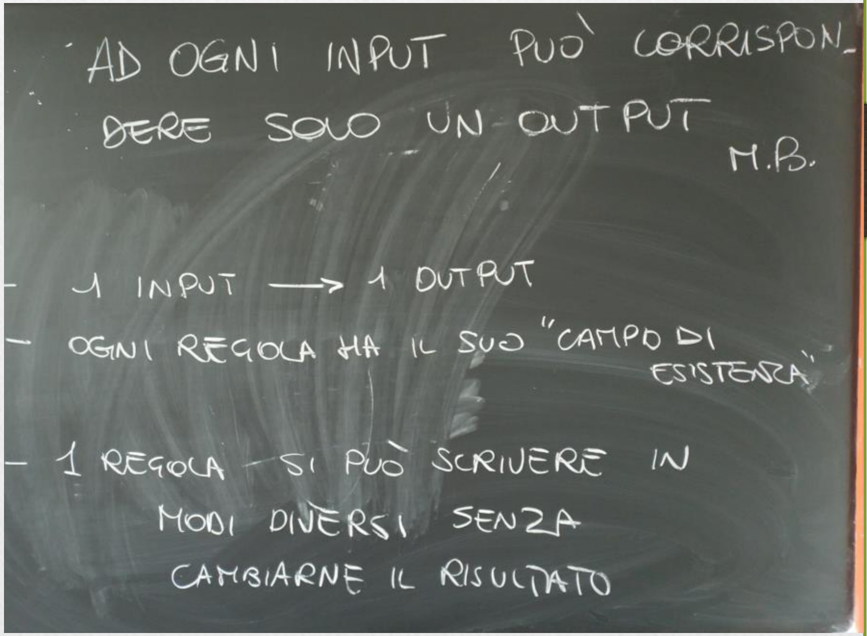
- Riesci a capire la regola che è stata usata?
- Che differenza noti con le tabelle precedenti?
- Secondo te, questa è una buona tabella da utilizzare nel gioco? Motiva la tua risposta.

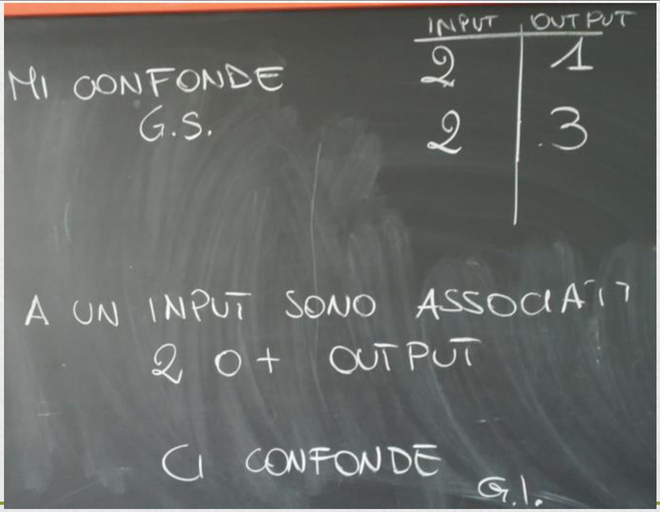
Input	Output
0	0
1	1
2	2
3	3
2	1
-4	4
5	5
2	3

Lezione 2 (gioco input-output)

- Viene chiesto agli studenti di leggere le loro riposte e via via che emergono dei concetti importanti dalle risposte si appuntano alla lavagna. Riporto alcuni concetti emersi:







A seconda di come procede la discussione possono emergere alcuni elementi invece di altri.

È fondamentale che i contributi vengano raccolti dall'insegnante e anche un po' filtrati in modo da potersi concentrare su quelli che sono i temi fondamentali che si vogliono studiare.

Ci si aspetta comunque che emergano:

- Il concetto di funzione come relazione che associa ad un elemento del dominio uno e un solo elemento dell'insieme delle immagini;
- Non si parla di funzione se ad un elemento ne corrispondono due;
- Una stessa funzione può avere espressioni analitiche diverse oppure non averne affatto;
- Spesso si può associare una espressione analitica, ma non sempre;
- Esistono funzioni definite a tratti;
- Non sempre tutti i numeri reali fanno parte dell'insieme delle immagini.

Il linguaggio verrà sistemato successivamente dall'insegnante che si occuperà di collegare le definizioni del libro con le informazioni raccolte durante il gioco. (Cosa che può essere fatta anche leggendo insieme il libro e andando a ritrovare quanto detto durante la discussione all'interno delle definizioni scritte nel testo)

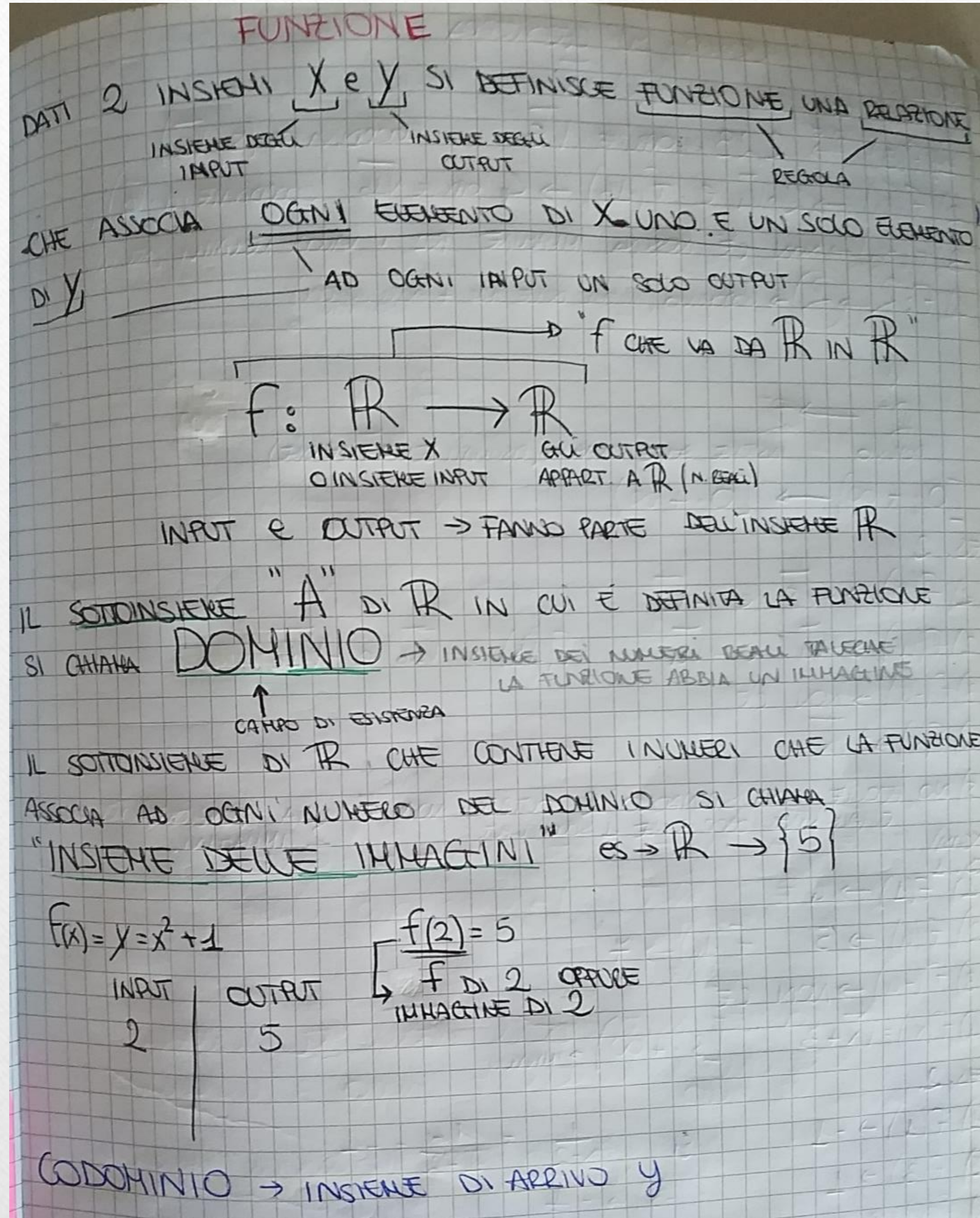
ATTENZIONE: Sarà opportuno introdurre la scrittura $f(x)$ per indicare gli output. Questo serve per le attività successive.

Riporto una tabella con a sinistra le definizioni con i termini matematici e a destra le frasi emerse dalla discussione in classe:

Una funzione da R in R è una legge che associa ad ogni elemento di un sottoinsieme A di R, uno e un solo numero reale.	Una regola adatta al gioco è una regola in cui ad ogni input può corrispondere un solo output
Il sottoinsieme A di R in cui è definita la funzione si chiama dominio In generale, quando non specifichiamo il dominio A, stiamo considerando il sottoinsieme più grande possibile di R su cui la legge ha significato	A seconda della regola utilizzata possono esserci degli input ai quali non corrisponde un output. Ogni regola ha il suo “capo di esistenza”
Il sottoinsieme di R che contiene tutti i numeri associati a ogni elemento del dominio della funzione si chiama insieme delle immagini	Ogni regola fa ottenere determinati output
Una funzione può avere espressioni analitiche diverse purché mantengano inalterato il dominio.	Una regola si può scrivere in modi diversi senza cambiare il risultato

Riporto gli appunti di una studentessa.

Da notare come ad ogni definizione associ le parole che sono state utilizzate durante il gioco, come input, output, regola.



FUNZIONE

DATI 2 INSIEMI X e Y SI DEFINISCE FUNZIONE UNA RELAZIONE

INSIEME DEGLI INPUT — INSIEME DEGLI OUTPUT — REGOLA

CHE ASSOCIA OGNI ELEMENTO DI X UNO E UN SOLO ELEMENTO DI Y

AD OGNI INPUT UN SOLO OUTPUT

"f CHE VA DA $\mathbb{R}$ IN $\mathbb{R}$"

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

INSIEME X O INSIEME INPUT — GLI OUTPUT APPART. A $\mathbb{R}$ (N. REALI)

INPUT e OUTPUT → FANNO PARTE DELL'INSIEME $\mathbb{R}$

IL SOTTOINSIEME "A" DI $\mathbb{R}$ IN CUI È DEFINITA LA FUNZIONE SI CHIAMA DOMINIO → INSIEME DEI NUMERI REALI TALI CHE LA FUNZIONE ABBIA UN IMMAGINE

CAMPO DI ESISTENZA

IL SOTTOINSIEME DI $\mathbb{R}$ CHE CONTIENE I NUMERI CHE LA FUNZIONE ASSOCIA AD OGNI NUMERO DEL DOMINIO SI CHIAMA "INSIEME DELLE IMMAGINI" es → $\mathbb{R} \rightarrow \{5\}$

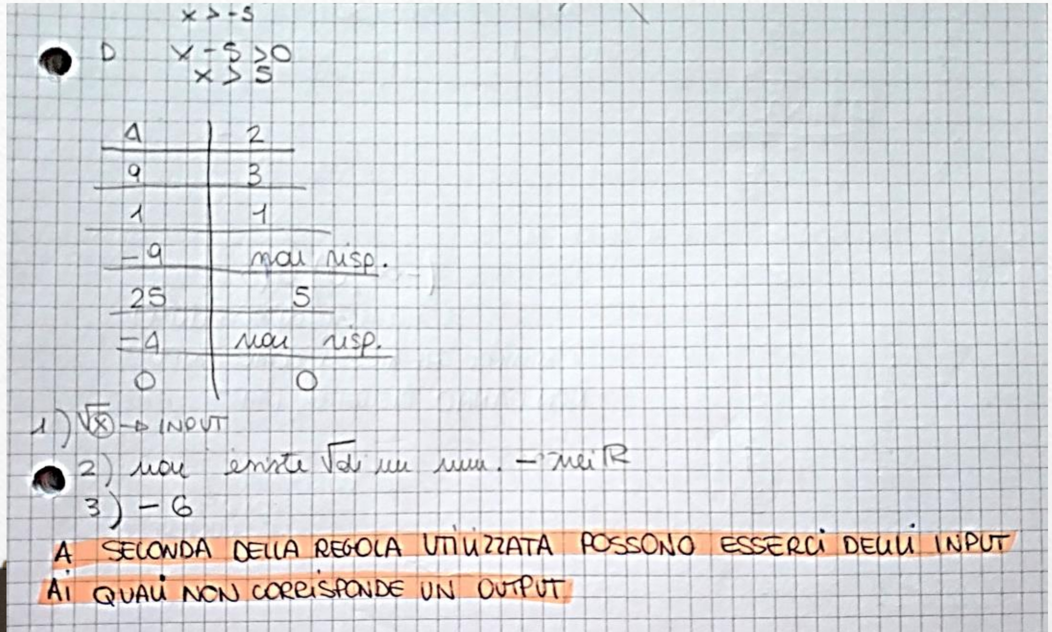
$f(x) = y = x^2 + 1$

$f(2) = 5$

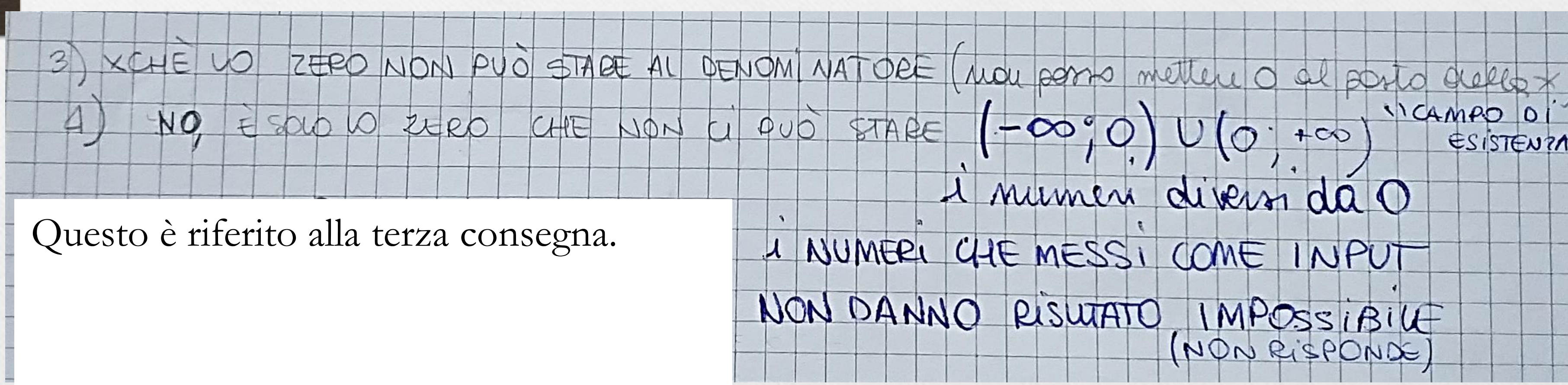
f DI 2 OPPURE IMMAGINE DI 2

INPUT	OUTPUT
2	5

CODOMINIO → INSIEME DI ARRIVO Y



Alcuni esempi delle risposte agli esercizi assegnati per casa.



Questo è riferito alla terza consegna.

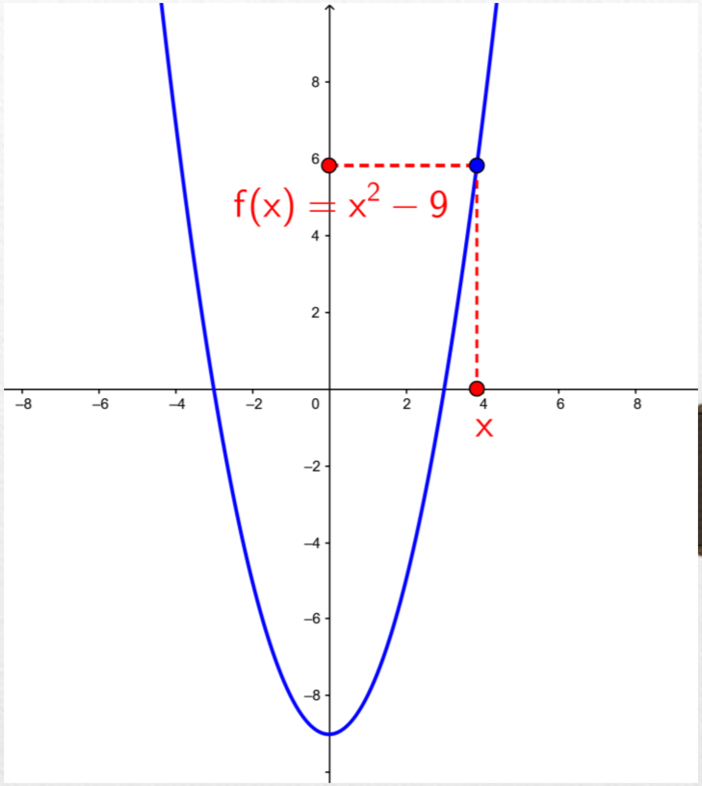
Lezione 3

Questa lezione si svolge in Laboratorio di Informatica.

Viene chiesto di aprire un file di Geogebra opportunamente preparata e di cui riporto una immagine.

