REGIONE TOSCANA

I solidi platonici

Grado scolastico: secondaria di secondo grado

Area disciplinare: matematica

I.S.I.S. «B. Varchi»

Docenti: Francesco Degli Innocenti, Cecilia Magni

Realizzato con il contributo della Regione Toscana
nell'ambito del progetto
Rete Scuole LSS a.s. 2021/2022

I solidi platonici

Classe : quarta liceo scientifico

Docenti: Francesco Degli Innocenti, Cecilia Magni

Collocazione del percorso all’interno delle linee guida per i licei scientifici

Il percorso si inserisce in uno dei gruppi di concetti e metodi obiettivo dello studio liceale:

“ Gli elementi della geometria euclidea del piano e dello spazio entro cui prendono forma i procedimenti caratteristici del pensiero matematico (definizioni, dimostrazioni, generalizzazioni, assiomatizzazioni) “

Più precisamente:

«Saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione)».

Obiettivi essenziali di apprendimento

Obiettivi generali

- Sviluppare la visione spaziale
- Sviluppare la capacità di fare congetture e dimostrarle

Obiettivi specifici

- Definizione di poliedro , poliedro convesso e poliedro regolare
- Relazione di Eulero per i poliedri convessi
- Individuazione dei poliedri regolari (solidi platonici)
- Studio dei poliedri regolari

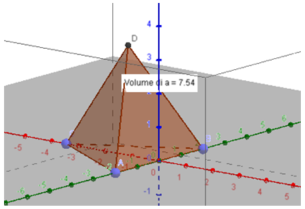
Approccio metodologico

Il metodo che abbiamo utilizzato per affrontare gli argomenti previsti è stato il seguente :

1. proporre un problema (in questo caso legato al tema dei poliedri e in particolari a quelli regolari);
2. far riflettere gli studenti sul problema proposto , attraverso una discussione comune estesa a tutta la classe;
3. dividere la classe in piccoli gruppi di lavoro;
4. seguire, il lavoro dei gruppi a volte cercando di limitare l'intervento solo ai casi in cui il gruppo non riusciva ad andare avanti e in ogni caso ponendo solo delle “domande ” per indirizzare le loro osservazioni;
5. far condividere i risultati ottenuti dai vari gruppi e sintetizzare nel modo migliore il lavoro di tutti.

Materiali, apparecchi e strumenti utilizzati

- Software Geogebra3D ;
- schede di lavoro da compilare generalmente lavorando in coppia nel laboratorio di informatica;
- stampante 3D Makeblock.

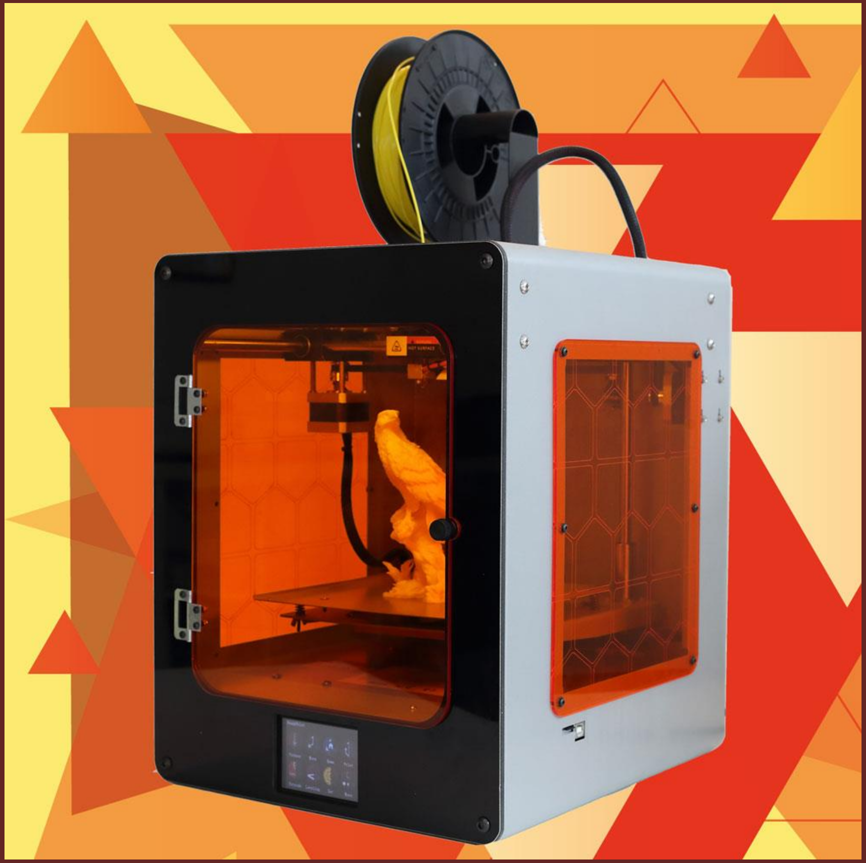


Esercizio 1: verifica l'esattezza del valore del volume indicato.
Suggerimento: abbiamo ricavato (vedi esercizio 1 sui poliedri) che il volume di un tetraedro regolare di spigolo l risulta $V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$ e quindi nel nostro caso abbiamo…

Esercizio 2: calcola l'angolo diedro formato da due facce.
Suggerimento: traccia il segmento DO (O origine del sistema di riferimento) e poi misura l'angolo $D\hat{O}C$ .Controlla il risultato con l'esercizio 1 sui poliedri.

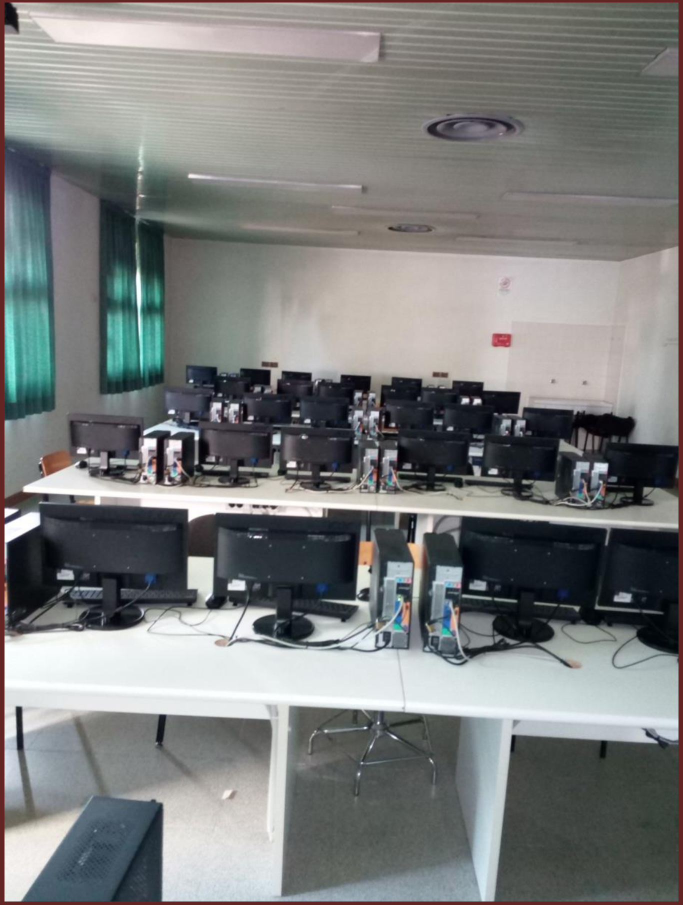
Esercizio 3: fai lo sviluppo piano del tetraedro (puoi renderlo più dinamico utilizzando uno slider come indicato nella guida a Geogebra 3D.
Stampa il tuo sviluppo.

Esercizio 4: applica al tetraedro una simmetria rispetto al piano xy. Stampa il poliedro che ottieni.



Ambiente in cui è stato sviluppato il percorso

Il percorso è stato svolto in classe e nel laboratorio di informatica.



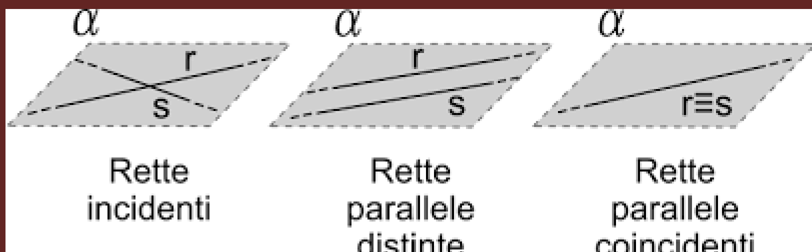
Tempo impiegato

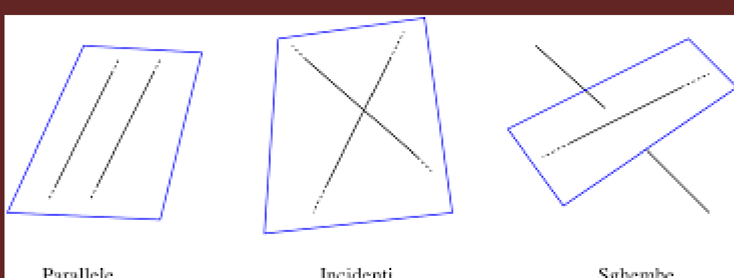
- Progettazione 6 ore
- Realizzazione 10 ore
- Rendicontazione 10 ore

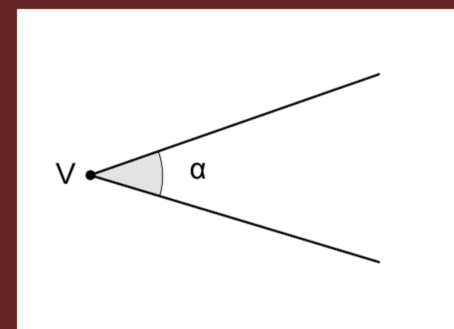
Totale 26 ore

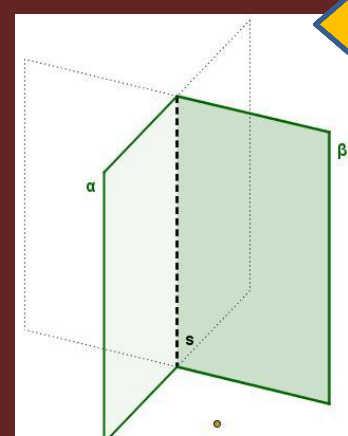
Prerequisiti

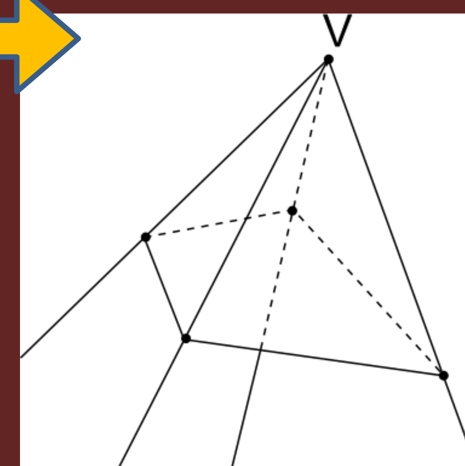
- Posizione reciproca di rette nel piano e nello spazio
- Definizione di angolo piano, di diedro e di angoloide











Contenuti del percorso

Il percorso è stato sviluppato in due classi quarte, una classe del liceo scientifico di ordinamento (prof. Degl'Innocenti) e una classe dell'indirizzo sportivo (prof.ssa Magni) e si è articolato in due parti.