Il file prevede la possibilità di spostare il punto che si trova sull’asse delle ascisse, ma non di spostare gli altri.

Spostandolo, si spostano automaticamente il punto sul grafico della funzione e la sua proiezione sull’asse y.



In corrispondenza del punto sull’asse delle ascisse è riportata la scrittura «x» mentre in corrispondenza della proiezione sulle ordinate «$f(x) = x^2 - 9$»

L’insegnante chiede di aprire il file e di usarlo per rispondere alle seguenti domande:

a) Quali punti della rappresentazione puoi spostare? In che modo (lungo l’asse, liberamente in un quadrante, in tutto il piano) si muovono? Quali si muovono in modo libero e quali no? Perché?

b) Si può ottenere $f(x) = 16$? In che modo?

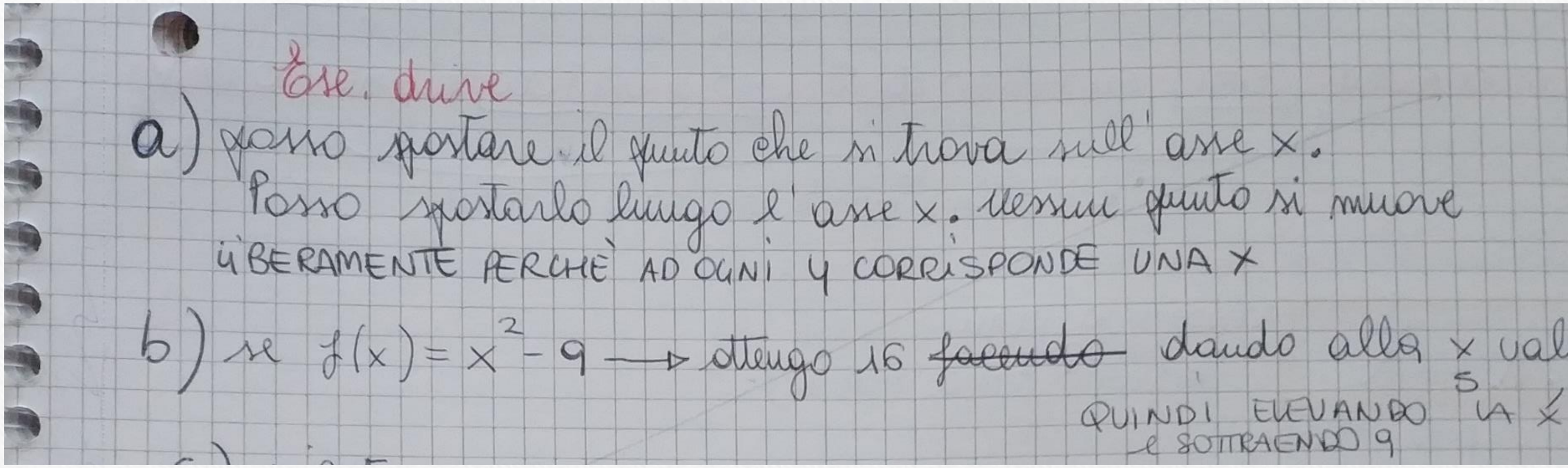
c) Che cosa succede al valore di $f(x)$ quando si sposta x?

d) È possibile spostare $f(x)$ sul semiasse delle y negative? Se sì, quali valori può assumere? Se no, spiegare perché.

L’attività è da svolgere a coppie, in modo da facilitare il dialogo. L’insegnante passa tra i banchi in modo da ascoltare e osservare le produzioni.

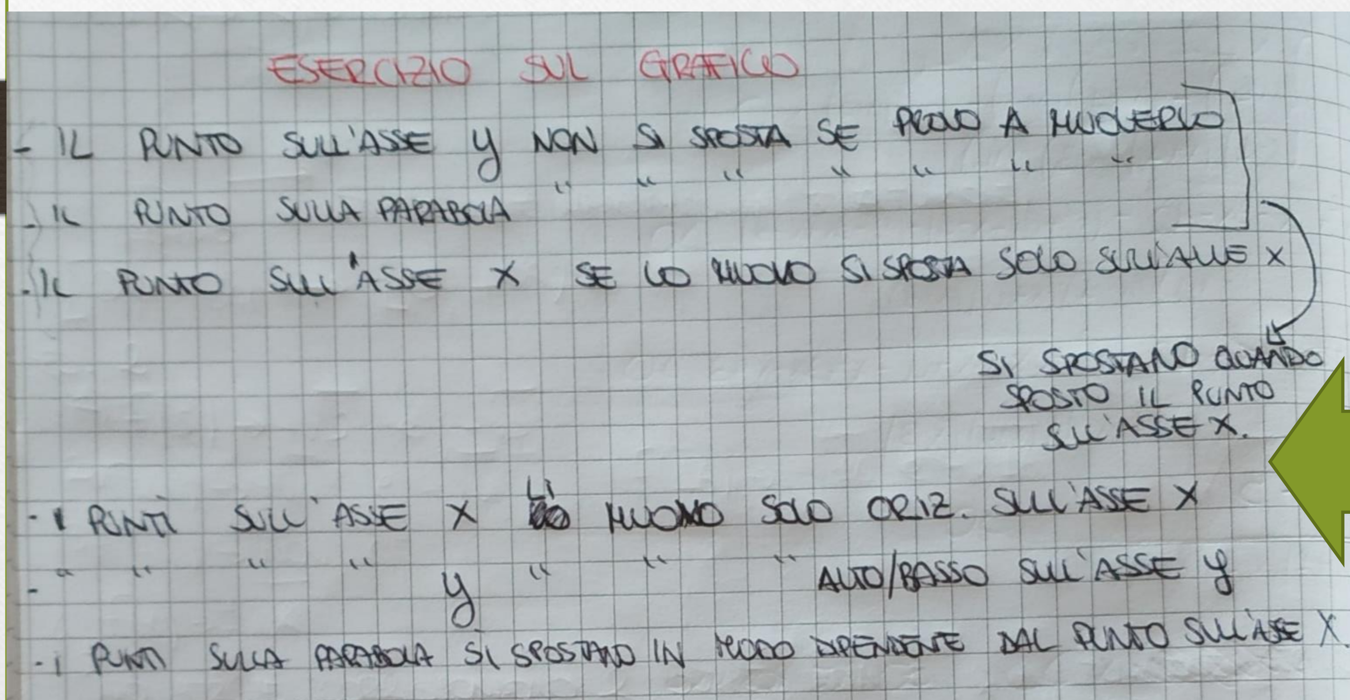
Al termine dell’attività viene chiesto a una o più coppie di leggere le risposte e agli altri di commentare o, eventualmente, integrare.

L’insegnante modera e raccoglie sulla lavagna le risposte che nascono dalla discussione.


Ese. due

a) posso spostare il punto che si trova sull'asse x.
Posso spostarlo lungo l'asse x. Nessun punto si muove
LIBERAMENTE PERCHÈ AD OGNI y CORRISPONDE UNA X

b) se $f(x) = x^2 - 9$ → ottengo 16 ~~facendo~~ dando alla x valo[re] 5
QUINDI ELEVANDO LA x^2
E SOTTRAENDO 9


ESERCIZIO SUL GRAFICO

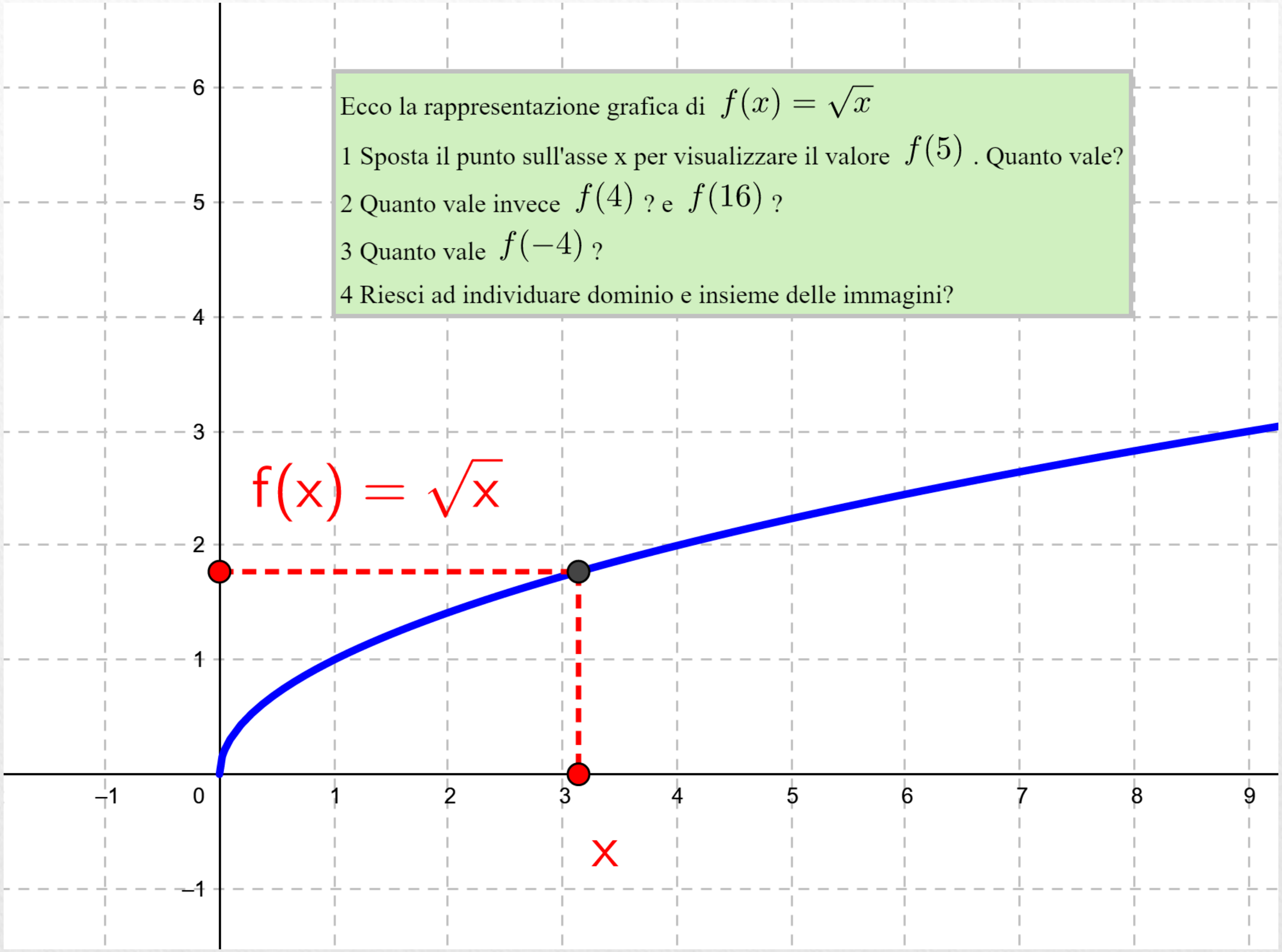
- IL PUNTO SULL'ASSE y NON SI SPOSTA SE PROVO A MUOVERLO
- IL PUNTO SULLA PARABOLA " " " " " " "
- IL PUNTO SULL'ASSE X SE LO MUOVO SI SPOSTA SOLO SULL'ASSE X

SI SPOSTANO QUANDO SPOSTO IL PUNTO SULL'ASSE X.

- I PUNTI SULL'ASSE X LI MUOVO SOLO ORIZ. SULL'ASSE X
- " " " y " " " ALTO/BASSO SULL'ASSE y
- I PUNTI SULLA PARABOLA SI SPOSTANO IN MODO DIPENDENTE DAL PUNTO SULL'ASSE X.

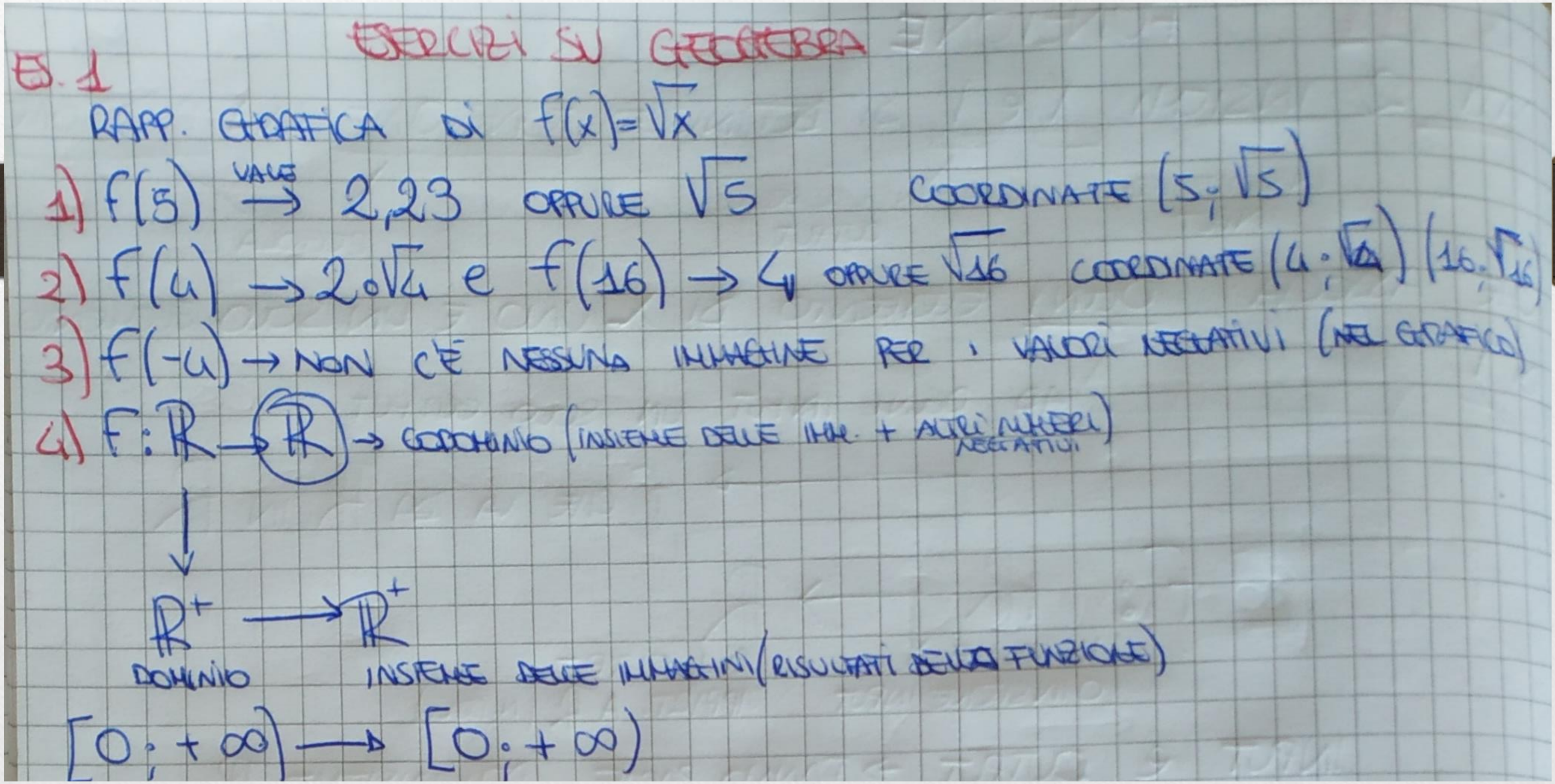
In questo passaggio emerge il concetto di dipendenza delle due variabili e dei punti corrispondenti sul piano cartesiano.

Viene poi assegnato un nuovo esercizio con un file diverso, ma costruito nello stesso modo. La richiesta è sempre di «esplorare» il disegno e rispondere alle domande a seguito dell’esplorazione.

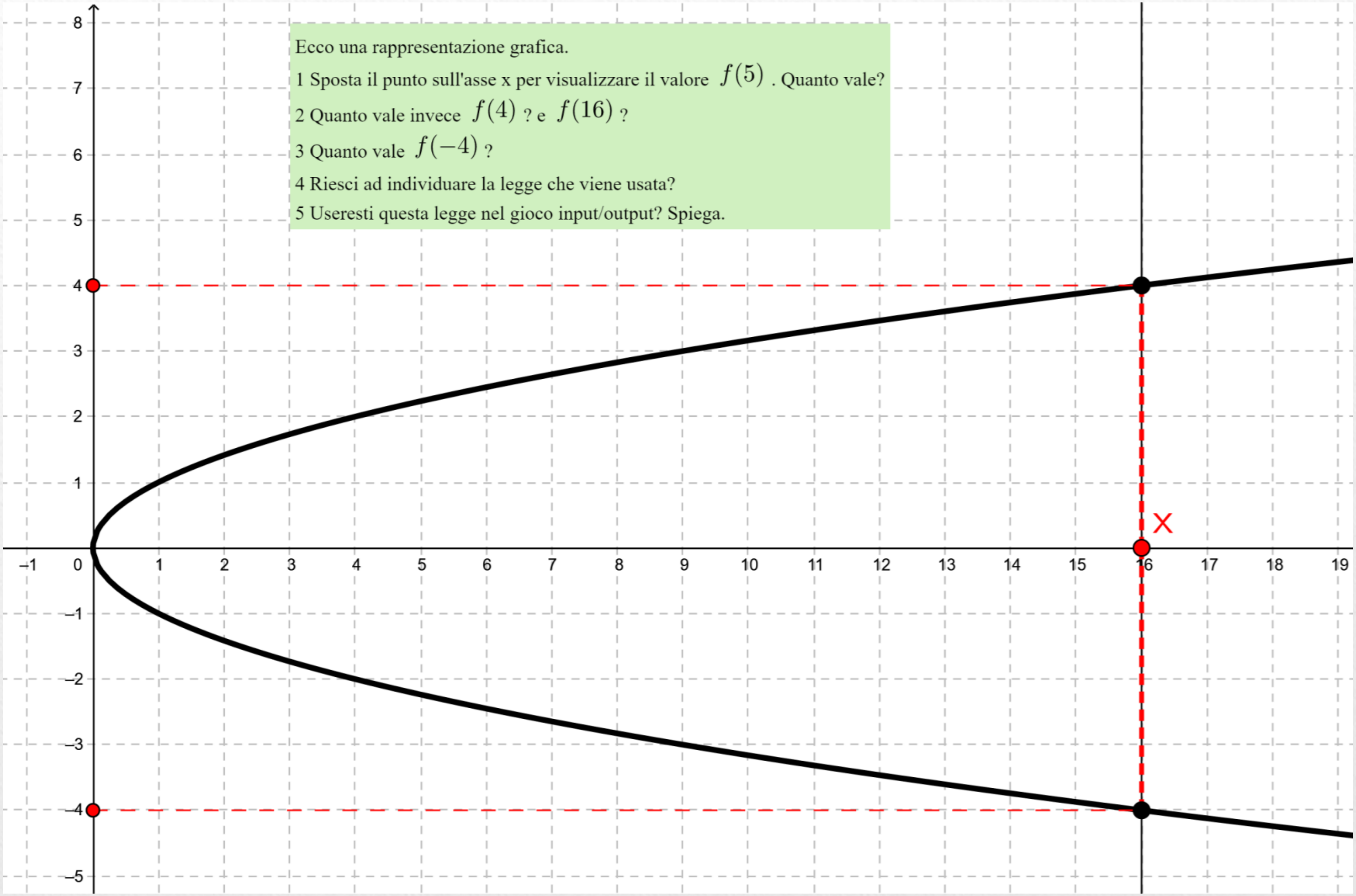


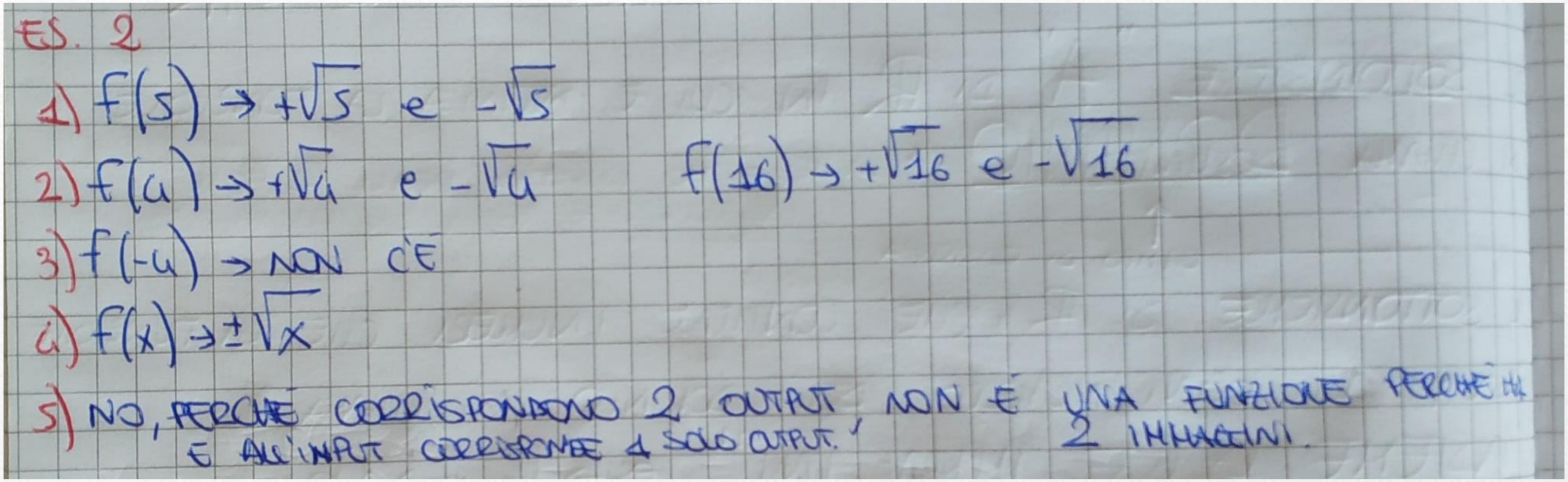
Questo è un esempio di risposta.

Fondamentale rimane la condivisione delle risposte e la discussione, in modo da generare delle conoscenze direttamente collegate alle attività svolte. Questo è ciò che genera un apprendimento significativo.



Ecco alcuni file su cui lavorare a casa.





ES. 2

1) $f(5) \rightarrow +\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$

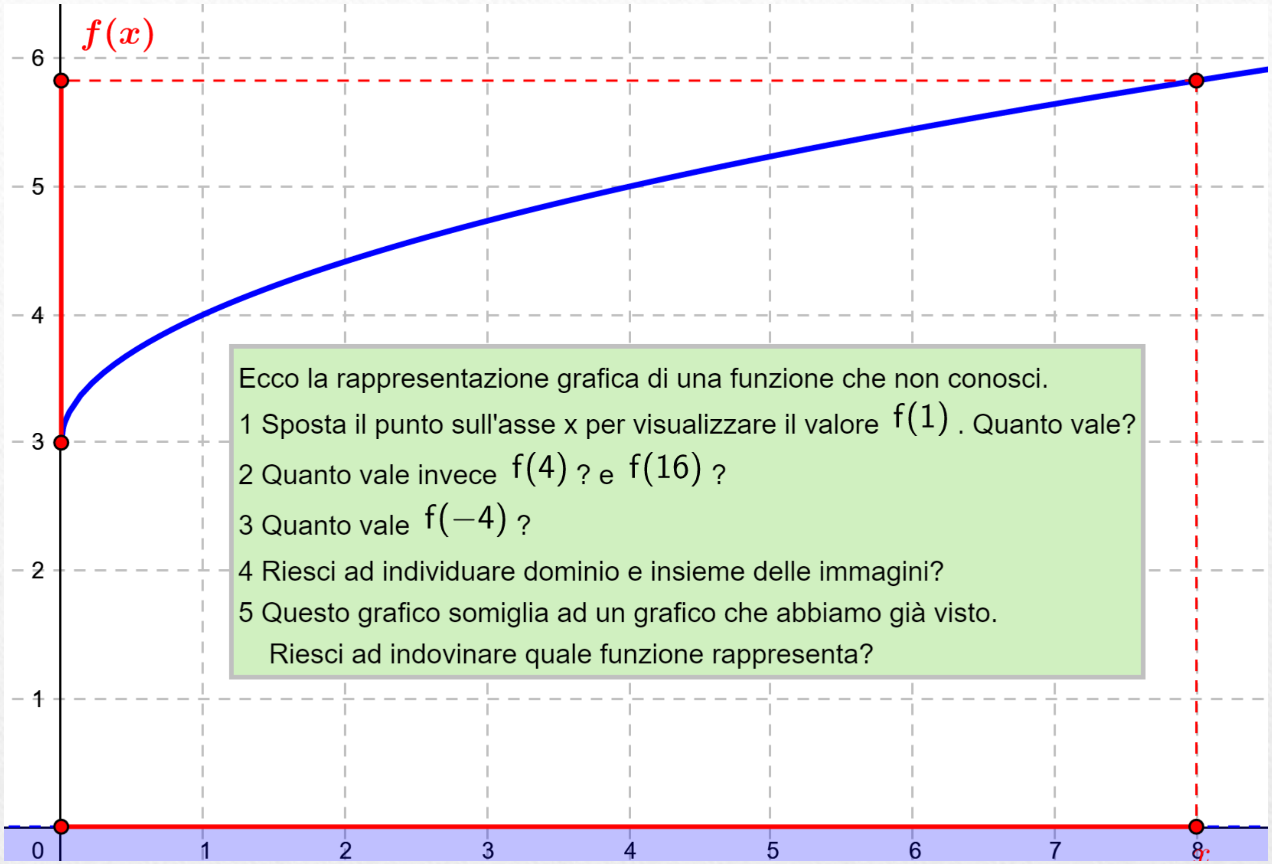
2) $f(4) \rightarrow +\sqrt{4}$ e $-\sqrt{4}$ $f(16) \rightarrow +\sqrt{16}$ e $-\sqrt{16}$

3) $f(-4) \rightarrow$ NON C'É

4) $f(x) \rightarrow \pm\sqrt{x}$

5) NO, PERCHÉ CORRISPONDONO 2 OUTPUT, NON É UNA FUNZIONE PERCHÉ HA 2 IMMAGINI.
É ALL'INPUT CORRISPONDE 1 SOLO OUTPUT.

Il lavoro su questo file è importante per riflettere bene sul concetto di funzione anche da un punto di vista grafico.
Abbiamo infatti lavorato sulle tabelle, ma qua analizziamo lo stesso problema usando la rappresentazione grafica.
Come sempre è fondamentale guidare la discussione in modo che l’argomento venga sviluppato correttamente: si può chiedere allo studente, per esempio, che ha risposto come sopra dove legge gli input e dove gli output (immagini).



Es 1

1) (1; 4) → immagine

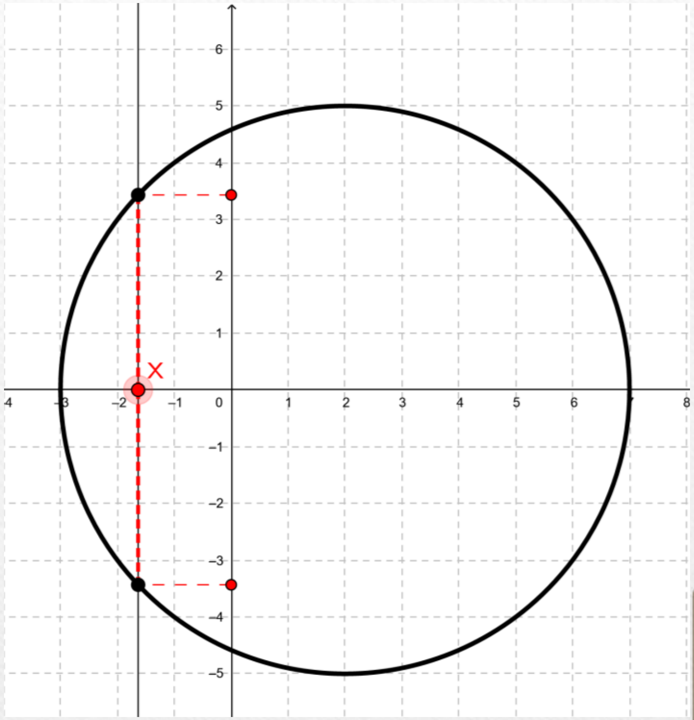
2) ~~f(4)~~ (4; 5)   f(16) (16; 7)

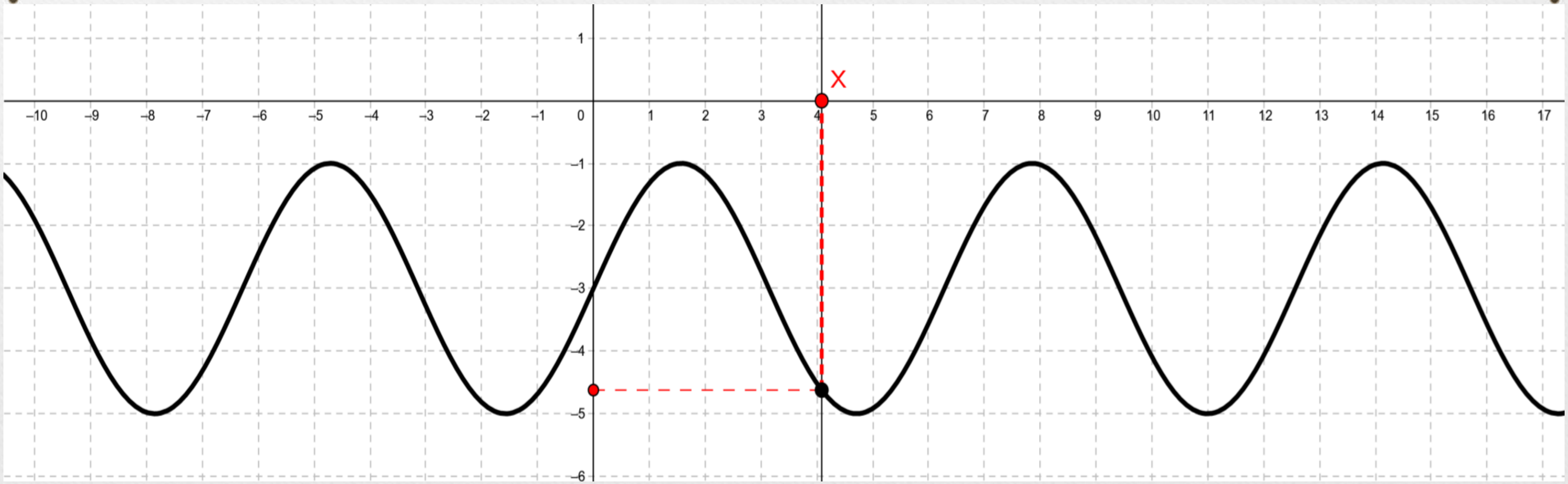
3) f(-4) → non ha un' immagine perché il DOMINIO non comprende numeri neg.

4) D: $\mathbb{R}^+$ Im = [3; +∞)

5) $f(x) = \sqrt{x} + 3$

Altri esempi di grafici su cui impostare lo stesso tipo di lavoro





Lezione 4

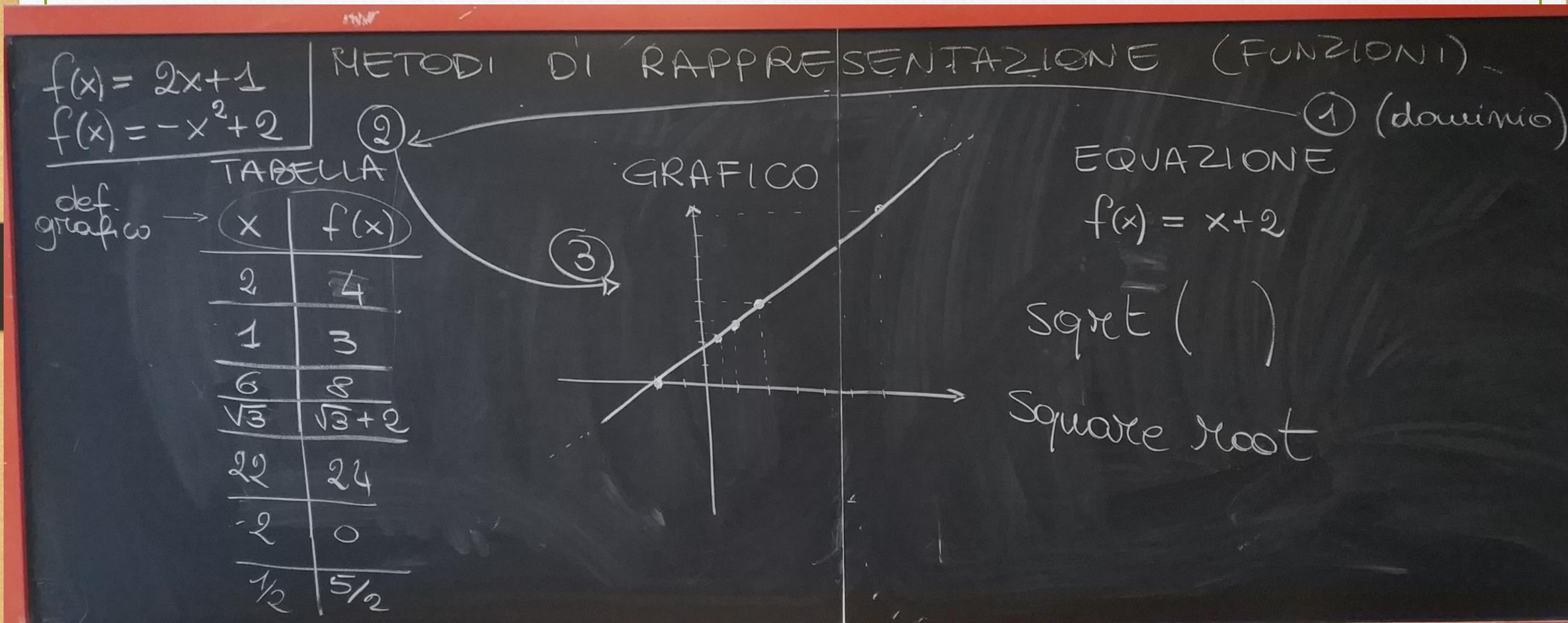
Questa sarà una lezione totalmente dedicata alla discussione delle risposte date alle consegne per casa e alla richiesta di svolgerne altre simili.