Prima parte (comune ad entrambe le classi**):**

- discussione sulla definizione di poliedro regolare;
- individuazione della relazione di Eulero;
- riconoscimento dell'esistenza di soli 5 poliedri regolari partendo dall'osservazione che la somma degli angoli delle facce di un angoloide è minore di 360°;
- lavoro su tetraedro regolare, cubo e ottaedro (utilizzando Geogebra 3D);
- stampa dei poliedri regolari con la stampante 3D

Contenuti del percorso

Seconda parte (approfondimenti distinti a seconda della classe e svolti solo dagli studenti più motivati)

Classe del liceo ad indirizzo sportivo:

- Studio dei poliedri “duali”;
- Costruzione con Geogebra 3D dell’icosaedro troncato (pallone da calcio).

Classe del liceo di ordinamento:

- Deduzione dell’esistenza dei 5 poliedri regolari dalla relazione di Eulero;
- Determinazione del volume dell’icosaedro.

Poliedro

Per arrivare alla definizione di poliedro siamo partiti dall'analisi di alcuni poliedri noti.

Facendo riferimento alle conoscenze acquisite nella scuola secondaria di primo grado abbiamo preso in considerazione: cubo, prisma, parallelepipedo, piramide.

Abbiamo quindi osservato che le facce dei poliedri sono poligoni e ogni lato appartiene esattamente a due poligoni.

Quindi:

Si chiama ***poliedro*** *la porzione di spazio delimitata da poligoni a due a due non complanari tale che ogni lato dell'uno sia in comune ad un altro di essi.*

Poliedri convessi

Abbiamo ricordato che cosa si intende per poligono convesso:

Un poligono si dice convesso se presi due punti su di esso il segmento che li congiunge è tutto contenuto all'interno del poligono.

Abbiamo quindi esteso questa proprietà ai poliedri ottenendo la seguente definizione:

Il poliedro si dice convesso se presi due qualunque punti su di esso il segmento che li congiunge è tutto contenuto all'interno del poliedro.

Abbiamo quindi osservato che i poliedri che abbiamo preso in considerazione all'inizio sono tutti convessi.

Poliedro regolare

Partendo sempre dalla geometria del piano, abbiamo ricordato che *un poligono si dice regolare se è equilatero ed equiangolo.*

Ci siamo quindi chiesti come possiamo tradurre per i poliedri queste richieste:

•essere equiangolo si traduce nel richiedere che tutti gli angoloidi siano congruenti.

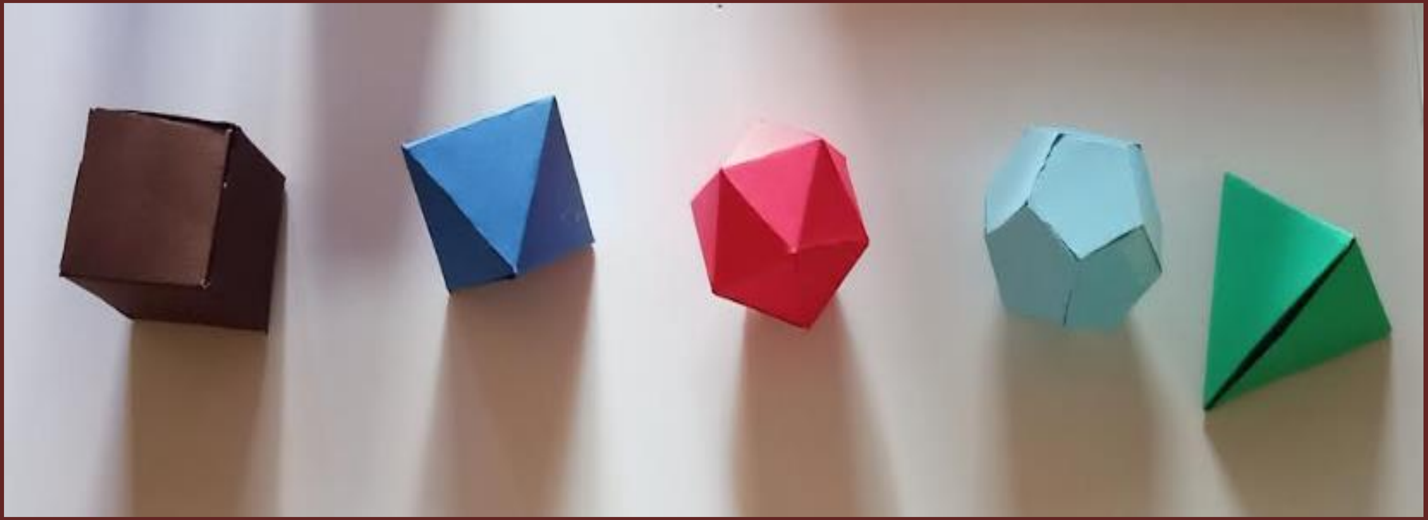
•essere equilatero si traduce nel richiedere che tutte le facce siano poligoni regolari uguali.

Quindi:

Un poliedro si dice regolare se le sue facce sono poligoni regolari congruenti e tutti gli angoloidi sono congruenti.

Costruzione di poliedri regolari

Partendo dagli sviluppi piani scaricati dalla rete abbiamo costruito modelli di carta per alcuni poliedri in modo da poter avere un modello concreto su cui fare le successive ipotesi.



Cubo, ottaedro, icosaedro, dodecaedro, tetraedro

Relazione di Eulero

Un poligono è caratterizzato da **lati** e **vertici**.

Il docente ha chiesto: *"In un poligono qual è la relazione che lega il numero dei vertici V al numero dei lati?"*

Gli studenti non hanno avuto difficoltà a dire che il numero dei lati è uguale al numero dei vertici.

Un poliedro invece è caratterizzato da lati (chiamati spigoli), vertici e facce.

Il docente ha chiesto: *"In un poliedro ci sarà una relazione tra numero degli spigoli (S), numero dei vertici (V) e numero delle facce(F)?*

Relazione di Eulero

Inizialmente nessuno, sia nella classe di ordinamento che in quella ad indirizzo sportivo, è riuscito a proporre una relazione tra spigoli, vertici e facce.

Il docente ha allora suggerito di riprendere i modelli di carta dei poliedri costruiti e di contare il numero di facce, vertici e lati (spigoli) riportandoli in una tabella per poter dedurre qualche proprietà generale:

	facce	spigoli	Vertici
Cubo	6	12	8
Tetraedro	4	6	4
Ottaedro	8	12	6
Icosaedro	20	30	12
dodecaedro	12	30	20

Relazione di Eulero

A questo punto, sia nella classe dello scientifico di ordinamento che nella classe dell’indirizzo sportivo, qualche studente, dopo un po’ di tentativi e solo dopo che il docente ha suggerito di provare anche a sommare le variabili in gioco, ha osservato che il numero dei vertici V più il numero delle facce F è sempre uguale al numero degli spigoli S aumentato di 2

$$\mathbf{V + F = S + 2}$$

Relazione di Eulero

Ma come si può dimostrare questa relazione?

Il docente ha guidato la classe in una dimostrazione molto diversa da quelle viste in geometria piana: si tratta di una dimostrazione "*costruttiva*" in cui si esamina passo- passo la costruzione di un poliedro controllando via via se la relazione tra V, S e F rimane o meno invariata.

Per rendere meno astratto il procedimento abbiamo affiancato il ragionamento generale all'esempio concreto della costruzione di un cubo.

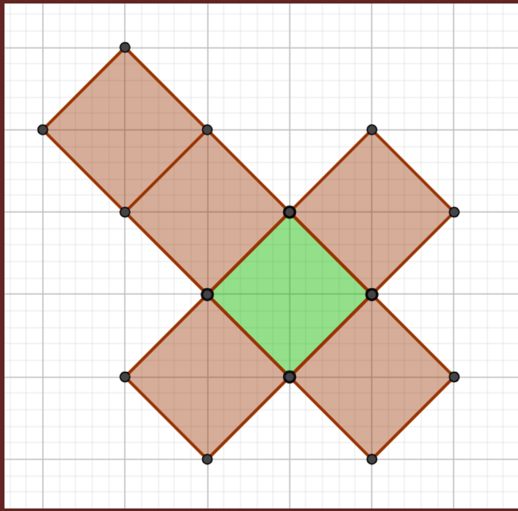
Passo 1: Cominciamo a costruire il nostro poliedro e consideriamo all'inizio una sola faccia.

Avremo quindi F=1 e naturalmente V=S

Quindi la relazione tra V,S, F può essere scritta così

$$F+V=S+1$$

Esempio del cubo: F = 1, V = S = 4



Relazione di Eulero

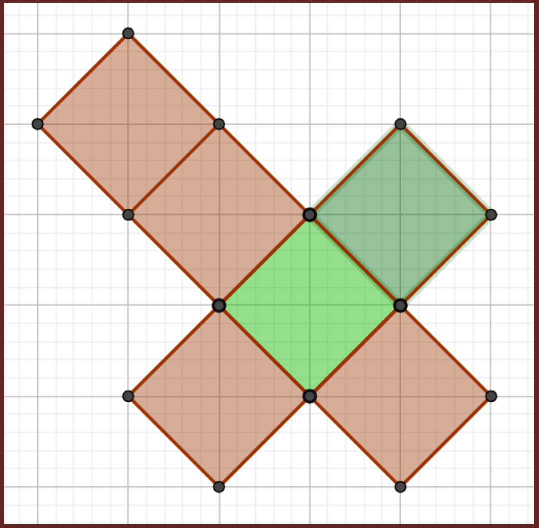
Passo 2: Aggiungiamo un’altra faccia: F aumenterà di 1 e se V aumenta di x, S aumenterà della quantità x+1, e quindi vale ancora che

$$(F+1)+(V+x)=(S+x+1)+1$$

cioè numero delle facce + numero dei vertici = numero degli spigoli +1

e quindi la relazione vista nel passo 1 resta invariata.

Esempio del cubo: $(F+1)+(V+2)=(S+2+1)+1$

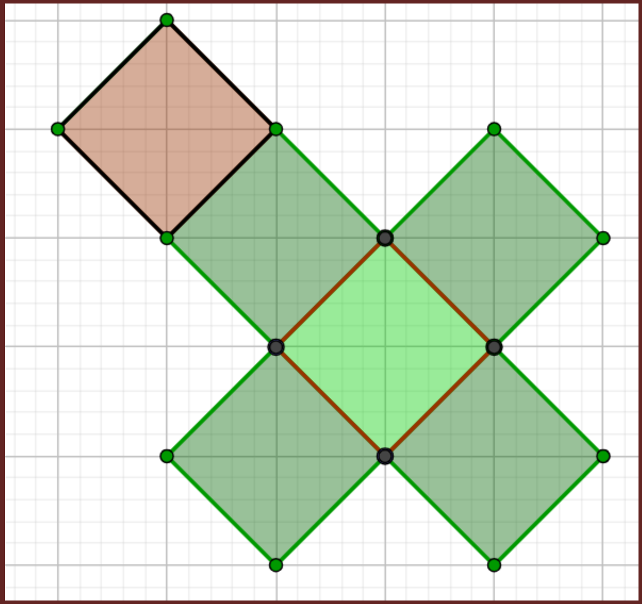


Relazione di Eulero

Passo 3: Continuiamo ad aggiungere così una faccia alla volta in modo che alla fine rimanga da aggiungere solo l'ultima faccia: in questo caso **F aumenterà di 1** e V e S rimarranno invariati, perciò nella relazione non si avrà più F+V=S+1 ma si avrà

F+V=S+2

Esempio del cubo: F+1+V=S+1+1



Quanti sono i poliedri regolari?

Siamo partiti dal caso dei poligoni regolari e poi abbiamo esaminato la possibilità di una sua generalizzazione ai poliedri regolari.

In entrambe le classi tutti gli studenti sono stati concordi sul fatto che i poligoni regolari sono infiniti.