Può essere svolta sia in laboratorio che in classe, purché si abbia a disposizione una LIM o un proiettore in modo da far vedere i movimenti dei punti sul file di Geogebra richiesti dalle consegne e che gli studenti descrivono nelle loro risposte.

In questa fase è anche opportuno far manipolare il file proiettato col proiettore ad uno studente, in modo tale da vedere come lavora sul file e poter fare eventuali domande sulle procedure he ha adottato.

Lezione 5 (1-2 ore)

In questa lezione lavoriamo in classe e ci concentriamo sulle diverse rappresentazioni semiotiche delle funzioni che abbiamo visto nel corso delle lezioni precedenti: tabella, equazione, grafico.



Facciamo vedere anche come sia possibile passare da una rappresentazione all’altra, anche se alcuni passaggi sono più facili di altri (è infatti più semplice passare dall’equazione alla tabella che viceversa).

Partendo dagli esercizi svolti definiamo anche il grafico di una funzione, che fino a questo punto non è stato definito formalmente.

$f(x)$ SI OTTIENE SOSTITUENDO IL VALORE DELLA X ALL'EQUAZIONE $f(x) = x^2 - 9$

A(punto blu sulla parabola) = $(x; x^2 - 9)$ $A = (x; f(x))$

INPUT OUTPUT

SI DEFINISCE GRAFICO DI UNA FUNZIONE $(f(x))$ L'INSIEME DEI PUNTI DEL PIANO DI COORDINATE $(x; f(x))$

→ $F(x)$ SI OTTIENE SOSTITUENDO IL VALORE NUMERICO DELLA X NELL'EQUAZIONE $F(x) = x^2 - 9$

A (PUNTO BLU) DATO DA x e $x^2 - 9$ $A(x; y)$ OPPURE $A(x; f(x))$

INPUT OUTPUT

SI DEFINISCE GRAFICO DI UNA FUNZIONE CHE SI CHIAMA $F(x)$ L'INSIEME DEI PUNTI DEL PIANO DI COORDINATE $(x; f(x))$

└ IMMAGINE DI X

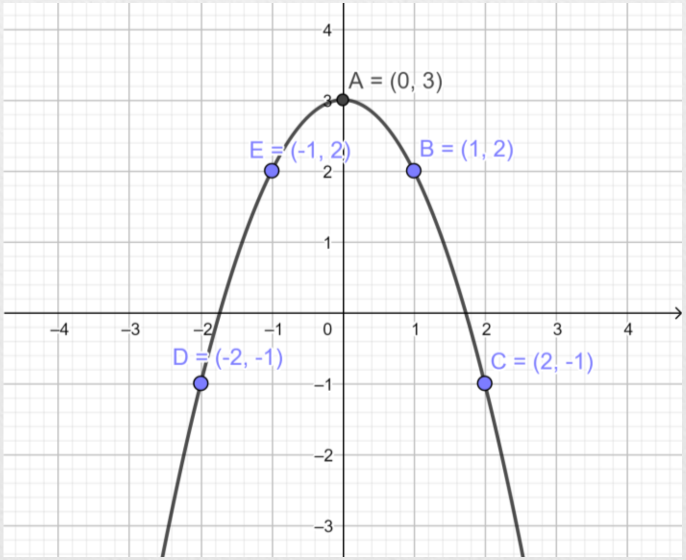
GRAFICO

Esempio 1. Partiamo quindi da alcune semplici tabelle, come quella riportato qui a fianco, per trovare il grafico e cercare di scrivere l'equazione corrispondente.

x	$f(x)$
0	1
1	0
2	1
3	4
4	9
-1	4
-2	9
-3	16

Esempio 2. Partiamo da un'equazione, ad es. $f(x) = x^3 - 2$ per passare prima a costruire la tabella e poi il grafico.

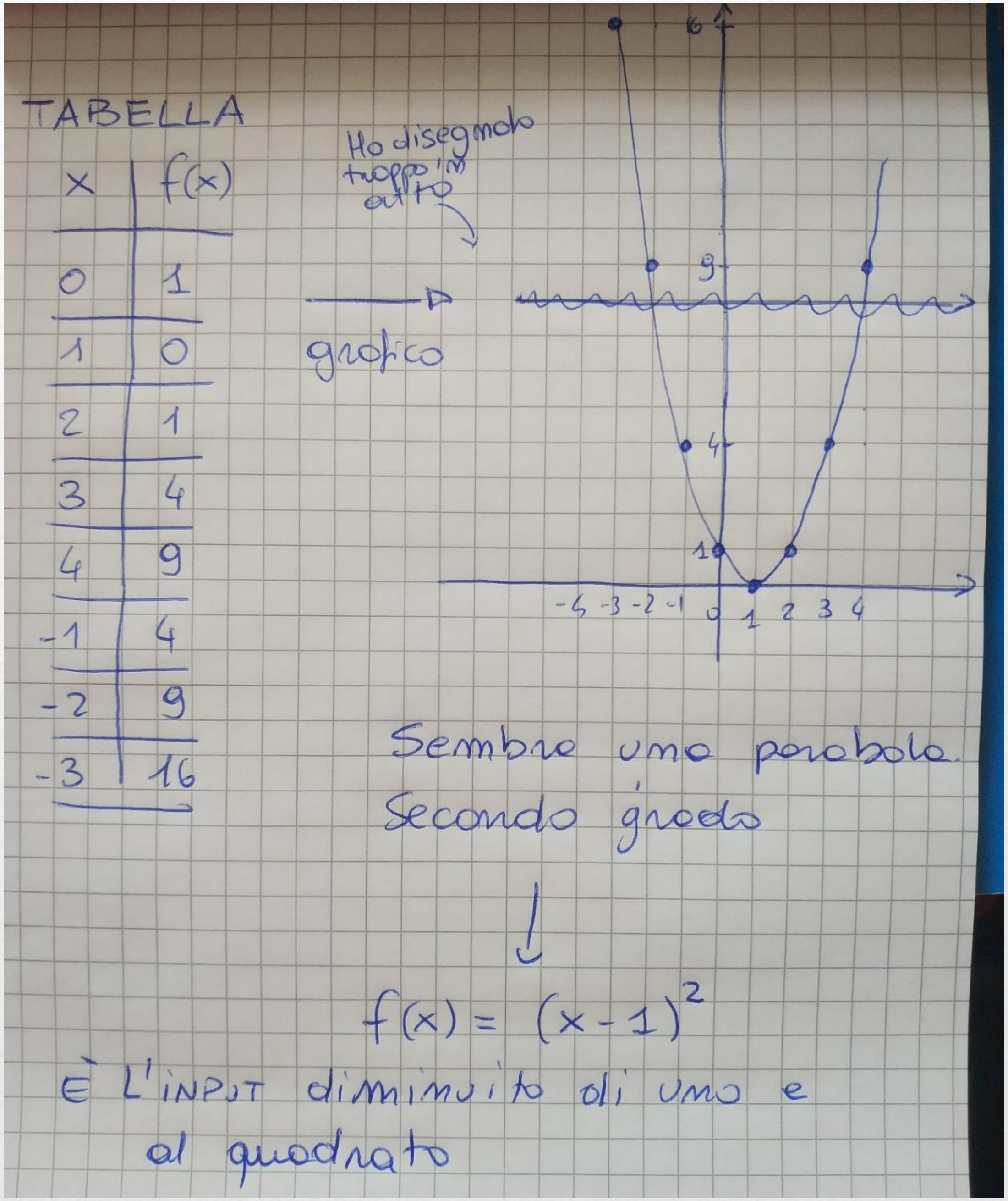
Esempio 3. Partiamo questa volta da un grafico, come quello riportato qui a fianco, cercando quei punti fondamentali che possiamo riportare in tabella, e cerchiamo infine di trovare anche l'equazione della funzione corrispondente.



Un esempio di esercizio svolto in classe a coppie.

È importante far sempre giustificare, per quello che possono, le scelte fatte e assicurarsi che ne discutano insieme.

Poi gli esercizi vanno corretti e commentati insieme in modo da consolidare le conoscenze utilizzate nello svolgimento



Lezione 6

Svolgiamo questa lezione in laboratorio.

Questa è una attività che consolida quanto fatto in precedenza e introduce un modo di utilizzo di Geogebra che permette di visualizzare contemporaneamente le tre rappresentazioni semiotiche della funzione.

L’esercitazione è sempre da svolgere a coppie con le stesse modalità descritte in precedenza. Le istruzioni che sono state descritte nelle slide successive possono anche essere date a voce e mostrando i passaggi sulla LIM o sul videoproiettore. Oppure possono essere date scritte come di seguito con la richiesta di seguirle e poi di commentare quanto fatto.

Questa lezione è stata svolta principalmente per dare uno strumento elettronico con cui fare i passaggi tra rappresentazioni semiotiche, dato che per alcuni studenti disegnare a mano sul piano cartesiano è risultato particolarmente difficile.

Alla fine dell’attività, nella parte dei compiti a casa, viene data una lista delle funzioni elementari che saranno fondamentali per eventuali lavori sulle trasformazioni dei grafici o semplicemente per avere una visualizzazione di quelli che sono i grafici delle funzioni maggiormente utilizzate in matematica.

Il lavoro su dominio e insieme delle immagini, poi, sarà fondamentale per il successivo studio di funzione completo che verrà affrontato in quarta, nonché per lo studio della funzione esponenziale e di quella logaritmica che saranno l’argomento successivo del programma di terza.

1. $f(x) = 2x + 1$

INPUT x	OUTPUT f(x)
0	1
1	3
2	5
3	7
4	9
-1	-1
-2	-3
-3	-5
-4	-7

2. $f(x) = -x^2 + 2$

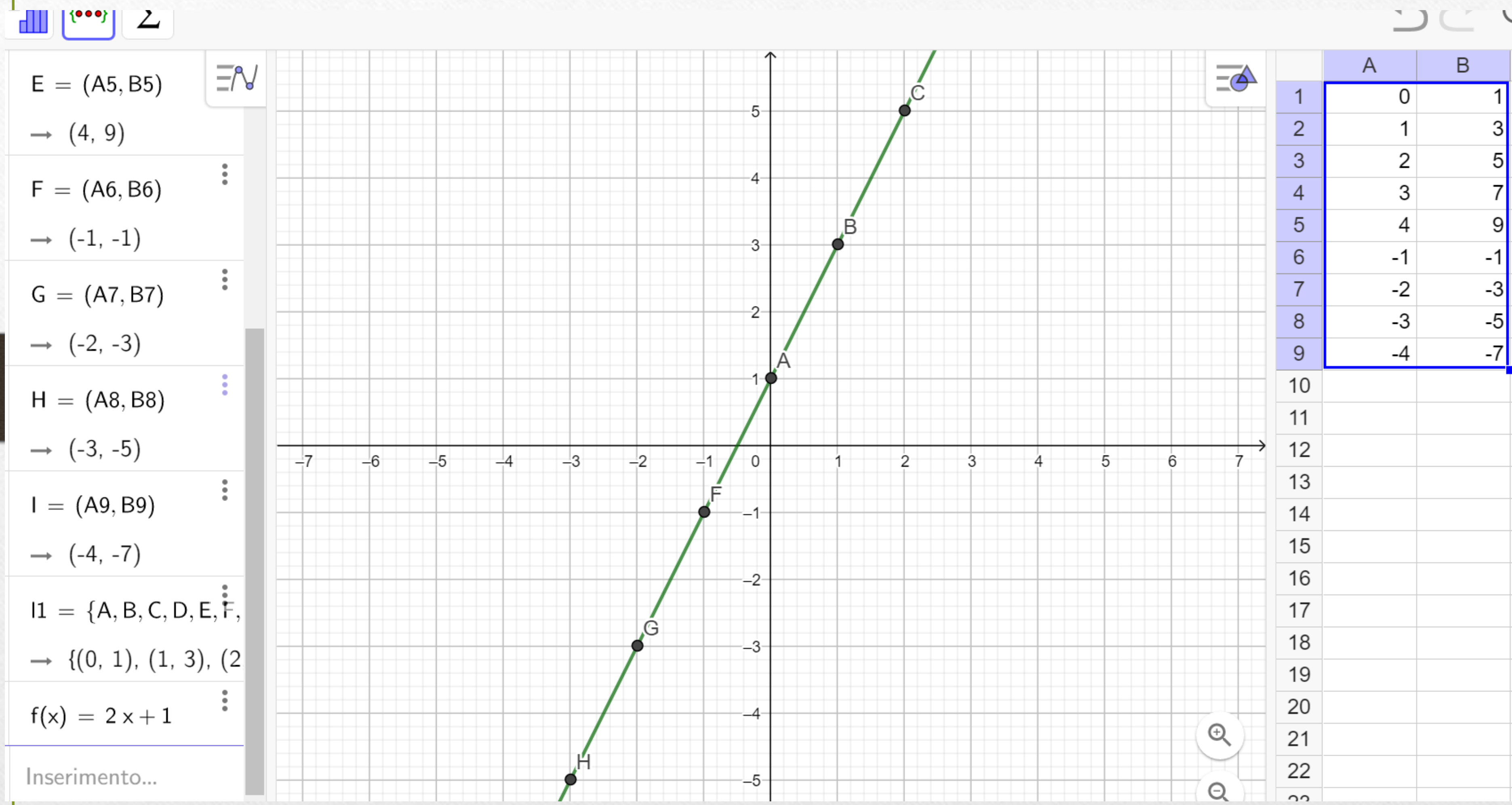
INPUT x	OUTPUT f(x)
0	2
1	1
2	-2
3	-7
4	-14
-1	1
-2	-2
-3	-7
-4	-14

Consegna 1
Apri Geogebra e seleziona foglio di calcolo nella lista visualizza
Inserisci nella colonna A i valori del domino usati nella tabella della prima funzione. Nella colonna B le relative immagini.
Seleziona le celle che hai riempito e usa il comando “crea lista di punti”.
(*)
Che cosa compare sulla vista grafici? Unendo i punti ottenuti, che cosa ottieni?
C’è differenza col procedimento che hai usato per costruire il grafico della funzione?

Nella casella inserimento scrivi $f(x) = 2x + 1$ e premi invio.

Che cosa compare sulla vista grafici? I punti che avevi trovato in precedenza, dove si trovano?
Sapresti dire qual è il dominio della funzione? E l’insieme delle immagini?

Ecco la schermata di svolgimento della prima consegna



Consegna 2

Cancella adesso il grafico della funzione. Cancella di dati della colonna B, ma non quelli della colonna A

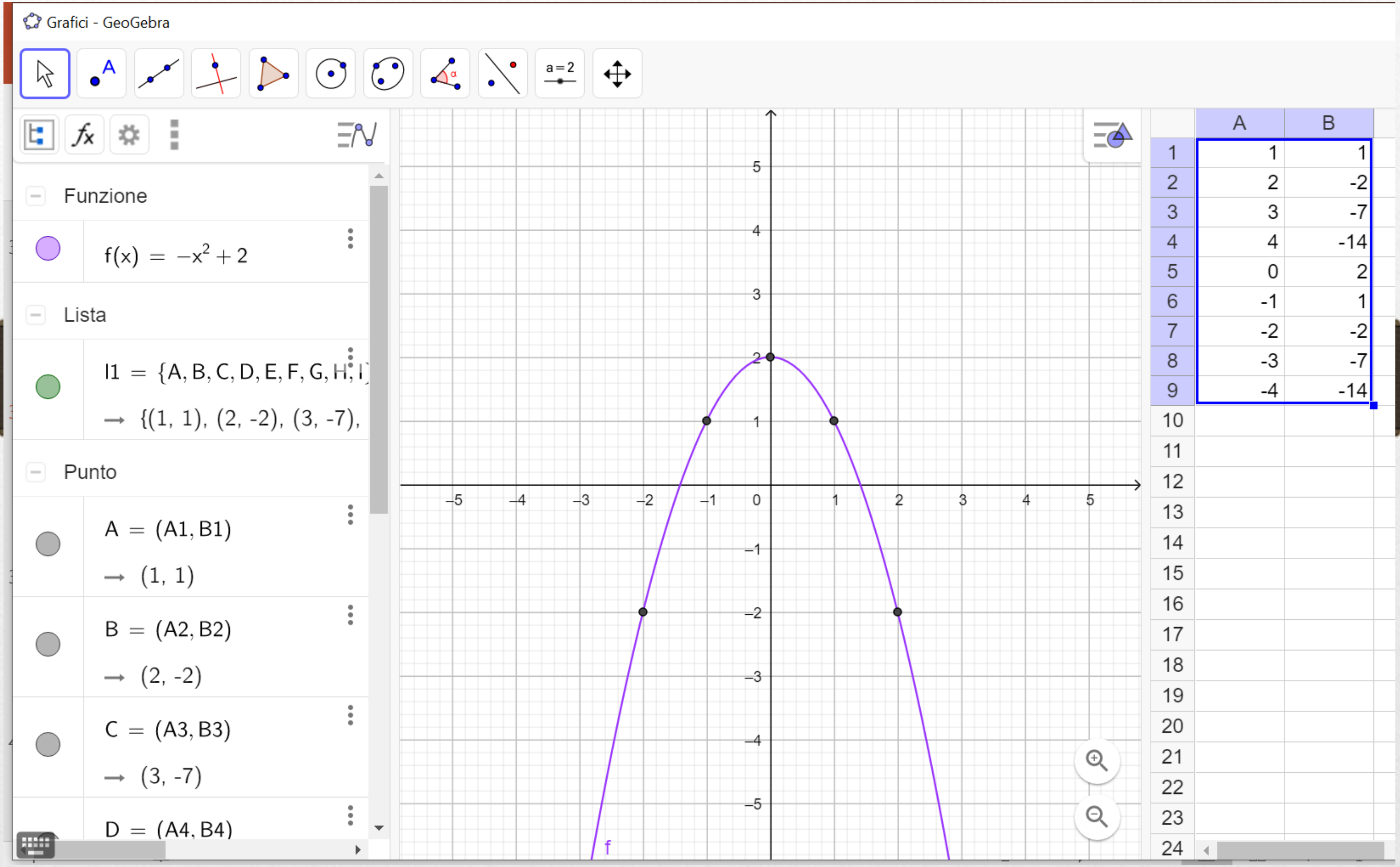
Posizionati sulla cella B1 e inserisci la seguente formula: **=-A1^2+2**. Premi invio.