Abbiamo allora chiesto se anche i poliedri regolari potessero essere infiniti.

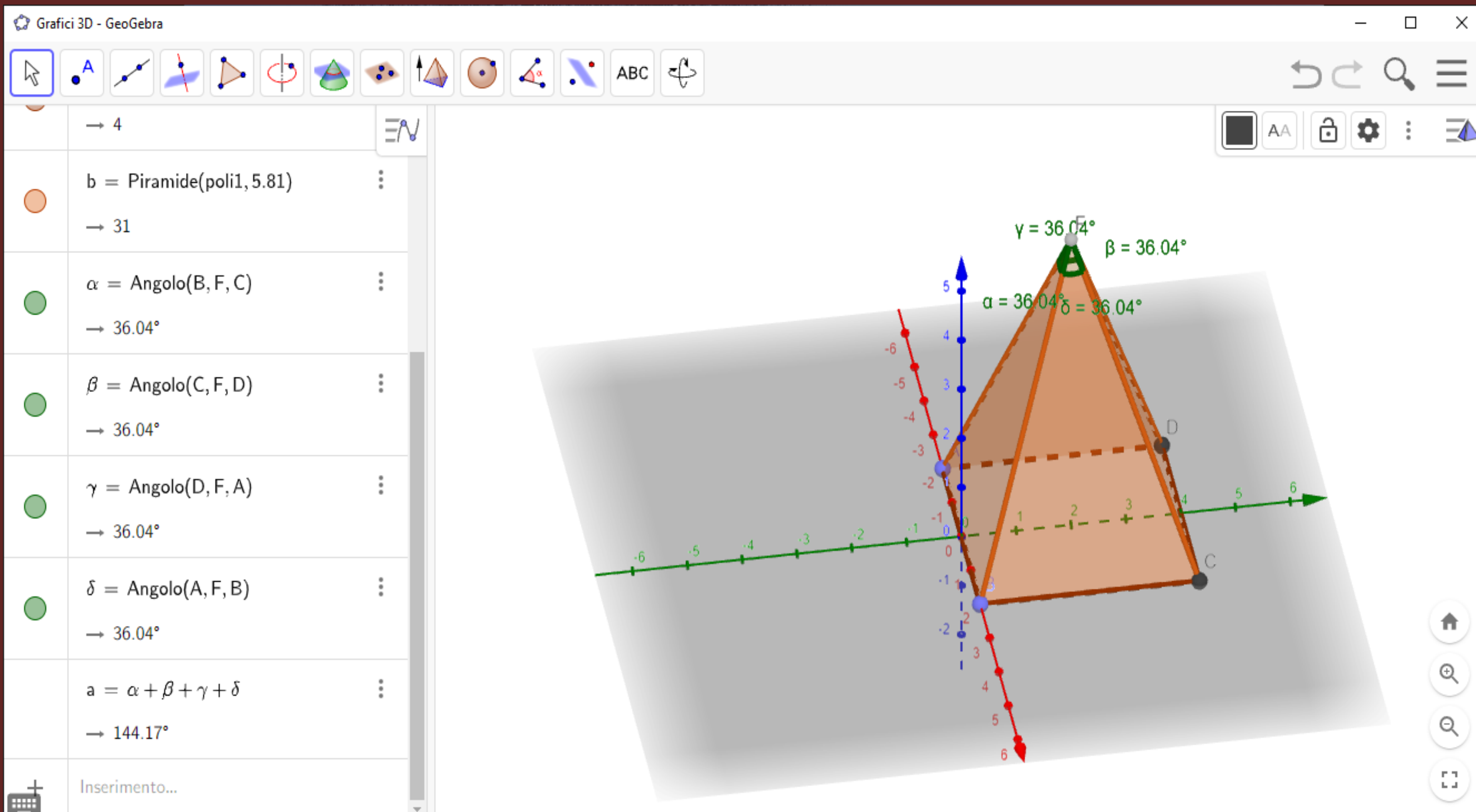
Gli studenti sono rimasti inizialmente perplessi e inizialmente hanno risposto quasi tutti di sì.

Quanti sono i poliedri regolari?

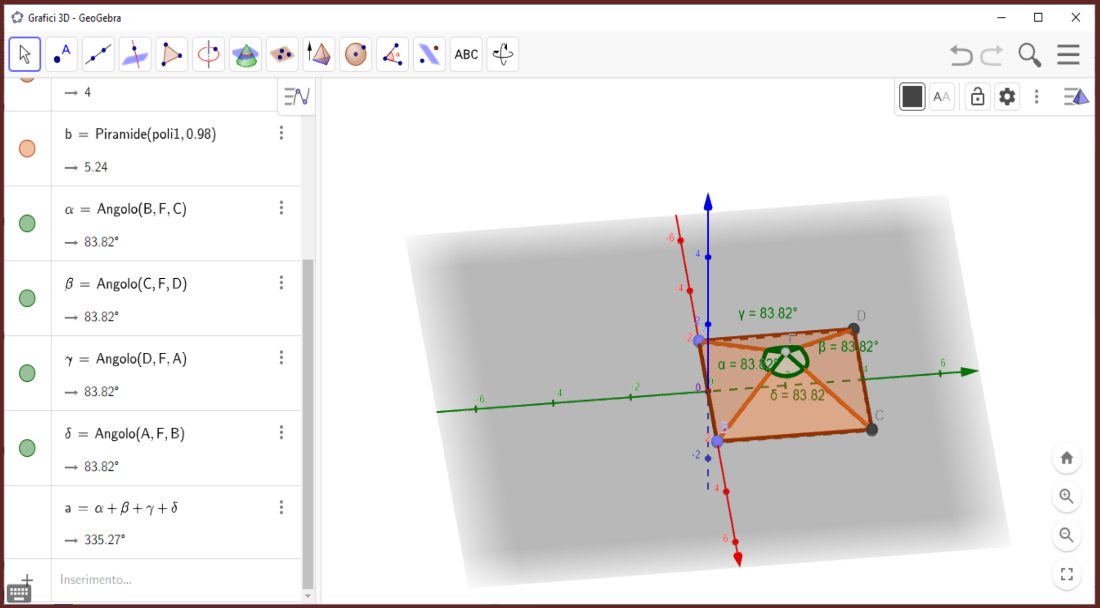
Visto che gli studenti erano piuttosto disorientati li abbiamo invitati a considerare quale valore massimo potesse avere la somma degli angoli delle facce di un angoloide utilizzando il software Geogebra 3D e lavorando a coppie nel laboratorio di informatica.

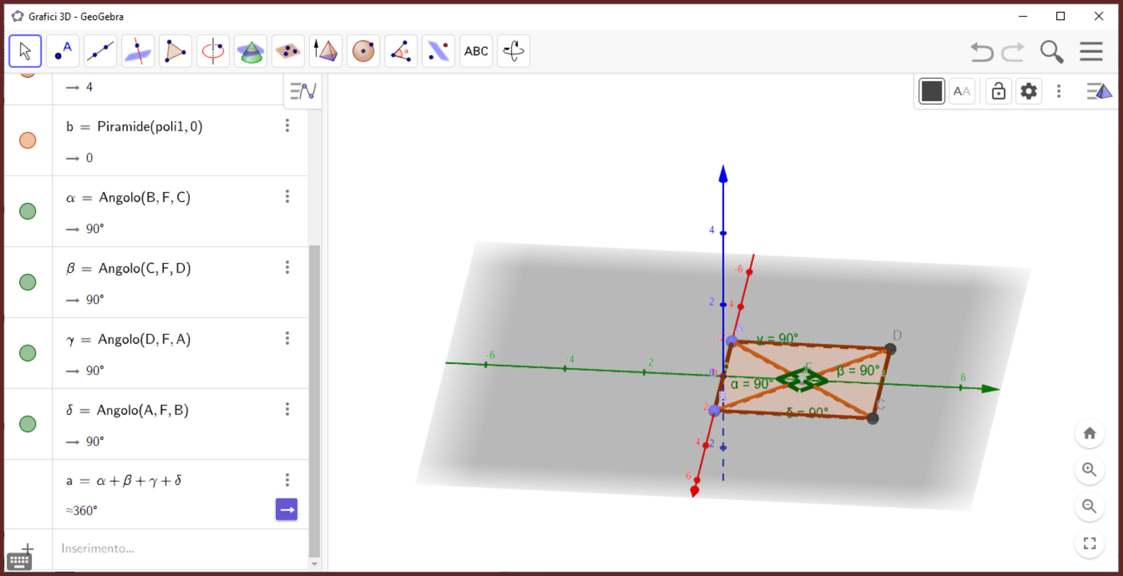
Abbiamo suggerito di utilizzare il comando «estrudi in piramide» per costruire un angoloide e, dopo aver individuato la misura degli angoli delle facce dell'angoloide, osservarne la somma.

Quanti sono i poliedri regolari?



Quanti sono i poliedri regolari?





Quanti sono i poliedri regolari?

Gli studenti non hanno avuto difficoltà a verificare che la somma degli angoli delle facce non può superare 360° e che se risulta 360° l'angoloide sparisce in quanto le facce sono tutte sullo stesso piano.

A questo punto il docente ha posto la seguente domanda:

"Dal momento che per definizione i poliedri regolari hanno per facce poligoni regolari congruenti, quali sono i poligoni regolari "che funzionano" nella costruzione di un poliedro regolare?

La difficoltà maggiore, soprattutto per gli studenti dell'indirizzo sportivo, è stata quella di calcolare il valore dell'angolo di un poligono regolare che non fosse un triangolo equilatero o un quadrato.

Comunque, dopo aver calcolato l'angolo interno anche del pentagono (108°) e dell'esagono regolare (120°) è stato immediato compilare insieme la seguente tabella:

Quanti sono i poliedri regolari?

tipo di faccia	**n° facce in un vertice**	**Somma angoli facce**	**Nome poliedro**
Triangolo equilatero(60°)	3 4 5 6	120° 240° 300° 360°	Tetraedro regolare Ottaedro regolare Icosaedro regolare Non esiste
Quadrato(90°)	3 4	270° 360°	Cubo (esaedro regolare) Non esiste
Pentagono regolare(108°)	3 4	324° Maggiore di 360°	Dodecaedro regolare Non esiste
Esagono regolare(120°)	3	360°	Non esiste

Quanti sono i poliedri regolari?

Quindi mentre nel piano i poligoni regolari sono infiniti nello spazio i poliedri regolari sono solo cinque!

Tetraedro
Ottaedro — facce triangoli equilateri
Icosaedro
Esaedro — facce quadrati
Dodecaedro — facce pentagoni regolari

NOTA STORICA

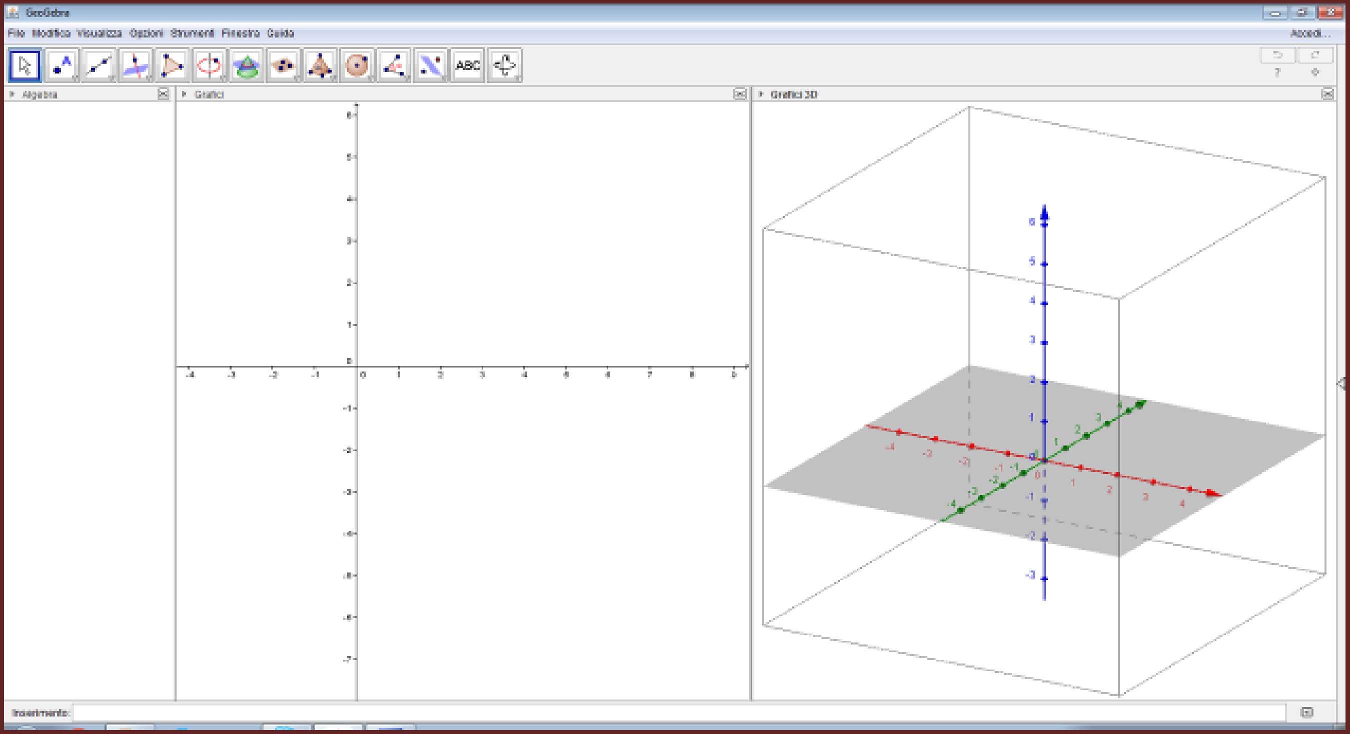
I poliedri regolari sono detti anche **SOLIDI PLATONICI** perché compaiono nell’opera “ Timeo” del filosofo greco Platone

Attività con Geogebra 3D

Per prima cosa abbiamo visto come funziona la schermata di Geogebra 3D.

Basta aprire Visualizza - Grafici 3D: sullo schermo, oltre all’ambiente 2D con il sistema di riferimento (O,x,y), compare una terna di assi cartesiani (O,x,y,z) e la barra degli strumenti 3D.

Notiamo inoltre che è presente anche la vista “algebra” e la barra di inserimento.



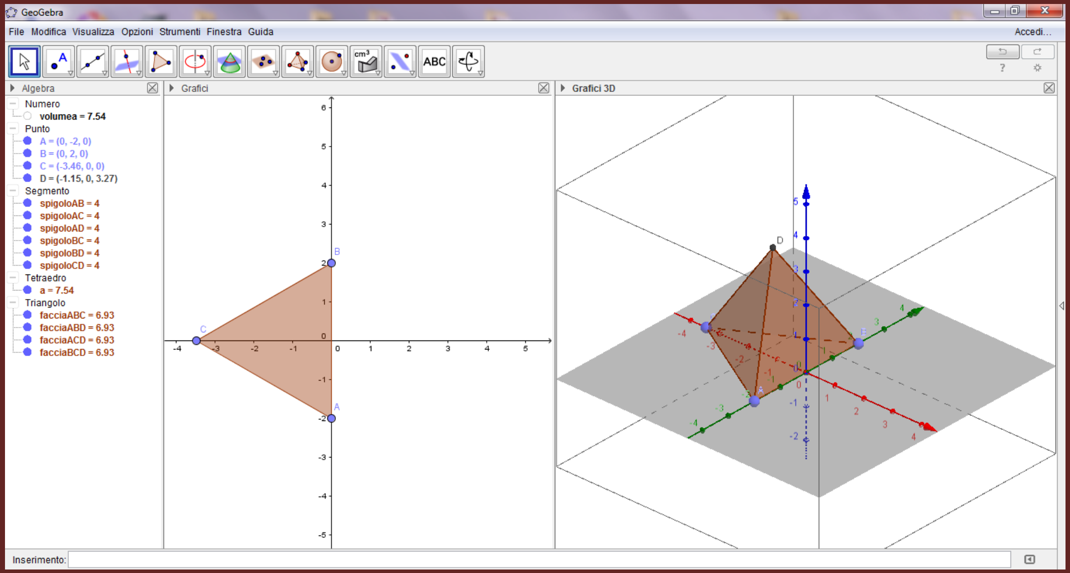
Attività con Geogebra 3D
TETRAEDRO

Abbiamo fornito ai ragazzi delle schede guidate per analizzare il tetraedro.

- Scegliamo dal Menù 3D tetraedro regolare.

Facciamo clic su dei punti del piano xy, , per esempio $A(0; -2; 0)$ $B(0; 2; 0)$.

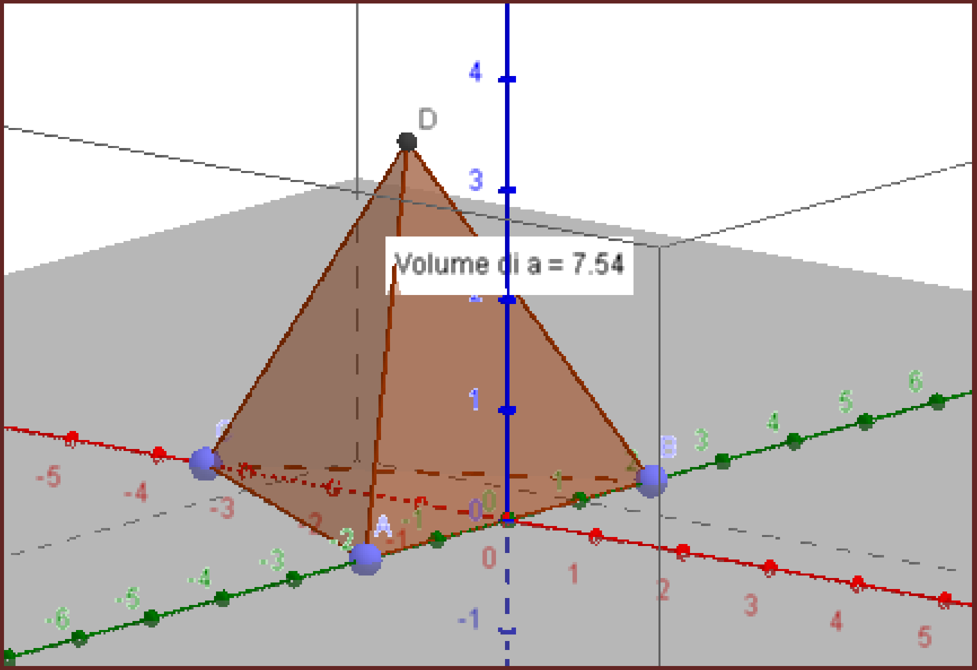
- Verrà creato un tetraedro di spigolo con la faccia ABC sul piano xy (la faccia sul piano xy viene visualizzata anche nella vista 2D).



Attività con Geogebra 3D
TETRAEDRO

Possiamo ruotare la vista grafica per vederlo da angolazioni diverse.

Possiamo scegliere dai vari comandi “volume” e facendo clic sul tetraedro verrà visualizzato il volume.



Attività con Geogebra 3D
TETRAEDRO

Esercizio 1: Verifica l'esattezza del valore del volume indicato dimostrando che il volume di un tetraedro regolare di spigolo l risulta

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} l^3$$

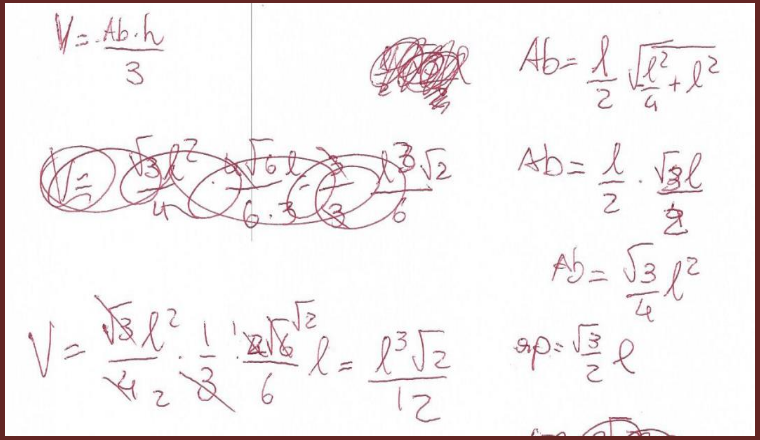
e che quindi nel nostro caso…

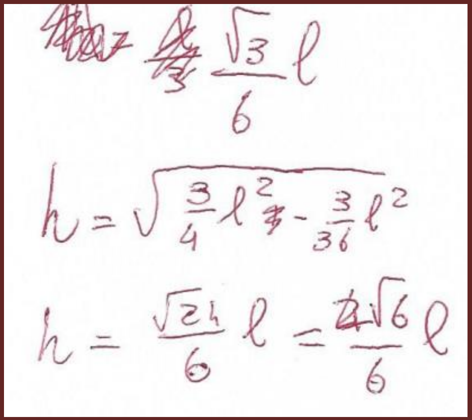
Esercizio 2: calcola l'angolo diedro formato da due facce e confronta il valore misurato con quello che puoi dedurre teoricamente

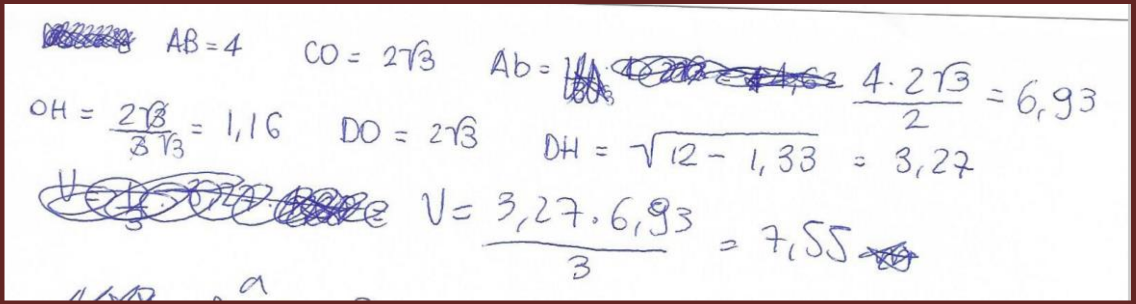
Esercizio 3: fai lo sviluppo piano del tetraedro (puoi renderlo più dinamico utilizzando uno slider come indicato nella guida a Geogebra 3D).

Attività con Geogebra 3D
TETRAEDRO

Alcuni hanno trovato la formula per il volume senza fare la verifica con il valore indicato dal software, altri, viceversa, hanno fatto la verifica ma non hanno trovato la formula generale.