Nella casella B1 dovrebbe comparire un numero che corrisponde all’immagine del valore contenuto nella casella A1 secondo la funzione $f(x) = -x^2 + 2$. Controlla se è corretto.

Seleziona ora la cella B1. In basso a destra compare un quadratino blu. Trascinalo verso il basso fino ad arrivare all’ultimo valore di input che hai. Il programma dovrebbe in automatico calcolare i valori della funzione per ciascun valore in input.

Procedi come nell’esercizio precedente partendo dal (*): crea la lista di punti; inserisci la funzione; rispondi alle domande; cerca dominio e insieme delle immagini.

Ecco la schermata di svolgimento della seconda consegna



Per casa

Ripeti l'esercizio fatto in classe con le seguenti funzioni. Salva i grafici di ciascuna funzione. Se puoi, stampali e mettili sul quaderno.
(Se non sono stati spiegati, vanno spiegati i comandi sqrt e sqrt[3]).

1. $f(x) = x$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = x^3$
4. $f(x) = \frac{1}{x}$
5. $f(x) = \sqrt{x}$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Chiameremo queste "funzioni di base".

Lezione 7 (1-2 ore)

In questa lezione verranno chiamati ragazzi alla lavagna a disegnare alcuni grafici di funzione e a individuare il dominio e l'insieme delle immagini.

consegna tipo

Data la funzione $f(x) = \sqrt{x-5}$

1. Sei in grado di trovare il dominio di questa funzione senza vederne il grafico? Spiega in che modo.
2. Riesci a trovare alcuni punti del grafico della funzione attraverso una tabella?
3. Usando Geogebra, disegnane il grafico. Osservando il grafico, puoi controllare se il dominio che avevi trovato è corretto? Sapresti individuare anche l'insieme delle immagini?

Se l’esercitazione va bene, si possono vedere anche grafici di funzioni definite a tratti con il comando se.

Esempio

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x+2 & se\ x\geq 3\\ x-1 & se\ x<3\end{cases}$$

che in comando Geogebra diventa se[x>=3,1/3x+2,x-1].

Si possono anche assegnare delle tabelle da cui dedurre le rappresentazioni analitiche, facendo attenzione non siano troppo complesse, altrimenti si rischia di mettere in difficoltà gli studenti senza verificare l’effettiva comprensione di quanto studiato finora. Qua si possono anche proporre tabelle che non sono funzioni o che non hanno rappresentazioni algebriche univoche, sempre se la classe risponde bene.

Questa lezione servirà anche come verifica orale di quanto appreso dagli studenti e possiamo quindi dedicarci anche due ore.

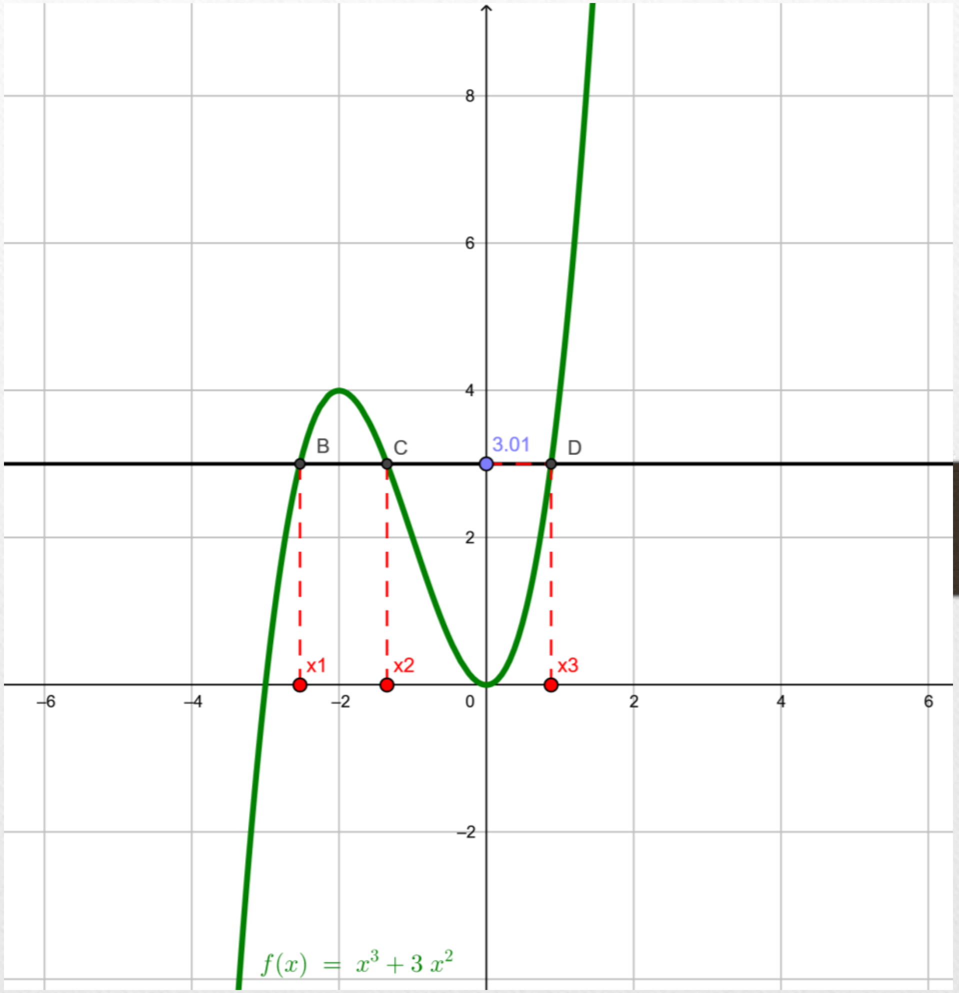
Lezione 8

Da svolgersi in laboratorio.

Si torna a lavorare a coppie con un file di Geogebra opportunamente costruito. (v. figura) e come sempre si chiede alla fine di condividere quanto scoperto

Il file prevede la possibilità di spostare il punto blu che si trova sull’asse delle ordinate, ma non di spostare quelli rossi sull’asse delle ascisse, né quelli che si trovano sul grafico della funzione.

Come etichetta del punto blu c’è il valore dell’ordinata.

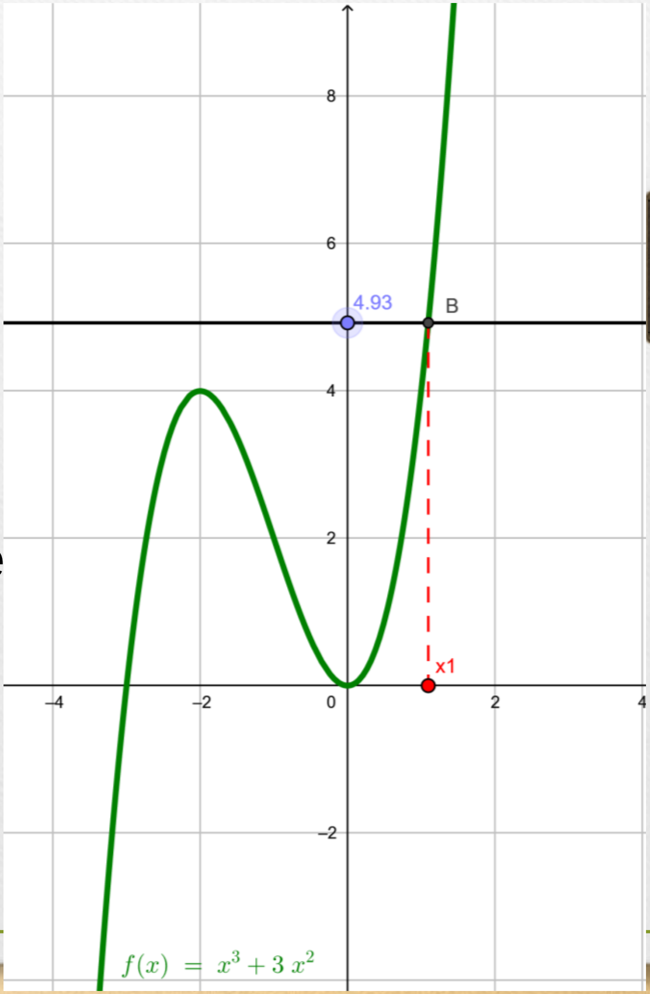


Spostando il punto sull'asse y si sposta la retta orizzontale passante per tale punto e vengono individuati i suoi punti di intersezione con il grafico della funzione, che in figura sono indicati con B, C e D.
Insieme ai tre punti si spostano anche le loro proiezioni sull'asse x (v. figura precedente), che vengono identificate con x_1 , x_2 e x_3.

In basso viene riportata l'espressione analitica della funzione.

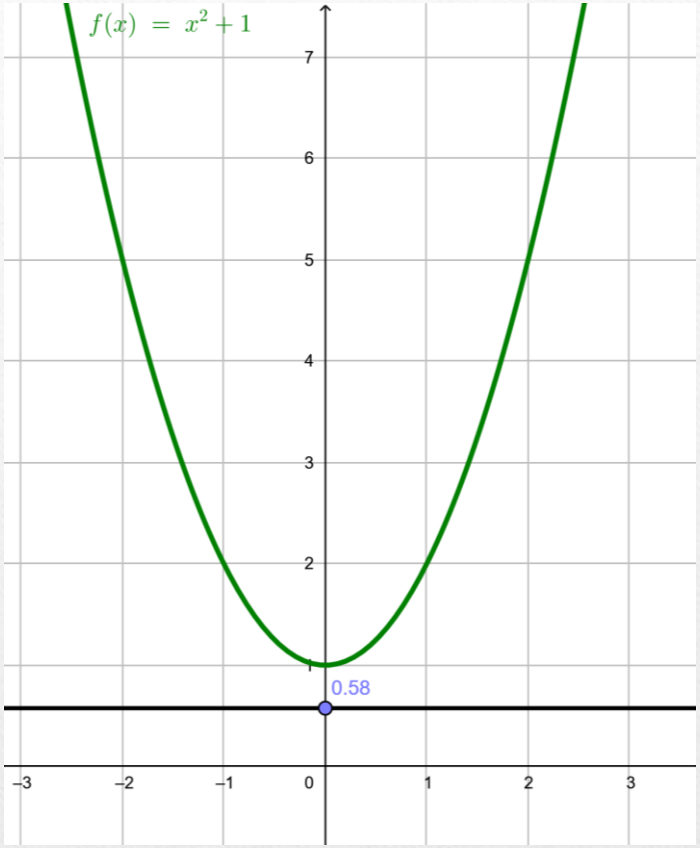
Quando la retta interseca il grafico della funzione in un numero inferiore di punti, gli altri spariscono come possiamo vedere nella figura a fianco in cui abbiamo solo x_1.

Se la retta non incontra il grafico della funzione il file non visualizza nessun punto.



Se la retta non incontra il grafico della funzione il file non visualizza nessun punto, come si può vedere nella figura a fianco.

Ovviamente si tratta di una funzione diversa dalla precedente che aveva come insieme delle immagini tutto l'insieme dei reali.



Consegna:
Nel piano cartesiano sono rappresentati il grafico della funzione $f(x) = x^3 + 3x^2$ e una retta orizzontale.

Prova a spostare la retta orizzontale afferrando e trascinando il punto blu. Osserva cosa succede di volta in volta.

1. Per quali valori di y la retta incontra la funzione in un solo punto?
2. Per quali valori di y la retta incontra la funzione in due punti?
3. Per quali valori di y la retta incontra la funzione in tre punti?

La retta orizzontale ha equazione $y = k$. Al variare di k si hanno, matematicamente, rette diverse.

4. Sapresti trovare le x dei punti di intersezione tra il grafico della funzione e la retta y = 0? E con y = 4?
5. Verifica i tuoi calcoli sul grafico.
6. Prova a spiegare i passaggi che hai fatto per trovare le soluzioni.

Riporto un dialogo di una coppia che ha lavorato sul file. Una delle due studentesse aveva risolto per via grafica l’esercizio trovando i valori di x che davano come immagine 0 e 4 spostando la retta come richiesto, ma rimane perplessa dalla richiesta di verificare con i calcoli.

E: Ma non bisogna fare il sistema? Per trovare i punti di intersezione?

V: (annuisce)

E: E tra cosa?

V: Tra (indica sullo schermo la funzione)

E: Tra quella … ma sostituendo i punti?

V: No, cioè. Devi mettere a sistema la funzione e poi y uguale …

E: y uguale a k?

V: y uguale a zero.

E: Perché uguale a zero?

V: Perché devi trovare l’intersezione con la retta y=0

E: Ma qua (indicando sullo schermo la funzione) devo sostituire qualcosa alle x?

V: No.

E: La lascio così?

V: Sì. Poi devi fare il metodo del confronto e ti viene $x^3 + 3x^2 = 0$. Poi lo calcoli e trovi le soluzioni.

E: Devo fare tutti i calcoli

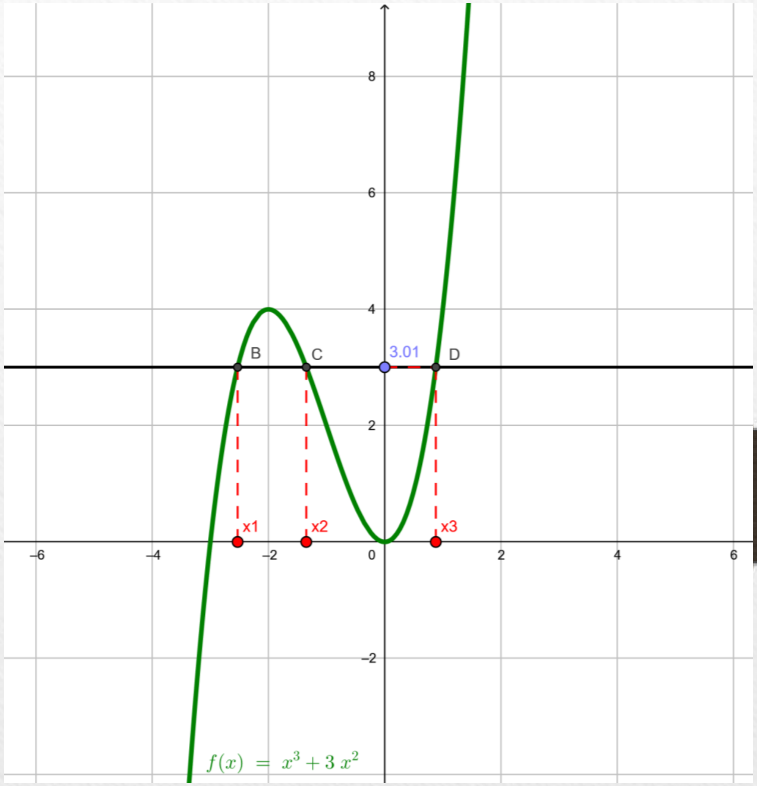
V: Si.

In questo dialogo si capisce come il file permetta di lavorare con due approcci diversi: uno principalmente grafico e uno algebrico.
E. è una ragazza che ha sempre avuto problemi con la matematica e non si è mai sentita preparata, ma è in grado di rispondere correttamente alle domande utilizzando i punti mobili. Ciò fa capire che ha compreso il concetto di intersezione correttamente.
V. invece è sempre stata molto brava in algebra e aveva accuratamente evitato i maneggiare il file. Il suo primo approccio per rispondere alla domanda 4 è stato quello di impostare il sistema senza muovere i punti sul grafico.

Far lavorare studenti con approcci diversi permette di apprendere qualcosa di nuovo tra pari e consolida le conoscenze in un percorso di scoperta.
La struttura stessa del file e delle consegne costringe gli studenti ad una riflessione sui processi che li hanno portati a trovare le soluzioni.
Altro vantaggio, soprattutto per coloro che non sono forti in algebra, è che il file permette di trovare comunque le soluzioni anche senza svolgere calcoli grazie alla manipolazione grafica.

Altro dialogo interessante è il seguente, che avviene tra il professore e uno dei ragazzi chiamato alla lavagna a riportate quanto fatto col compagno

A: Vediamo innanzitutto che ci sono tre x: $x_1, x_2\ e\ x_3$
Prof: Ok.
A: se noi andiamo a mettere su y zero (e sposta il punto blu lungo l'asse y fino al valore zero) vediamo che i punti, cioè i due punti (indica con il mouse i due punti x_2 e x_3) in un ceto senso si sovrappongono. Perché c'hanno appunto le stesse coordinate. E quindi, niente, si sovrappongono.
Prof: Perfetto.



I contenuti che possono emergere dalla discussione in classe possono essere i più svariati. In questo caso la discussione è passata al concetto di molteplicità algebrica di una soluzione e siamo andati ad analizzare l'equazione risolvente del sistema individuando algebricamente quanto osservato graficamente.

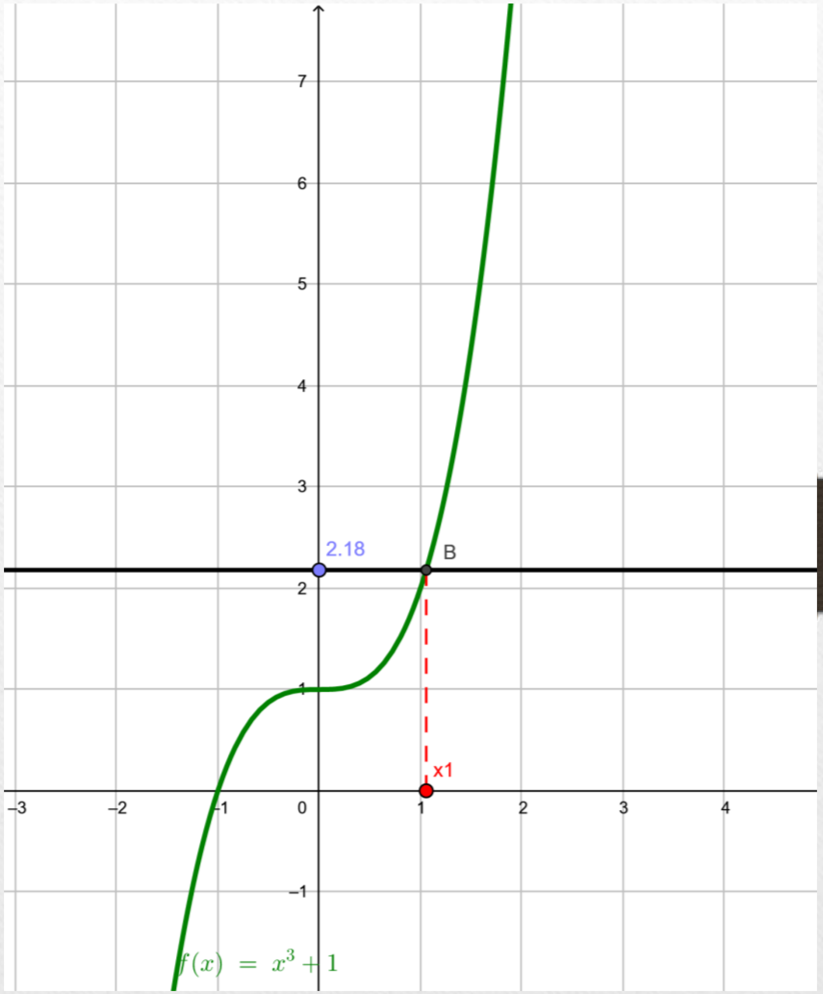
Di seguito vengono riportate altre consegne da far svolgere in coppie agli studenti.

Sono state usate due ore in laboratorio, perché la discussione ha bisogno di tempo e perché non è mai possibile prevedere quali contenuti potranno emergere.
Diventa fondamentale che l'insegnante decida quali temi sviluppare e quai invece rimandare magari a momenti successivi.

Per questo, sviluppare il percorso in anni diversi e con classi diverse porta sempre a risultati diversi sia come contenuti appresi che come capacità espositive sviluppate.

Consegna 2:
Prova a spostare la retta orizzontale afferrando e trascinando il punto blu. Osserva cosa succede alle x mentre sposti la retta.

1 Ci sono valori di y che sono immagine di più di un valore di x?
2 Ci sono valori di y che non sono immagine di nessun valore di x?
3 Sapresti trovare (se c'è) un valore di x che ha come immagine 9?
Fallo prima risolvendo l'equazione e poi controlla il risultato sul grafico.
4 Sapresti trovare un valore di x che ha come immagine 0?
5 Controlla il risultato muovendo la retta sul grafico. In che posizione si trova la retta?



Es 2 LAB

$$f(x) = x^3 + 1$$

A ogni y corrisponde un x

"A ogni immagine corrisponde una controimmagine"

③ $\begin{cases} y = 9 \\ y = x^3 + 1 \end{cases}$ $x^3 = 8$ $x = 2$

y = immagine

x = controimmagine

$\Downarrow$

$\begin{cases} x = 2 \\ y = 9 \end{cases}$ $A = (2; 9)$

④ $\begin{cases} y = 0 \\ y = x^3 + 1 \end{cases}$ $x^3 = -1$ $x = -1$

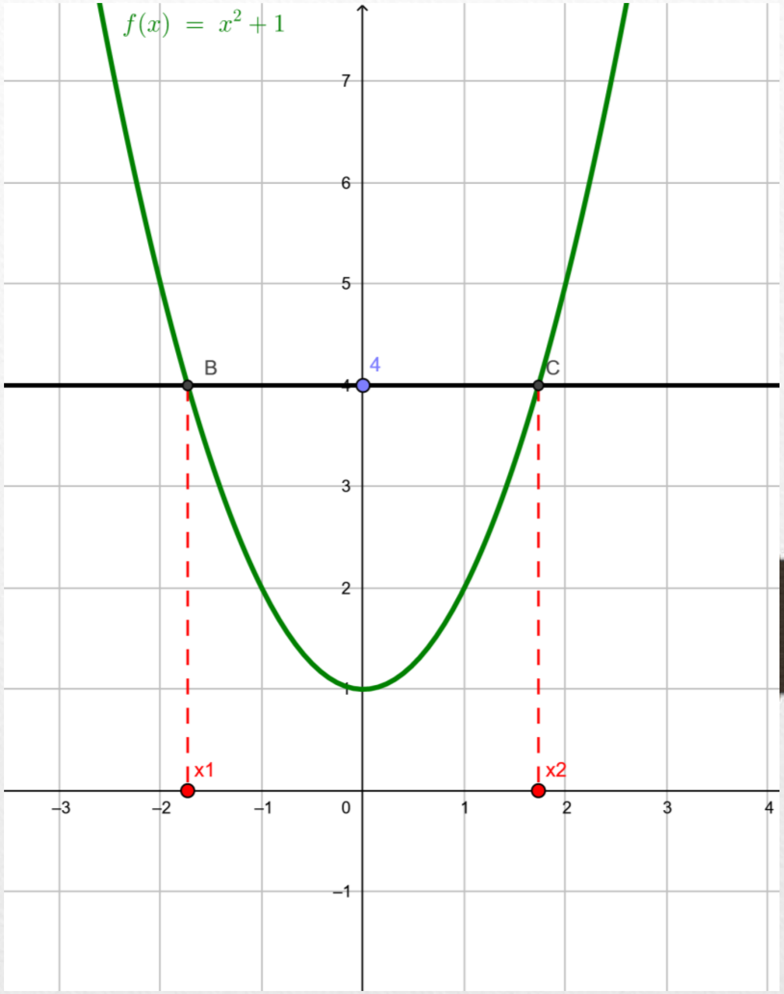
$\Downarrow$

$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ $B = (-1; 0)$

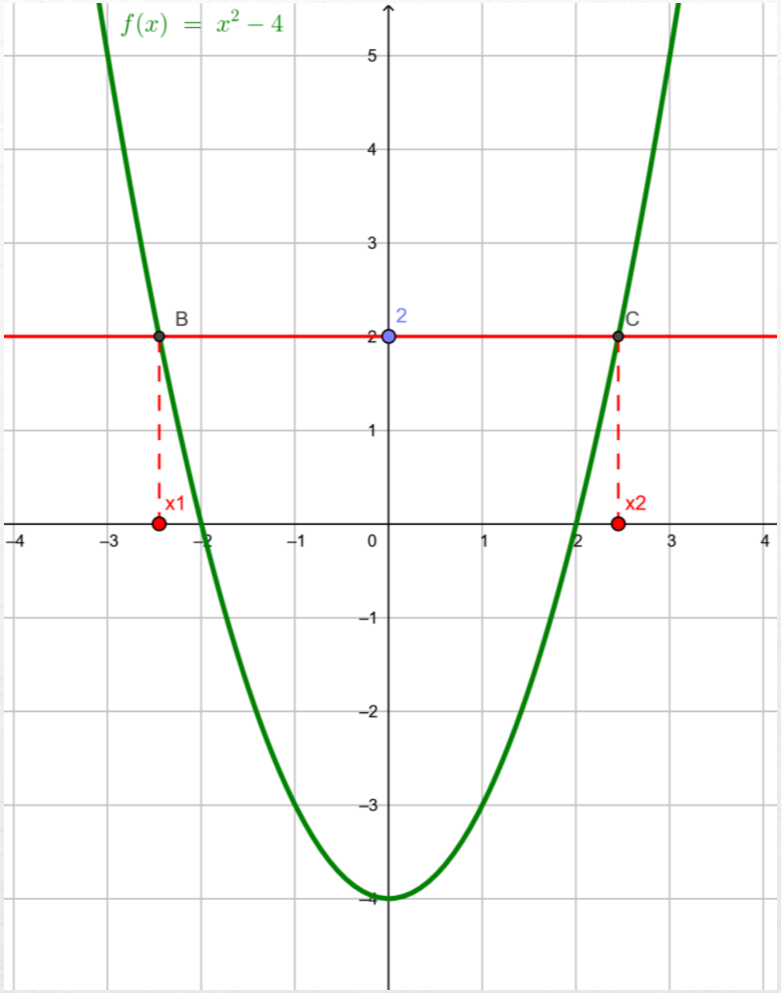
la retta è sopra l'asse x

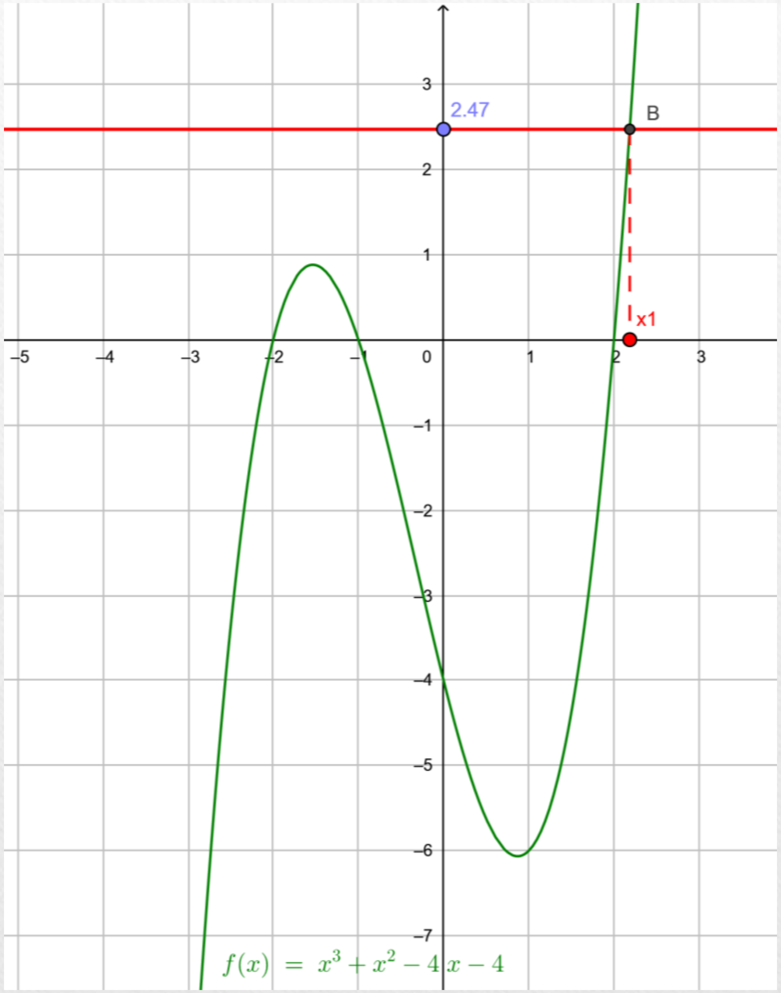
Consegna 3:
Prova a spostare la retta orizzontale afferrando e trascinando il punto blu. Osserva cosa succede alle x che hanno come immagine il valore y.

1. Ci sono valori di y che sono immagine di più di un valore di x?
2. Ci sono valori di y che non sono immagine di nessun valore di x? E di uno solo?
3. Sapresti trovare un valore di x che ha come immagine 2? Quanti ne trovi? Fallo prima risolvendo l'equazione e poi controlla il risultato sul grafico.
4. Sapresti trovare un valore di x che ha come immagine 0? Puoi giustificare il risultato ottenuto?



Ecco alcuni file con esercizi assegnati a casa.
Le richieste ricalcano quelle delle consegne precedenti.





Lezione 9

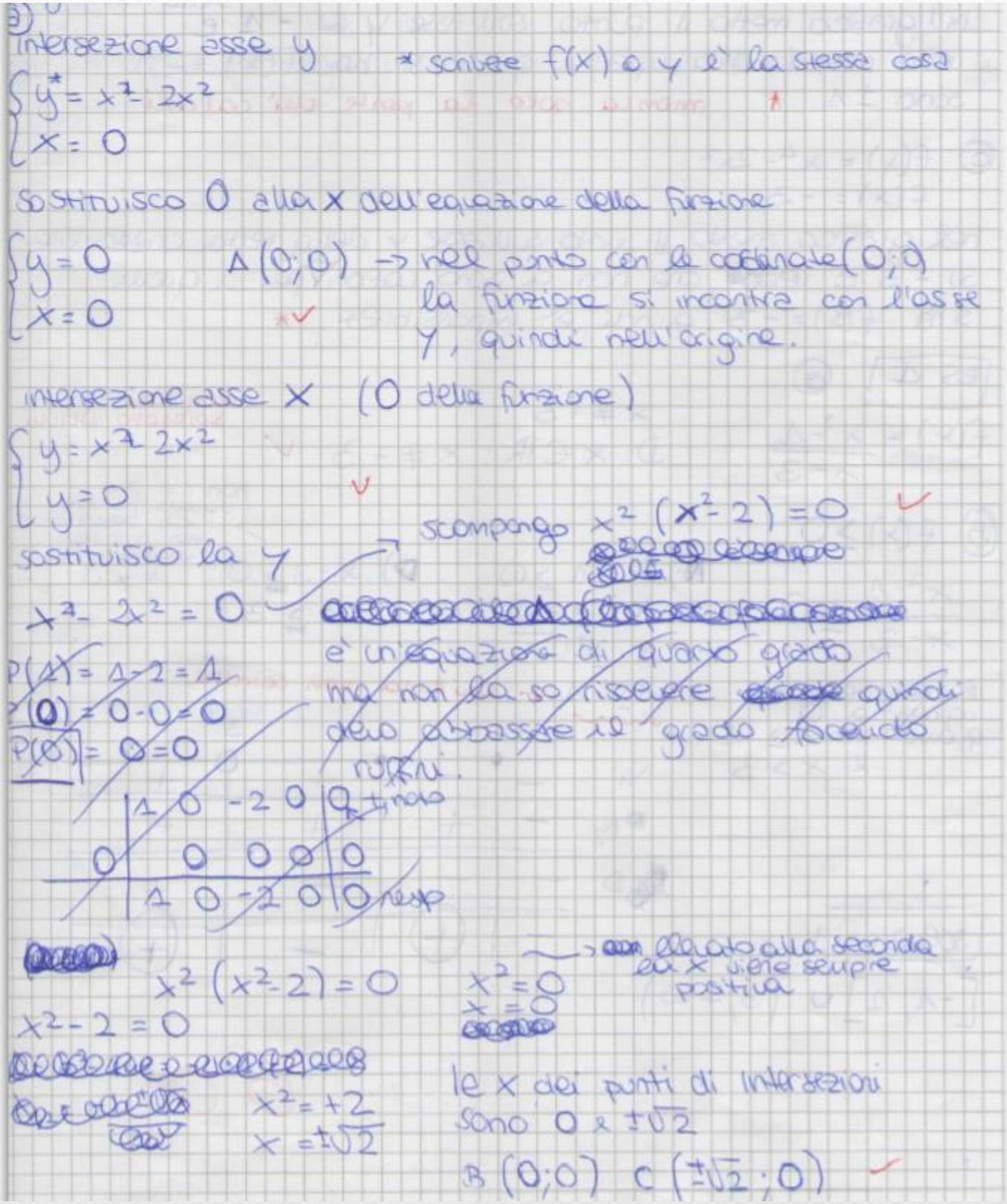
La lezione si sviluppa sulla correzione dei compiti casa ed è stata usata anche come verifica orale.