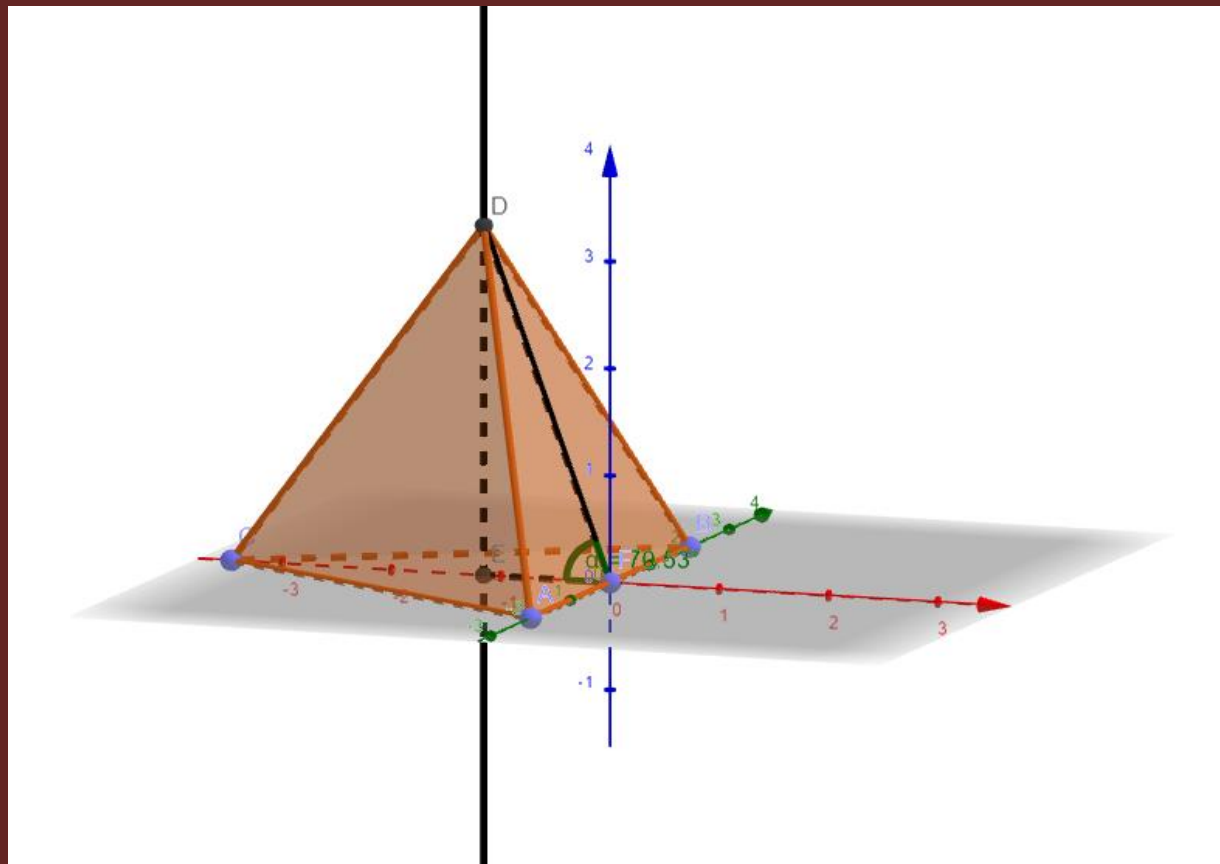
Attività con Geogebra 3D
TETRAEDRO

La misura dell’angolo diedro ha dato alcuni problemi soprattutto perché molti studenti si aspettavano di trovare un angolo “semplice” (per esempio 60°) e in più non tutti avevano capito come determinare l’angolo diedro tra due facce.

Riportiamo una discussione nell’indirizzo sportivo:

- Aurora: “Prof non capisco come trovare l’angolo tra le facce del tetraedro…non è 60°?”
- Mattia:” Ma come possiamo visualizzare l’angolo diedro? “
- Prof: “Qual è il procedimento per misurare un angolo diedro?”
- Aurora: “Non me lo ricordo…”
- Mattia: “Mi sembra che dovevamo tagliare perpendicolare allo spigolo…”
- Prof: “Sì…quindi?”
- Mattia: “Ho capito traccio l’apotema della faccia e congiungo con la base dell’altezza che poi è il baricentro del triangolo equilatero….”
- Aurora: “Prof mi sa che abbiamo sbagliato…viene un angolo “brutto”…”
- Mattia: “Eppure il procedimento è corretto…se viene “brutto” pace!”

Attività con Geogebra 3D
Tetraedro



ES 2

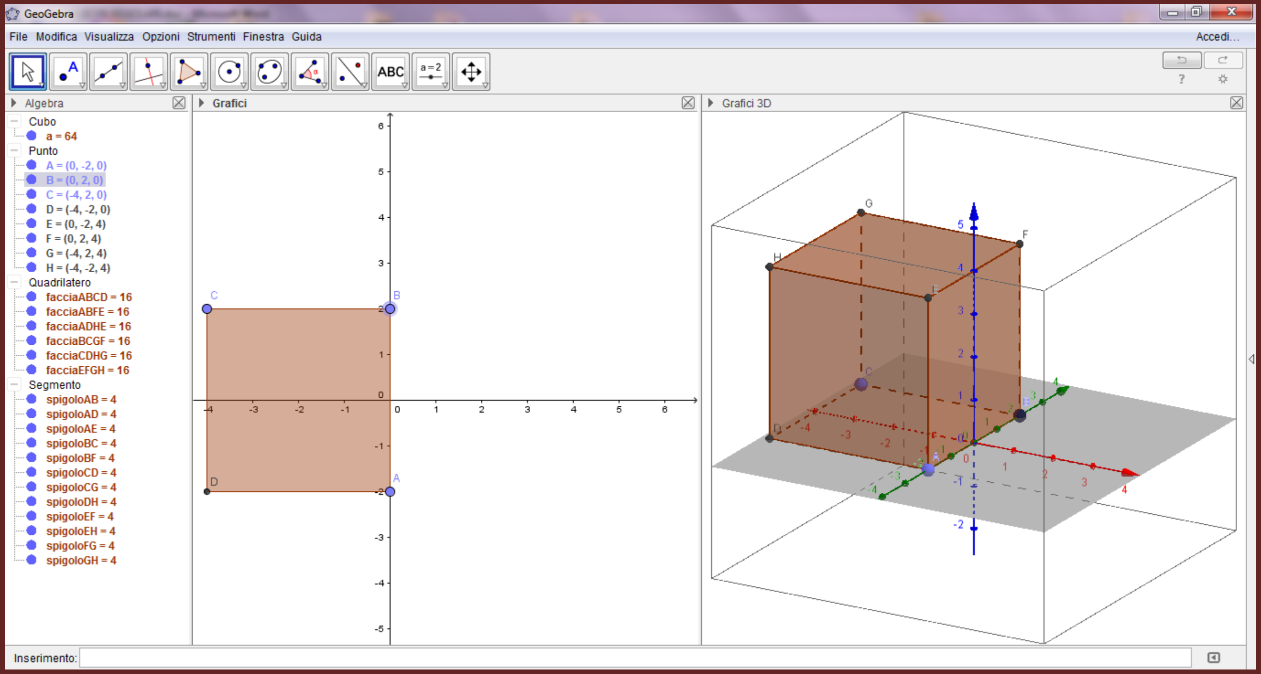
$D\hat{O}C = 70{,}53^\circ$

$$D\hat{O}C = \arccos \overbrace{\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}^{\ell\ base} \cdot \frac{1}{\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}\ell}_{apotema}} \overset{\arccos}{=} \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \overset{\arccos}{=} \frac{1}{3} = 70{,}53^\circ$$

Attività con Geogebra
CUBO

Costruiamo un cubo con il comando cubo: dopo aver scelto il comando cubo facciamo clic su due punti del piano xy, per esempio $A(0;-2;0)\ \ B(0;2;0)$.

Comparirà il cubo in figura:



Attività con Geogebra
CUBO

Esercizio 1: Verifica l’esattezza del valore del volume indicato. Dimostra che il volume di un esaedro regolare di spigolo l risulta

$$V = l^3$$

e quindi nel nostro caso …

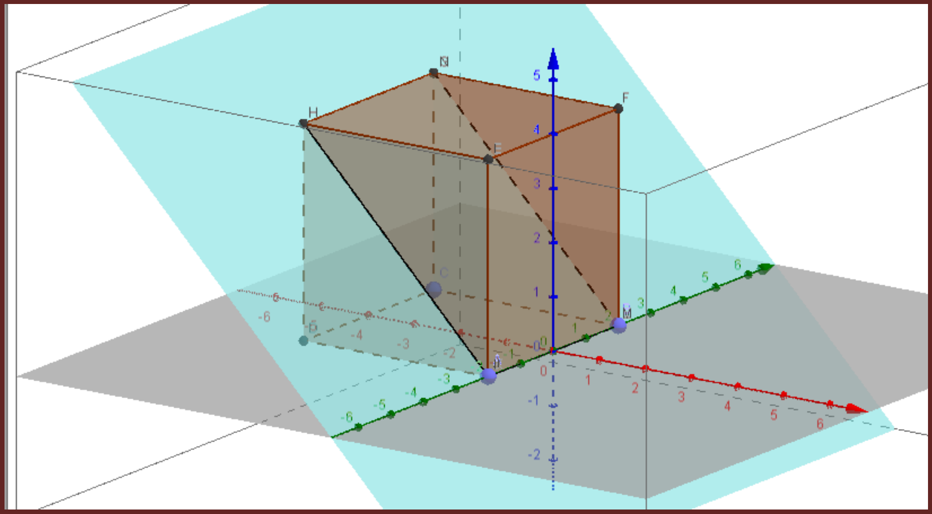
Esercizio 2: traccia una diagonale del cubo e verifica (usando il comando misura di un segmento) che risulta $d = l\sqrt{3}$
dove l è la misura dello spigolo.

Attività con Geogebra
CUBO

Esercizio 3: sezione di un cubo

Con il comando “piano per tre punti” selezioniamo tre punti per creare il piano sezione e intersechiamo con le facce del cubo: è chiaro che con un piano parallelo ad una faccia si ottiene un quadrato, ma si possono ottenere molte altre sezioni…

Per esempio nella figura seguente il piano passa per due spigoli opposti e si ottiene come sezione un rettangolo.



Attività con Geogebra
CUBO

Quali altre sezioni puoi ottenere ?

Puoi ottenere un triangolo equilatero ? Prendi il piano per i punti…

Puoi ottenere un pentagono?

Puoi ottenere un esagono regolare? Prendi il piano per i punti…

Suggerimento: prova a creare tre punti su tre spigoli con il comando “punto su oggetto”, poi costruisci il piano passante per essi e individua (con intersezione superfici) la sezione: attiva “muovi” e prova a muovere i punti e osserva come varia la sezione.

Quando ti sembra di aver trovato il piano che dà come sezione una data figura spiega perché si tratta veramente di quella figura (congruenza di segmenti ecc.).

Attività con Geogebra
CUBO

I primi due esercizi non hanno generato difficoltà nei ragazzi. Tutti sono stati in grado di svolgerli in autonomia e senza difficoltà.