A seguito della discussione fatta, i file si sono rivelati utili per affrontare l’argomento delle funzioni iniettive, suriettive e biunivoche, principalmente da un punto di vista grafico.

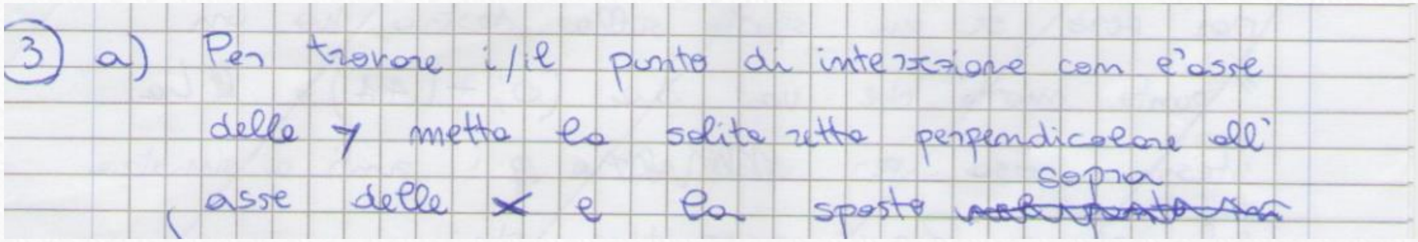
Il file assegna infatti una immagine e va alla ricerca delle controimmagini rendendo evidente quali e quante controimmagini sono presenti e individuandone il valore.

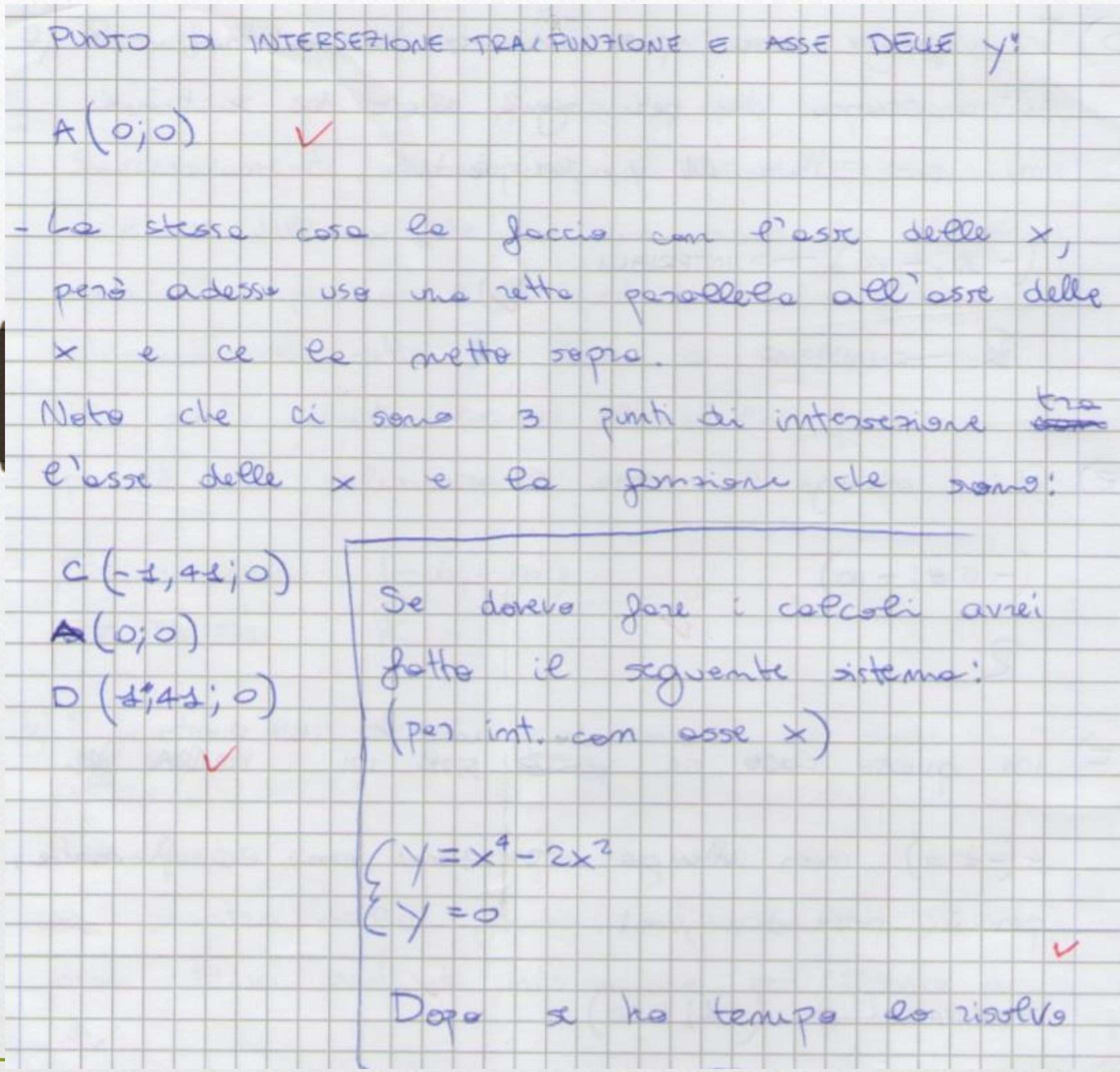
Un’ altra richiesta è stata quella di pensare ad un modo per trovare le intersezioni con l’asse delle y sia per via grafica che per via algebrica. Si riportano successivamente alcuni esercizi svolti dagli studenti.

Per casa sono stati assegnati grafici di funzioni con la richiesta di individuare se le funzioni fossero o meno iniettive, suriettive o biunivoche. La richiesta aggiuntiva è stata di motivare la risposta immaginando di spostare una retta orizzontale come nel file di Geogebra e descrivendo quanto si sarebbe potuto osservare.



Questi esercizi sono stati risolti con Geogebra a disposizione, chiedendo di svolgerli col metodo preferito, ma spiegando i passaggi svolti.
Questa studentessa ci fa vedere una risoluzione prevalentemente algebrica.


3) a) Per trovare i/il punto di intersezione con l'asse delle y metto la solita retta perpendicolare all'asse delle x e la sposto sopra


PUNTO DI INTERSEZIONE TRA FUNZIONE E ASSE DELLE y:

A(0;0)

- La stessa cosa la faccio con l'asse delle x, però adesso uso una retta parallela all'asse delle x e ce la metto sopra.

Noto che ci sono 3 punti di intersezione tra l'asse delle x e la funzione che sono:

C(-1,41;0)
A(0;0)
D(1,41;0)

Se dovevo fare i calcoli avrei fatto il seguente sistema: (per int. con asse x)

$$\begin{cases} y=x^4-2x^2 \\ y=0 \end{cases}$$

Dopo se ho tempo lo risolvo

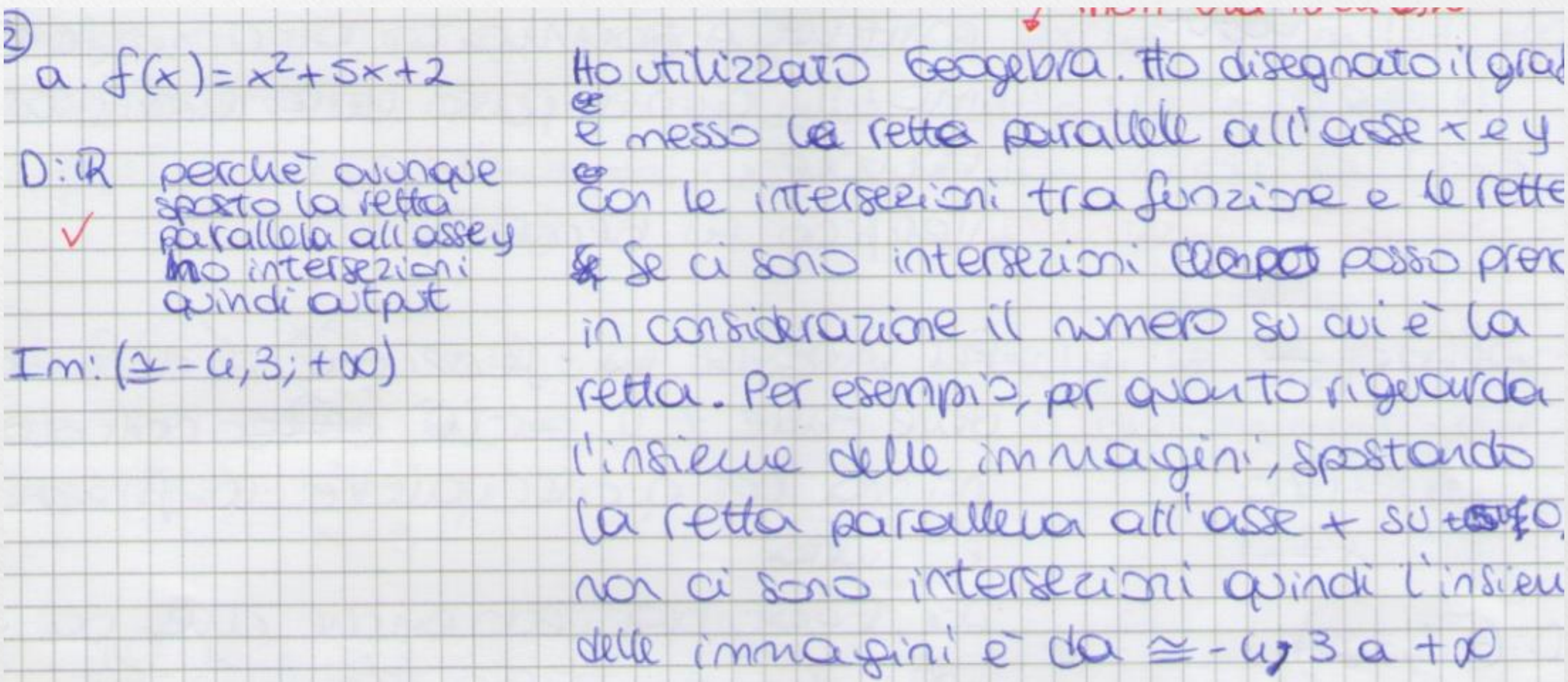
Lo stesso esercizio risolto con approccio grafico da un altro studente che, negli anni precedenti, ha sempre avuto grandi difficoltà con la matematica in generale e in particolare con il calcolo algebrico.
La procedura risolutiva è impeccabile, anche se il «dopo se ho tempo lo risolvo» ci fa sorridere.

Lezione 10

Anche questa lezione è stata usata per le verifiche orali.

Inoltre è stato chiesto agli studenti se fosse possibile utilizzare le rette mobili che abbiamo usato fino a questo momento per indagare dominio e insieme delle immagini delle funzioni.

Di seguito alcuni dei lavori degli studenti.



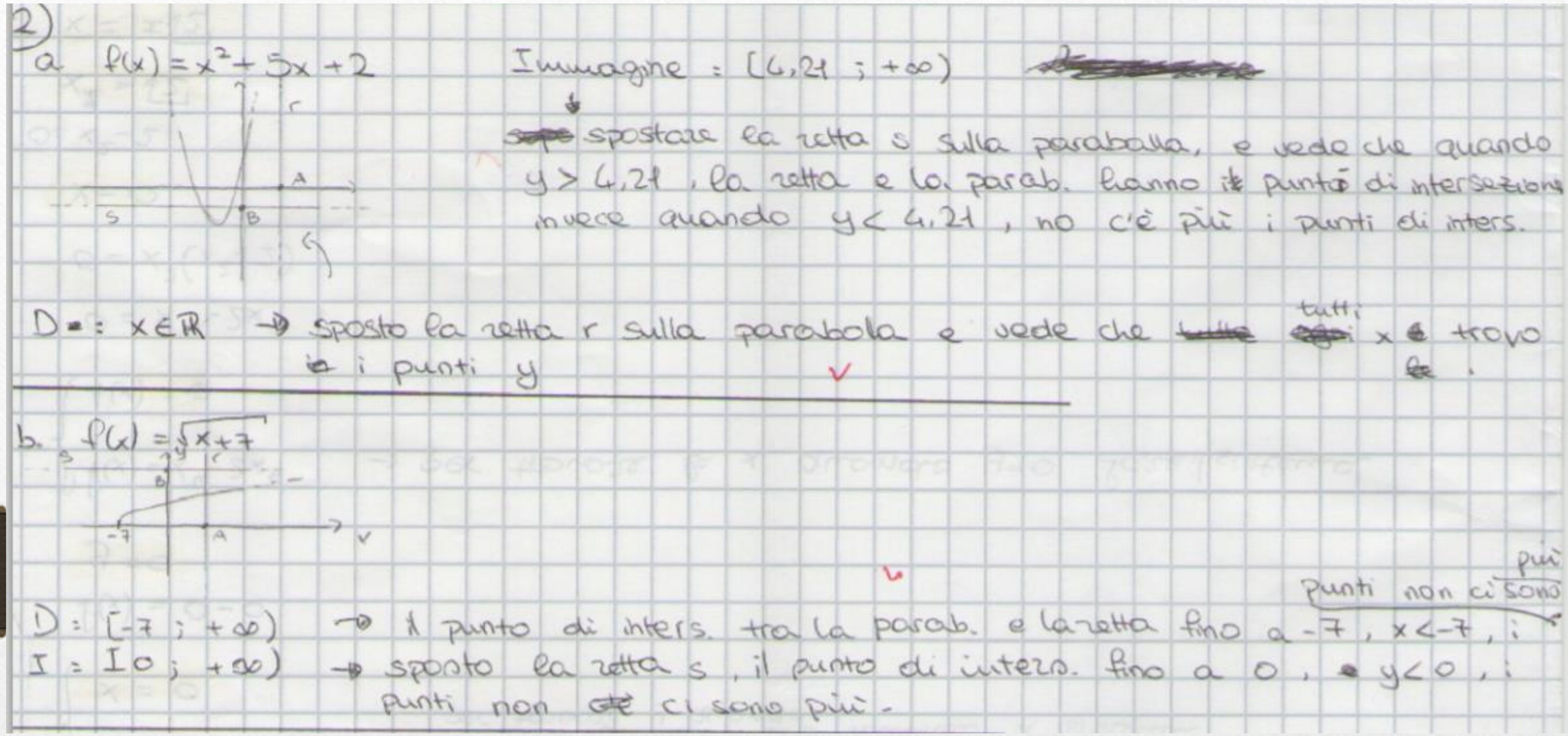
2)

a. $f(x)=x^2+5x+2$

D: $\mathbb{R}$ perchè ovunque sposto la retta parallela all'asse y ho intersezioni quindi output

Im: $(\cong -4{,}3; +\infty)$

Ho utilizzato Geogebra. Ho disegnato il graf e messo la retta parallele all'asse x e y con le intersezioni tra funzione e le rette. Se ci sono intersezioni posso pren in considerazione il numero su cui è la retta. Per esempio, per quanto riguarda l'insieme delle immagini, spostando la retta parallela all'asse x su ≠0, non ci sono intersezioni quindi l'insiem delle immagini è da $\cong -4{,}3$ a $+\infty$



2)

a $f(x) = x^2 + 5x + 2$ Immagine: $[4{,}21\ ;\ +\infty)$ [redacted]

~~sopo~~ spostare la retta s sulla parabolla, e vede che quando $y > 4{,}21$, la retta e la parab. hanno i punti di intersezione invece quando $y < 4{,}21$, no c'è più i punti di inters.

D: $x \in \mathbb{R}$ → sposto la retta r sulla parabola e vede che ~~tutte~~ tutti ~~ogni~~ i x trovo i punti y

b. $f(x) = \sqrt{x+7}$

D: $[-7\ ;\ +\infty)$ → il punto di inters. tra la parab. e la retta fino a -7, $x<-7$, i punti non ci sono più

I: $[0\ ;\ +\infty)$ → sposto la retta s, il punto di interz. fino a 0, $y<0$, i punti non ~~ci~~ ci sono più.

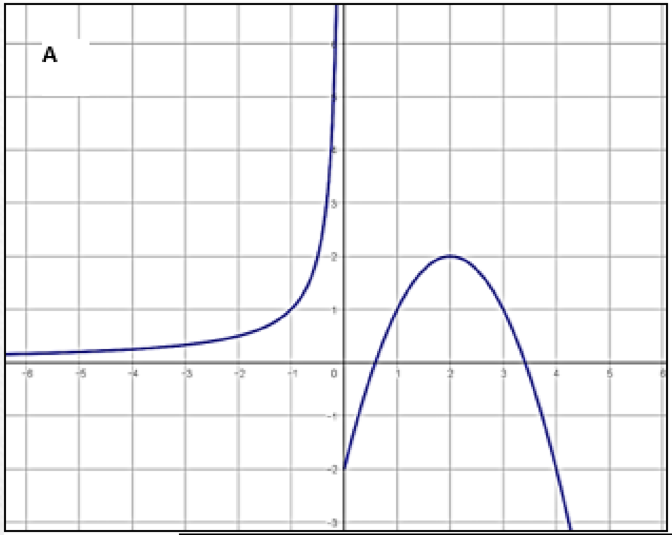
Questa studentessa, attraverso l'approccio grafico, è riuscita a far capire il procedimento usato per trovare dominio e insieme delle immagini pur non avendo una buona proprietà di linguaggio (studentessa non italofona). Questo fa capire come un approccio visivo possa «tirare dentro la lezione» anche gli studenti con maggiori difficoltà linguistiche.