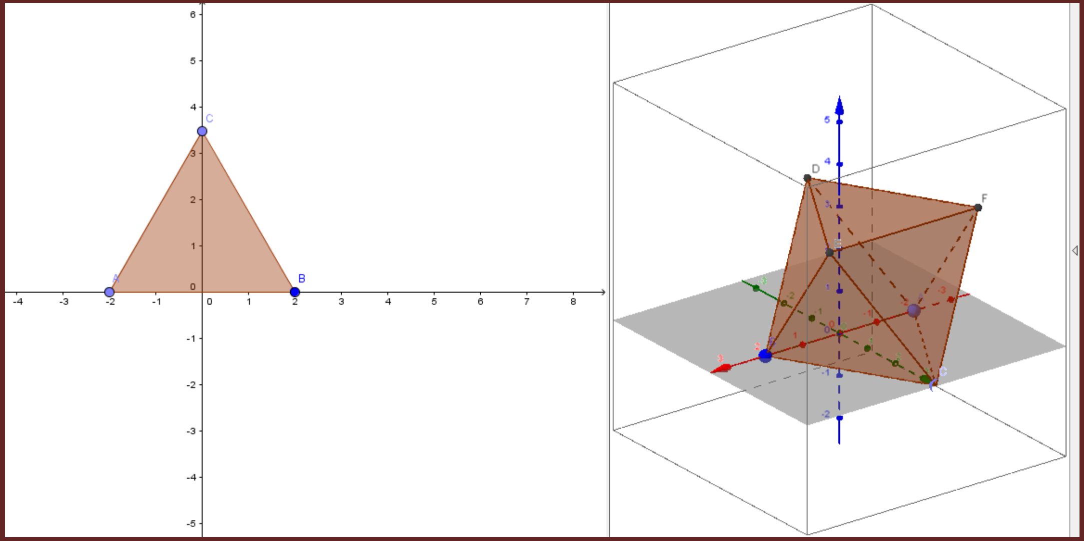
Il terzo esercizio sulle sezioni invece ci ha permesso di riflettere con maggiore attenzione sulla maggiore complessità e varietà di possibilità che offre lo spazio rispetto al piano.

In questa attività è stato molto utile l’uso di GeoGebra che ci ha permesso di visualizzare subito la sezione.

Attività con Geogebra
OTTAEDRO

Proviamo a costruire, dopo aver creato due punti A e B, un ottaedro regolare con il comando **ottaedro[A,B]**

Nella figura seguente i punti sono A(-2,0,0) B(2,0,0) : il software disegna la faccia triangolare di lato AB (completando il triangolo equilatero in senso antiorario) sul piano xy.



Attività con Geogebra
OTTAEDRO

Esercizio 1 Disegna l'angolo diedro tra due facce e misura la sua ampiezza. Confronta il risultato ottenuto con quello ottenibile teoricamente.

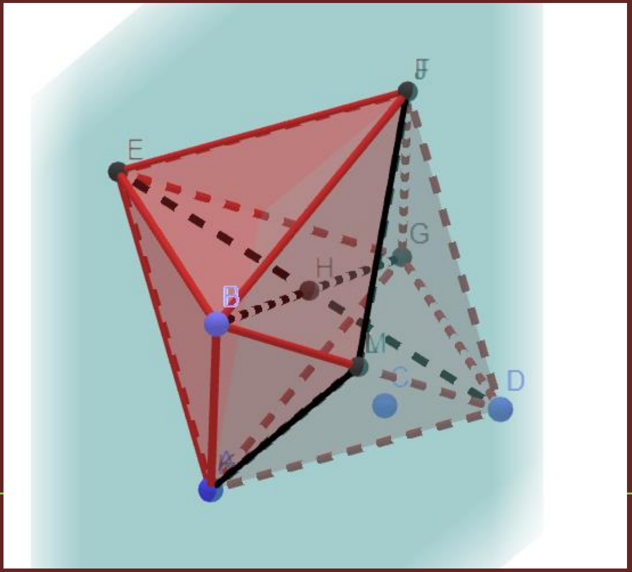
Esercizio 2 Prova a costruire un ottaedro che abbia il quadrato-base comune delle due piramidi uguali sul piano xy.
Suggerimento: puoi costruire un quadrato sul piano xy e poi (usando il comando piramide) costruire la piramide di base il quadrato alzando il vertice finché nella vista algebra non vedi che gli spigoli laterali sono uguali a quelli di base: per ottenere l'altra piramide basta che tu faccia una simmetria rispetto al piano xy.

Attività con Geogebra
OTTAEDRO

Il primo esercizio ci ha permesso di rivedere la definizione di angolo diedro. Molti studenti, dopo averlo costruito per il tetraedro, sono stati in grado di costruirlo autonomamente.

Per altri, invece è stato necessario richiamare la definizione e abbiamo dovuto riflettere su quale fosse il piano perpendicolare allo spigolo: quello passante per i due vertici non appartenenti al quadrato e per il punto medio di un lato del quadrato.

Successivamente, insieme, abbiamo riflettuto sulla risoluzione dei triangoli rettangoli per arrivare alla misura cercata.

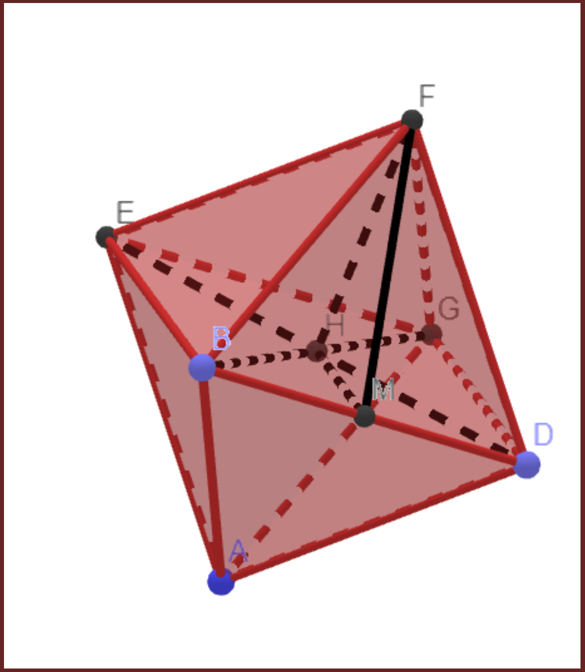


Attività con Geogebra
OTTAEDRO

Il secondo esercizio non ha creato difficoltà nella parte grafica.

Ci ha però permesso di ragionare su quanto esattamente dovessimo alzare il vertice. Abbiamo ricondotto il problema alla determinazione dell'altezza di una piramide a base quadrata in cui lo spigolo laterale è uguale allo spigolo di base.

Avendo già svolto l'esercizio 1 non ci sono stati problemi nell'accettare che il triangolo FHM fosse rettangolo.
A questo punto tutti sono stati in grado di risolvere il quesito applicando due volte il teorema di Pitagora.



Approfondimento 1
Liceo ad indirizzo sportivo
Poliedri duali

Cosa si ottiene congiungendo i centri delle facce di un poliedro regolare?

Partiamo con il tetraedro regolare

Cosa si ottiene congiungendo i centri delle facce di un tetraedro regolare?

I ragazzi hanno lavorato in coppia ed il primo problema è stato di capire cosa si intendeva per “centro”.

Riportiamo un dialogo tra il docente e due studenti:

Edward: “Prof ma cosa si intende per centro della faccia?”

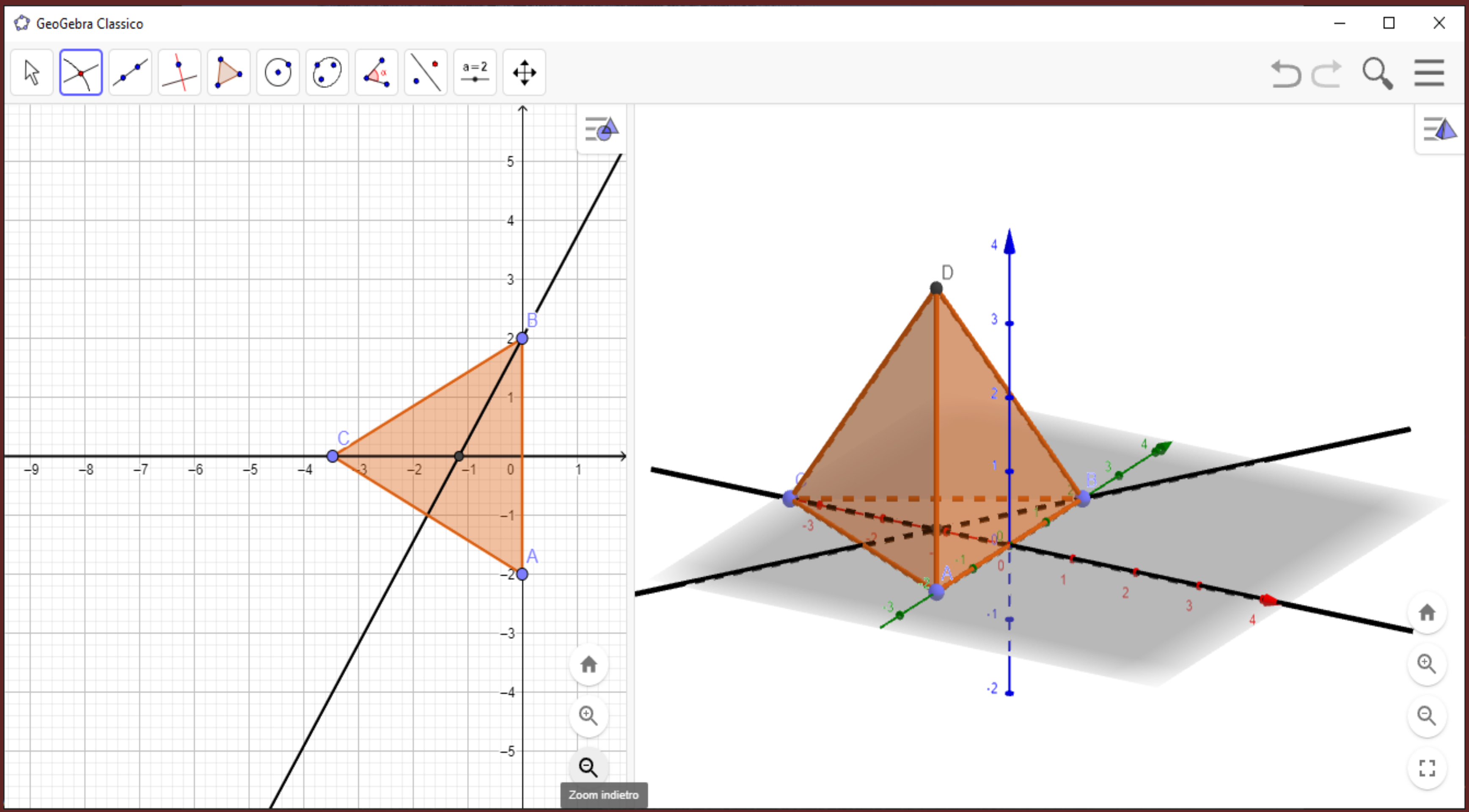
Prof.: “Secondo voi?”

Elisa: “Nel triangolo equilatero sarà il punto medio dell’altezza?”

Prof: “Sei sicura? ”

Edward:” No, il centro è il baricentro…l’intersezione delle mediane!”

Approfondimento 1
Liceo ad indirizzo sportivo
Poliedri duali



Approfondimento 1
Liceo ad indirizzo sportivo
Poliedri duali

Edward: “Quindi per determinare il baricentro delle varie facce possiamo intersecare le mediane e le mediane possiamo farle utilizzando il comando punto medio.”

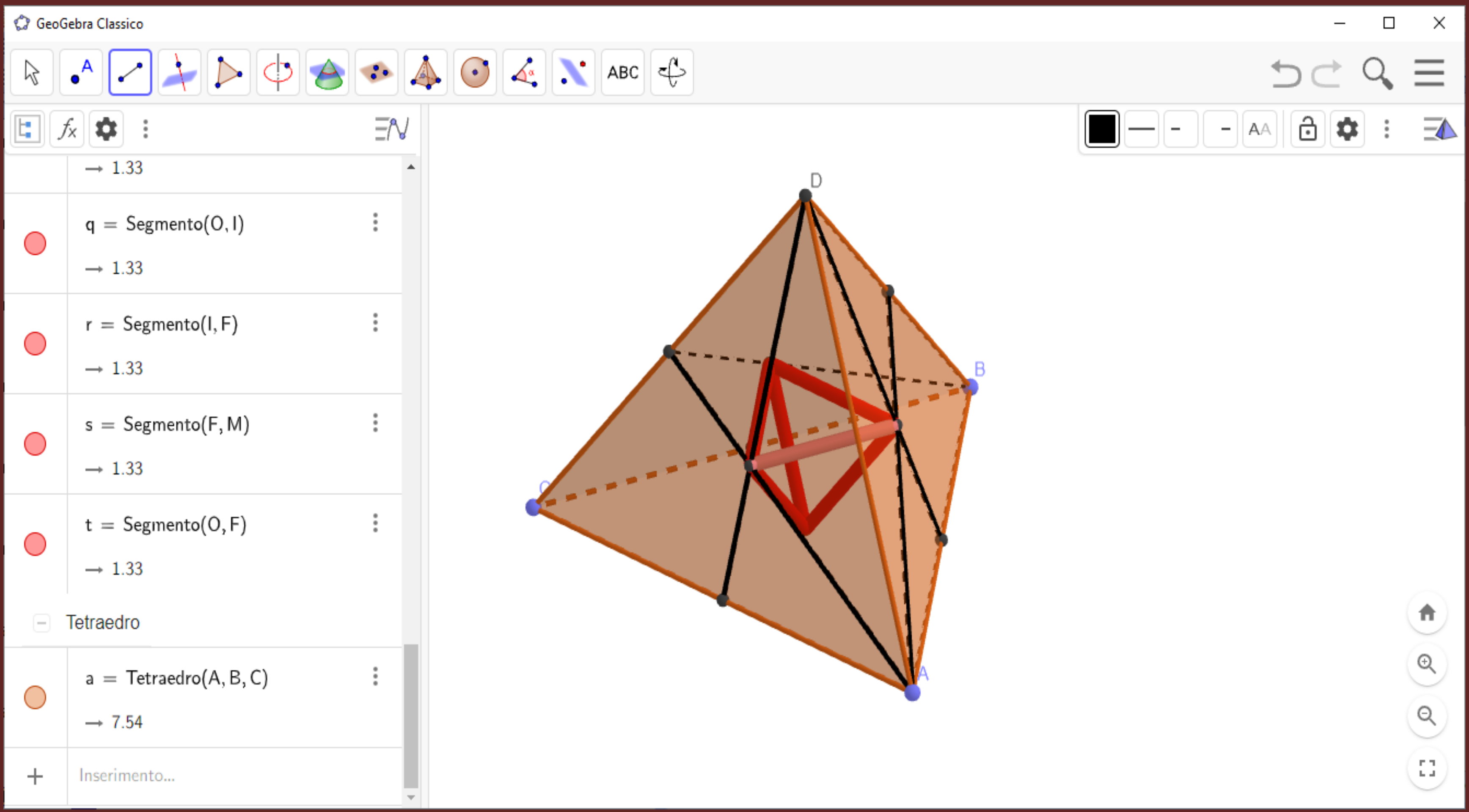
Prof: “Giusto! Quindi individuate i centri e poi congiungete….cosa vi sembra che sia venuto?”

Elisa: “ A me sembra un altro tetraedro!”

Prof: “Ma come facciamo ad esserne sicuri?”

Edward: “Prof ma non vede che nella vista algebra c’è riportata anche la lunghezza dei segmenti e che è sempre la stessa?”

Approfondimento 1
Liceo ad indirizzo sportivo
Poliedri duali



Approfondimento 1
Liceo ad indirizzo sportivo
Poliedri duali

- Prof: “Hai ragione…ma se non avessimo avuto questo software, come avremmo potuto dimostrarlo?”
- Elisa: “Se consideriamo il triangolo BCV, il segmento DE , che è il lato del tetraedro che abbiamo ottenuto, risulta 2/3 di BC (che corrisponde a metà dello spigolo del tetraedro di partenza) e questo si può ripetere per i vari spigoli…”
- Prof: “ Direi che va bene! Controllate anche con le misure effettive riportate nella vista Algebra”
- Edward: “ Sì prof è giusto perché il lato del tetraedro è 4 e quindi BC misura 2 e in conclusione dobbiamo avere 2/3*2=4/3 ed infatti nella vista algebra abbiamo che gli spigoli misurano 1.33!”

Approfondimento 1

Liceo ad indirizzo sportivo

Poliedri duali

Cosa si ottiene congiungendo i centri delle facce di un cubo?

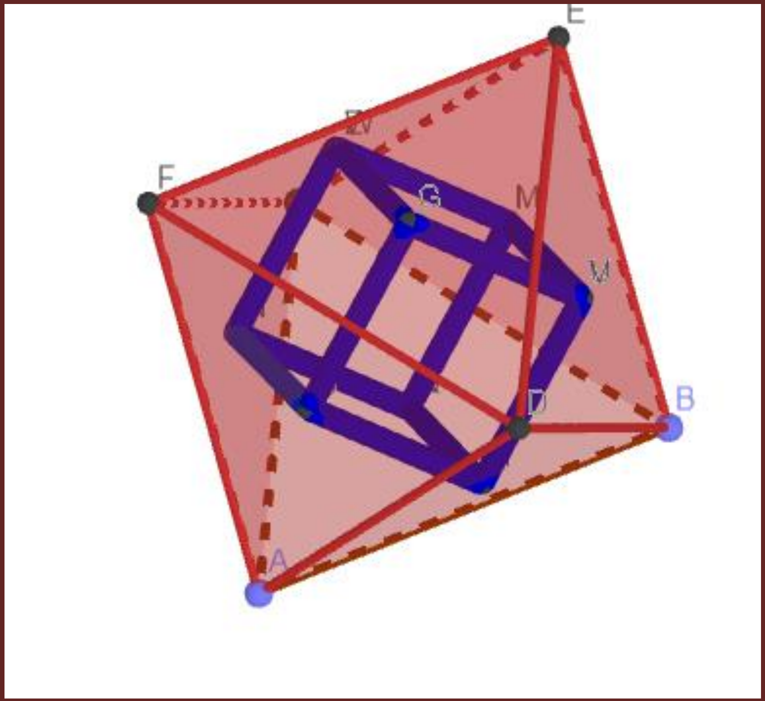
Nel caso del cubo è stato semplice costruire il centro delle facce quadrate.

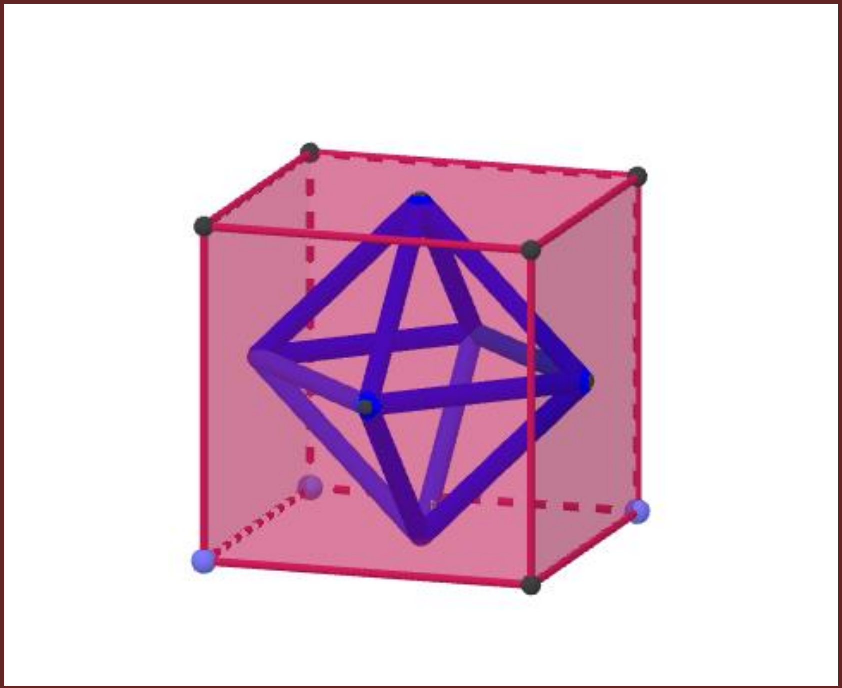
E’ stato interessante notare dal cubo, avendo 6 facce, si otteneva l’ottaedro regolare e dall’ottaedro regolare, con 8 facce, il cubo e per questo cubo e ottaedro si dicono **“duali”.**

Approfondimento 1

Liceo ad indirizzo sportivo

Poliedri duali





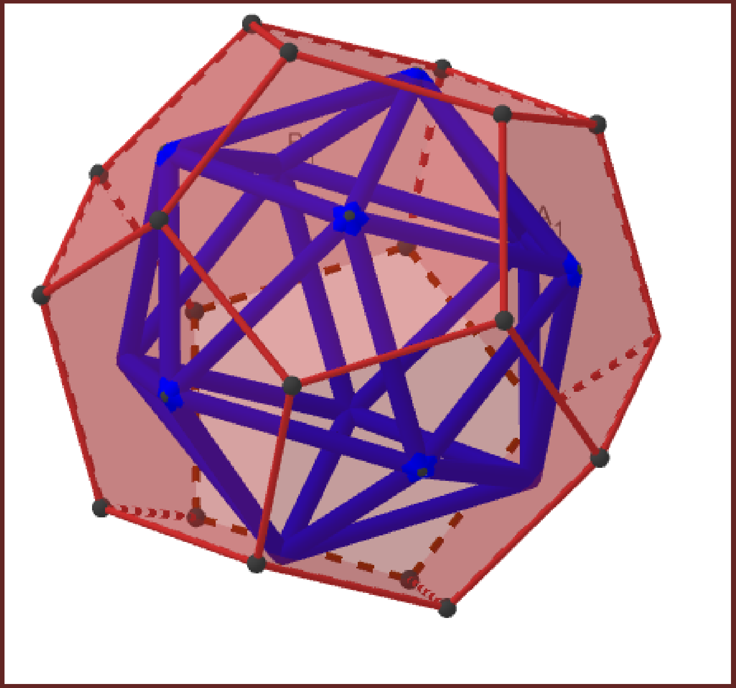
Approfondimento 1
Liceo ad indirizzo sportivo
Poliedri duali

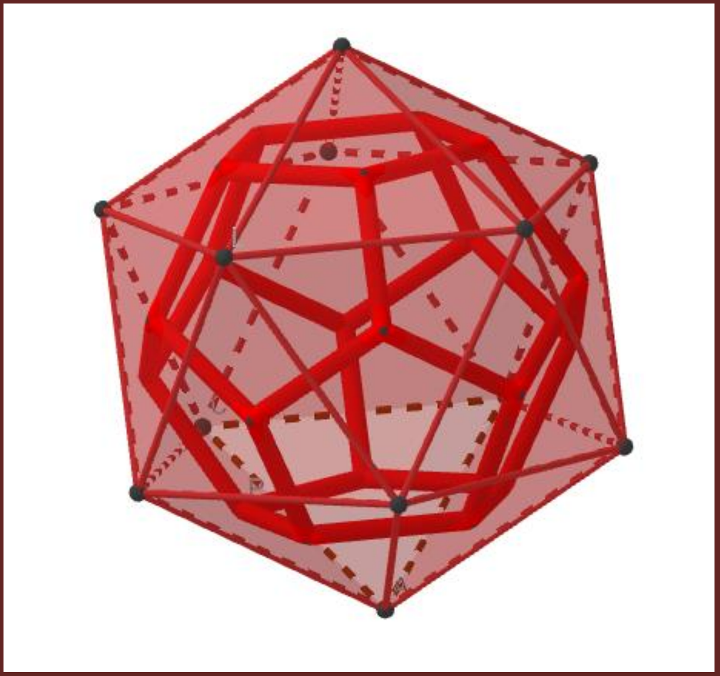
- Più laborioso è stato costruire il centro del pentagono regolare ma dopo aver capito che per centro si intendeva il centro della circonferenza circoscritta i ragazzi hanno notato che in Geogebra c'è il comando "punto medio o centro" che permette di trovare il centro di una circonferenza e quindi nel caso della faccia pentagonale hanno tracciato la circonferenza passante per tre vertici di una faccia e poi ne hanno individuato il centro.
- Dall'icosaedro, con 20 facce, si ottiene il dodecaedro e viceversa e quindi dodecaedro e icosaedro sono duali.