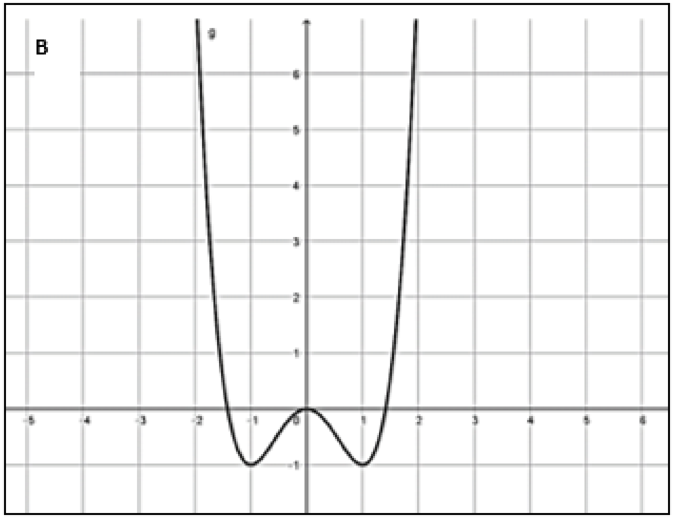
Lezione 11

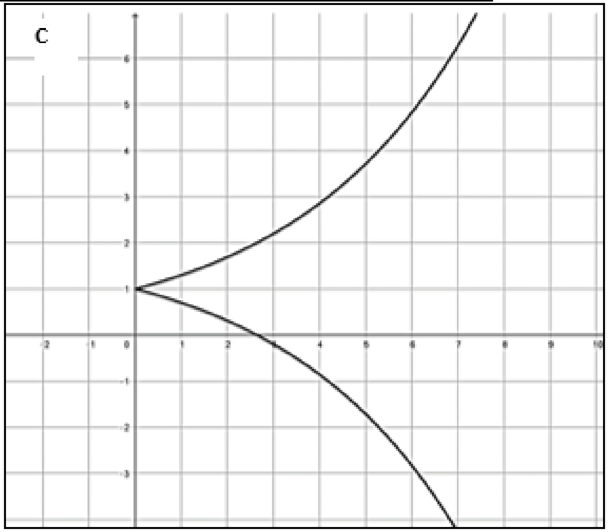
A questo punto è stata proposta una verifica.

Il lavoro è comunque andato avanti con la stessa modalità, studiando anche il segno delle funzioni, crescenza e decrescenza, funzioni pari e dispari, funzioni composte e funzioni inverse, ma non sono oggetto di questa relazione.

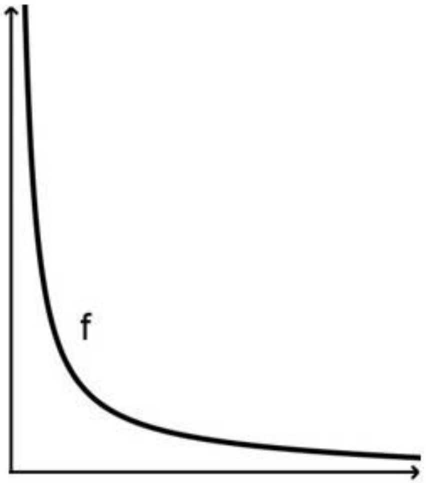
1. Individua quali grafici rappresentano una funzione $f: R \rightarrow R$ e quali no, spiegando quali hai escluso e perché. Per quei grafici che rappresentano funzioni indica se sono iniettive, suriettive o biunivoche motivando la tua risposta. Se non sono biunivoche restringi gli insiemi di definizione in modo da renderle sia iniettive che suriettive.







2. La funzione $f(x) = \frac{5}{x^3}$ è rappresenta nel primo quadrante dal grafico a fianco.
Quale delle seguenti affermazioni descrive il comportamento di *f*?



I. Mentre il valore di x si avvicina a 0, il valore di *f* aumenta.
II. Mentre il valore di x aumenta, il valore di *f* si avvicina a 0.
III. Mentre il valore di x si avvicina a 0, il valore di *f* si avvicina a 0.

☐ Solo I ☐ I e II

☐ Solo II ☐ II e III

☐ Solo III

Motiva la tua risposta immaginando di spostare punti sul grafico come abbiamo fatto nelle esplorazioni dei file su geogebra: disegna sul grafico i punti che ti servono e spiega quale sposti e quali si muovono di conseguenza.

3. Trova i domini delle seguenti funzioni motivando i procedimenti che usi. Rappresentali sia sotto forma di intervalli che graficamente sul piano cartesiano.

a. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

b. $g(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt[3]{5-x}$

c. $h(x) = \sqrt{\frac{x^2+9}{1-x}}$

4. Le seguenti tabelle rappresentano due funzioni: f(x) e g(x).

x	f(x)
3	7
0	1
2	5
-3	-5
-2	-3

x	g(x)
3	11
-3	11
1	3
0	2
-2	6

a. Scrivi in forma algebrica le relazioni tra x e f(x) e tra x e g(x)?

b. Definisci il grafico di una funzione e prova a tracciate il grafico delle due funzioni sullo stesso piano cartesiano

c. I grafici delle due funzioni hanno punti di intersezione? Individuali graficamente.

d. Come potresti trovare i punti di intersezione analiticamente? Fai gli opportuni calcoli per trovarli e verifica il risultato sul grafico.

Purtroppo non è stato possibile svolgere la verifica in laboratorio, altrimenti avrei fatto utilizzare Geogebra a avrei chiesto di svolgere l’esercizio 3, per esempio, spiegando i passaggi grafici fatti come nell’esercitazione

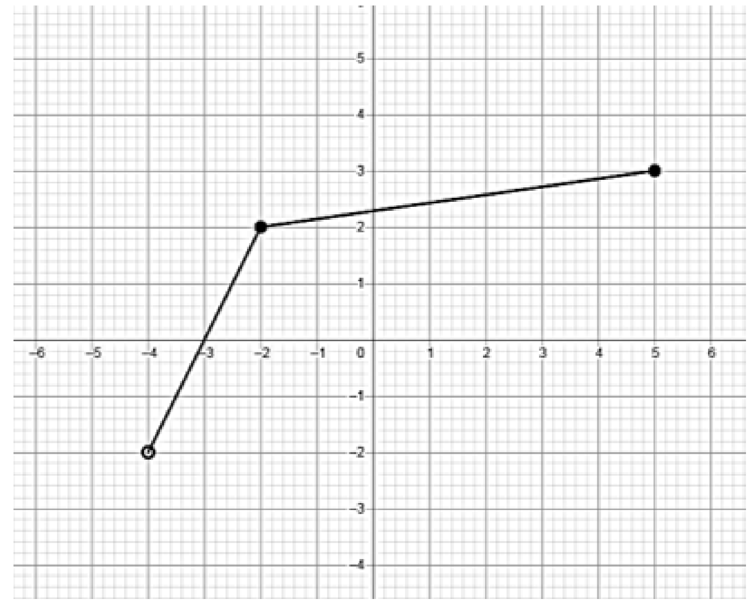
5. Considera il grafico della funzione da R→R a fianco.
   a. Spiega perché si tratta del grafico di una funzione.
   b. Definisci l'insieme delle immagini.
   c. Individua dominio e insieme delle immagini.
   d. Trova, leggendo sul grafico

      $L'immagine di -2$: ....

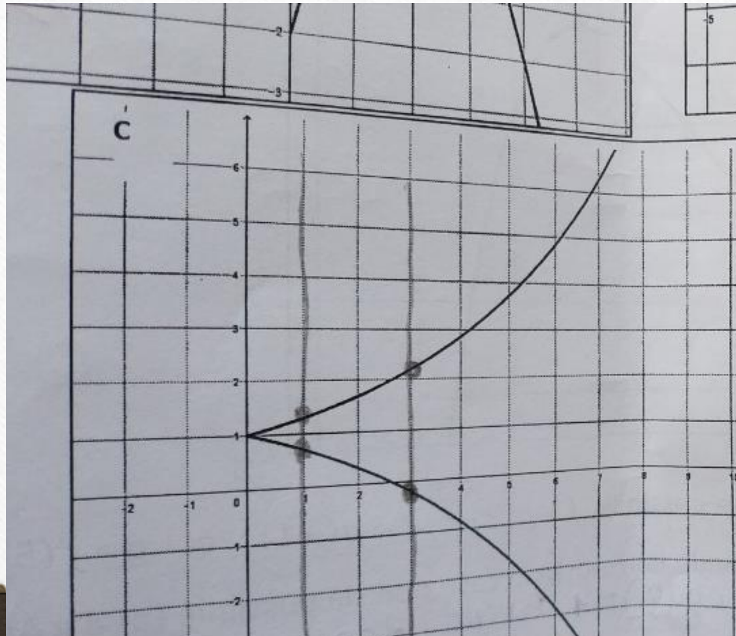
      $L'immagine di -4$: ....

      La controimmagine di 0: ....

      La controimmagine di 3: ....



Di seguito alcune produzioni significative.



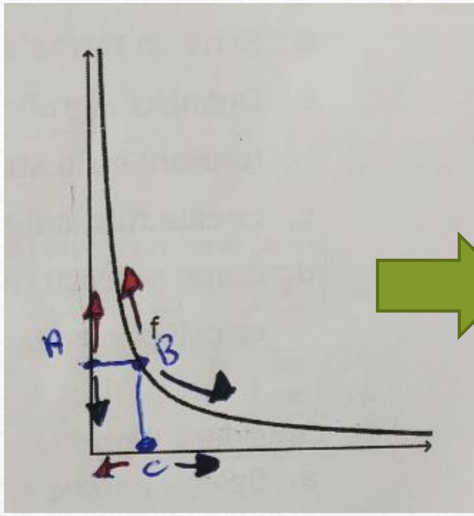
IL SEGUENTE GRAFICO NON RAPPRESENTA UNA FUNZIONE, PERCHÈ SE TRACCIO UNA LINEA VERTICALE INCONTRO PIÙ DI UN PUNTO E LA DEFINIZIONE DI FUNZIONE DICE CHE DATI DUE INSIEMI X e Y SI DICE FUNZIONE LA RELAZIONE CHE ASSOCIA AD OGNI ELEMENTO DI X UNO ED UN SOLO ELEMENTO DI Y.

8

1. a) R→R non é iniettiva, ma surriettiva si perche a una immagine corrispondo più controimmagine, faccio la restrizione del D: [2; +∞) e del iA: (-∞; 2] non hai spiegato perché è suriettiva

b) R→R non é iniettiva perche a una imagine corrispondono più controimmagini, non è surriettiva perche la funzione non passa dai numeri inferiori a y = -1, faccio la restrizione del D: [1; +∞) e iA: [1; +∞)

6

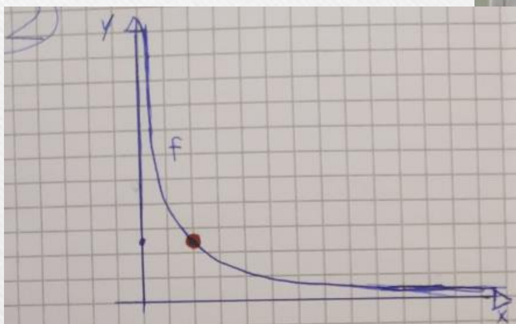


Es 2

A sinistra

Secondo me sono giuste sia la I che la seconda perche se sposti il punto C facendolo avvicinare a 0 il punto B aumenta spostandosi in alto facendo di conseguenza aumentare di valore il punto A perchē il grafico va verso l'alto

La seconda anchessa è giusta perchè se spostiamo il punto C verso destra notiamo che il punto A e B si abbassano e si avvicinano a 0 senza però toccarlo questo avviene perchē il grafico va verso destra



Punto rosso •

si muove

Lo sposto verso sinistra per verificare se il valore di f aumenta mentre il valore di x si avvicina a 0, e si può muovere finchè tocca il punto sull'asse y. (seguendo in modo parallelo l'asse x)

Lo sposto verso destra per verificare se il valore di f si avvicina a 0 mentre il valore di x aumenta, e si può muovere all'infinito seguendo sempre l'asse x.

Es n°5

a. perché verificando ciò che dice la definizione di funzione, cioè che avendo due insiemi X e Y, si dice funzione la relazione che associa ad ogni elemento di x uno ed un solo elemento di y; tracciando delle linee verticali posso capire che è vero, perché trovo sempre una sola y.

b. L'insieme delle immagini è il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che contiene i numeri che la funzione associa ad ogni numero del dominio.

c. $D: (-2; 2] \wedge [2; 5]$

$I: (-2; 2]$

d.

Riporto anche un esercizio della verifica successiva che trovo molto significativo per la capacità di trasformazione tra rappresentazioni semiotiche.

7. Considera le seguenti tabelle. Calcola, se possibile, $f \circ g(2)$; $f \circ g(-1)$ e $g \circ f(5)$ $g \circ f(0)$ facendo vedere i passaggi e motivando la risposta in caso non sia possibile (pt 4 x 4)

x	$f(x)$
2	1
0	2
3	3
5	4

x	$g(x)$
-1	5
0	4
1	3
2	2

a $fog(2)$; b $fog(-1)$; c $gof(5)$; d $gof(0)$

a $fog(2) = f[g(2)]$

trovo quanto vale "2" in $g(x)$ (2) E VADO A VEDERE NELLA TABELLA A quale $f(x)$ corrisponde il "2"

x	f(x)
2	1

x	g(x)
2	2

$fog(2) = 1$

b $fog(-1) = f[g(-1)]$

eseguo lo stesso passaggio dell'esercizio precedente

x	f(x)
5	4

x	g(x)
-1	5

$fog(-1) = 4$

c $gof(5) = g[f(5)]$

x	f(x)
5	4

x	g(x)
/	/

NON SI PUÒ RISOLVERE, IN QUANTO, NELLA TABELLA DATA DI $g(x)$ NON VI È NESSUN VALORE IN x CON "4"

d $gof(0) = g[f(0)]$

trovo quanto vale lo "0" in $f(x)$ cioè 2 e vado a vedere quanto vale il "2" nella tabella di $g(x)$

x	f(x)
0	2

x	g(x)
2	2

[-4; 19; -1,5]

7) $Fog(2) = f(g(2))$

Vado nella tabella e cerco $g(2)$. Ho come output 2. Io vado a cercare negli input della tabella di $f(x)$ e vedo che corrisponde a 1, quindi $fog(2)=1$

$fog(-1) = f(g(-1))$

Vado nella tabella e cerco $g(-1)$. Ho come output 5. Io vado a cercare negli input della tabella di $f(x)$ e vedo che corrisponde a 4, quindi $fog(-1)=4$

$gof(5) = g(f(5))$

Vado nella tabella e cerco $f(5)$. Ho come output 4. Io vado a cercare negli input della tabella di $g(x)$ ma vedo che non c'è, quindi non posso sapere a quanto corrisponde non sapendo la funzione o la regola utilizzata

$gof(0) = g(f(0))$

Vado nella tabella e cerco $f(0)$. Ho come output 2. Io vado a cercare negli input della tabella $g(x)$ e vedo che corrisponde a 2, quindi $gof(0)=2$

Risultati ottenuti

Analisi critica in relazione agli apprendimenti degli alunni:

a) in relazione agli obiettivi del Percorso gli alunni hanno raggiunto una maggior consapevolezza delle diverse rappresentazioni di una funzione;

b) gli studenti hanno acquisito una maggior consapevolezza dell'uso del linguaggio specifico collegando le definizioni ade esperienze svolte in laboratorio. A volte il linguaggio usato non è stato proprio quello specifico, ma quello generato nelle discussioni. Si è provveduto successivamente a cercare di sostituire le parole avendo cura di non scollegarle dalle esperienze fatte.

c) a posteriori si è potuto constatare che gli studenti sono più consapevoli del significato degli enunciati. In particolare non si confondono mai nella definizione di iniettività e suriettività e collegano correttamente dominio e insieme delle immagini alle corrispondenti variabili.

Valutazione dell'efficacia del percorso didattico

In sede di LSS dell' Istituto il Percorso è stato considerato efficace in relazione agli obiettivi proposti.

Gli alunni hanno mostrato curiosità e interesse per gli argomenti trattati, soprattutto quelli che hanno un atteggiamento più scettico nei confronti della materia.

La possibilità di risolvere esercizi attraverso il computer ha permesso anche agli studenti deboli nel calcolo algebrico di portare il loro contributo alla lezione e, spesso, hanno introdotto punti di vista nuovi e temi non pensati direttamente per la lezione

Inizialmente la metodologia usata ha disorientato gli alunni, soprattutto quelli abituati a lavorare su carta facendo sempre e solo calcoli. Soprattutto le richieste di motivare e mettere per scritto quanto pensato li ha lasciati perplessi.