NOTA

Quindi Il tetraedro è duale di se stesso!

Approfondimento 1
Liceo ad indirizzo sportivo
Poliedri duali





Approfondimento 2
Liceo ad indirizzo sportivo
Il pallone da calcio

E’ stato chiesto alla classe, visto che molti studenti praticano il calcio anche a livello agonistico, se avessero mai osservato con attenzione la forma di un pallone da calcio.

Tommaso: “Ci sono pentagoni ed esagoni”

Prof: “Pensate che si possa ottenere un poliedro tipo pallone da calcio partendo da un poliedro regolare?”

Francesco: “Non credo… le facce non sono tutti poligoni regolari uguali”.

Prof: “Non ho detto che sia un poliedro regolare ma se potevamo ottenerlo magari sezionando in modo opportuno un poliedro regolare.”

Tommaso:”Che vuol dire sezionando?”

Prof: “Immaginiamo di prendere un poliedro regolare e di tagliar via qualcosa, per esempio se partissimo da un icosaedro (che ha facce triangoli equilateri) e togliessimo via tutte le “punte”?

Erika: “Forse potremmo provare con Geogebra…”

Approfondimento 2
Liceo ad indirizzo sportivo
Il pallone da calcio

I ragazzi hanno lavorato come al solito a coppie ma solo dopo qualche tentativo qualcuno ha suggerito che sugli spigoli dell'angoloide dovevano essere scelti punti a distanza 1/3 *l* (*l* lunghezza dello spigolo) dal vertice perché "Solo così, prof, potremo avere facce con spigoli uguali dopo aver tagliato perché uno spigolo fa parte di due angoloidi e va tagliato da due parti"

Il problema si è quindi spostato su come determinare un punto a distanza 1/3 l dal vertice.

Riportiamo una discussione:

Tommaso: "Prof non so come posso individuare un punto sullo spigolo a distanza 1/3 l dal vertice."

Prof: "Ricordati che abbiamo studiato le trasformazioni geometriche"

Tommaso (molto soddisfatto): "Giusto, potrei fare un'omotetia di rapporto 1/3!"

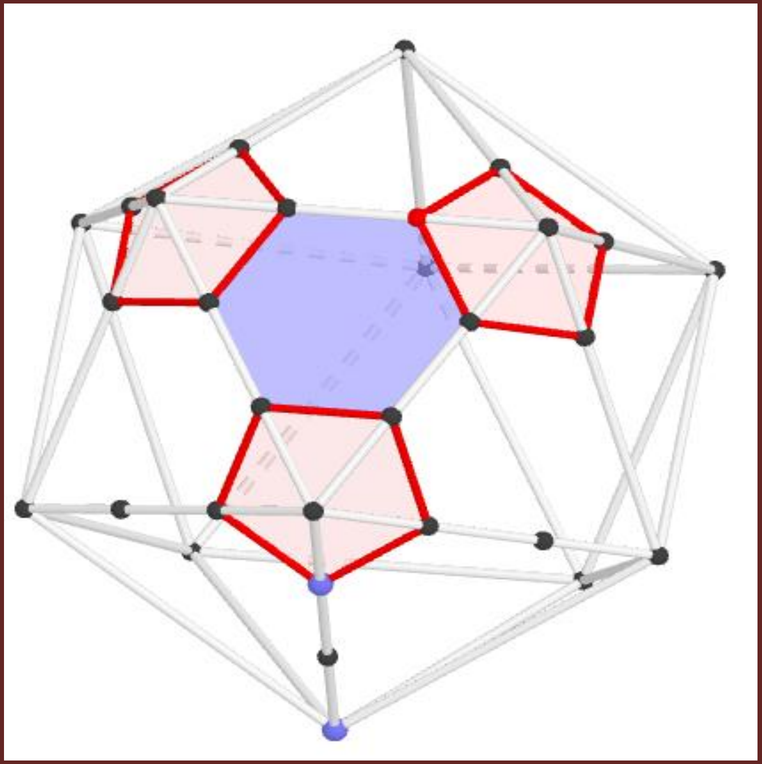
Francesco: "Comunque tracciando tutti questi piani e poi intersecando con le facce ci vuole tanto e non si capisce più nulla!"

Francesco (ripensandoci): "Ma in fondo non importa tracciare i piani. …basta congiungere i punti individuati!"

Approfondimento 2

Liceo ad indirizzo sportivo

Il pallone da calcio



Approfondimento 1
Liceo di ordinamento
Dalla relazione di Eulero al numero dei poliedri regolari

Abbiamo proposto ad alcuni studenti più motivati di cercare di ricavare la dimostrazione dell'esistenza di solo 5 poliedri regolari partendo dalla relazione di Eulero.

Il ragionamento è stato "guidato" nel modo seguente:

Supponiamo che un poliedro regolare abbia F facce, ciascuna delle quali sia un poligono regolare di n lati e che in ciascun vertice si incontrino r spigoli.
Il numero S degli spigoli come è legato al numero F delle facce?

Alcuni hanno subito detto nF, ma riflettendo sul fatto che ogni lato appartiene a due facce siamo arrivati a dire che:

$$n\,F = 2\,S$$

Approfondimento 1

Liceo di ordinamento

Dalla relazione di Eulero al numero dei poliedri regolari

E il numero S degli spigoli come è legato al numero dei vertici V?

Dopo aver riflettuto sul fatto che ogni spigolo ha due vertici siamo arrivati a scrivere che

$$r\,V = 2\,S$$

Sostituendo le due equazioni trovate nella relazione di Eulero troviamo che:

$$\frac{2S}{n} + \frac{2S}{r} = S + 2$$

E dividendo termine a termine per 2S:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{S}$$

Approfondimento 1

Liceo di ordinamento

Dalla relazione di Eulero al numero dei poliedri regolari

Ma quali sono le limitazioni per n e r?

Subito è stata individuata la limitazione su n $n \geq 3$.

Infatti un poligono regolare è fatto da almeno 3 lati.

Per trovare la limitazione su r abbiamo invece fatto ricorso ai modelli di carta per vedere che in ogni vertice devono arrivare almeno 3 spigoli e quindi $r \geq 3$.

Approfondimento 1
Liceo di ordinamento
Dalla relazione di Eulero al numero dei poliedri regolari

Se r e n fossero **entrambi** maggiori di 3, $r, n \geq 4$, avremo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{S}=\frac{1}{n}+\frac{1}{r}\leq\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Ma questo è impossibile perché:

$$\frac{1}{S}\leq\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

Dunque abbiamo solo due casi:

$n=3, \qquad r>3$ oppure $n>3 \quad r=3$

Approfondimento 1
Liceo di ordinamento
Dalla relazione di Eulero al numero dei poliedri regolari

Caso $n = 3, \qquad r > 3$

L'equazione diventa: $$\frac{1}{2} + \frac{1}{S} = \frac{1}{3} + \frac{1}{r}$$

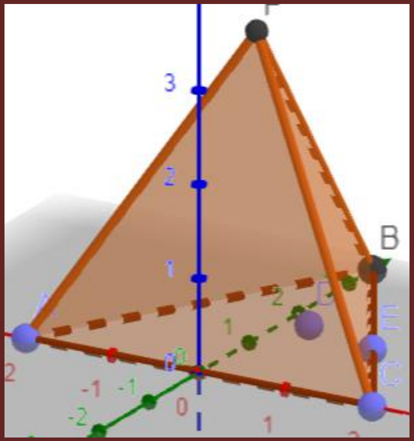
Da cui ricaviamo: $$\frac{1}{S} = \frac{1}{r} - \frac{1}{6}$$

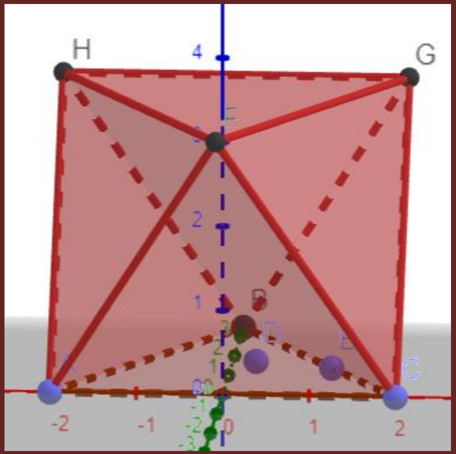
Sapendo che r >3 e che le soluzioni sono numeri naturali possiamo trovare le soluzioni.

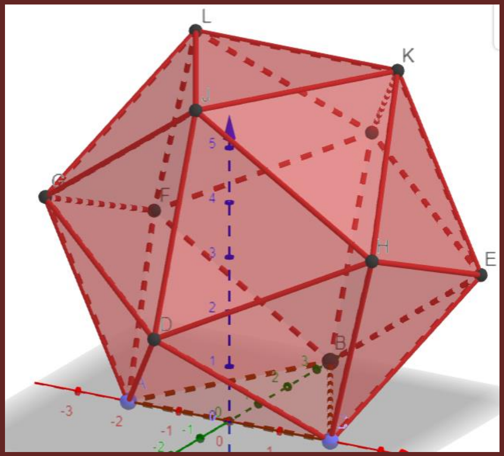
Approfondimento 1
Liceo di ordinamento
Dalla relazione di Eulero al numero dei poliedri regolari

Quindi le possibili soluzioni sono:

r	S	F	V	
3	6	4	4	tetraedro
4	12	8	6	Ottaedro
5	30	20	12	icosaedro
6	Imp.			







Approfondimento 1

Liceo di ordinamento

Dalla relazione di Eulero al numero dei poliedri regolari

Caso $n > 3 \quad r = 3$

L'equazione diventa: $$\frac{1}{2}+\frac{1}{S}=\frac{1}{n}+\frac{1}{3}$$

Da cui ricaviamo: $$\frac{1}{S}=\frac{1}{n}-\frac{1}{6}$$

Sapendo che n >3 e che le soluzioni sono numeri naturali possiamo trovare le soluzioni.

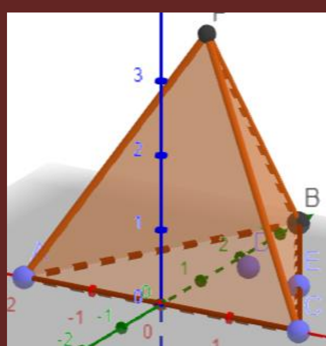
Approfondimento 1

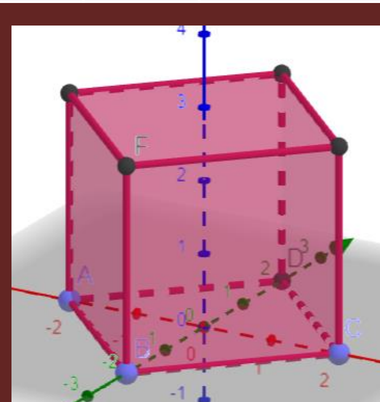
Liceo di ordinamento

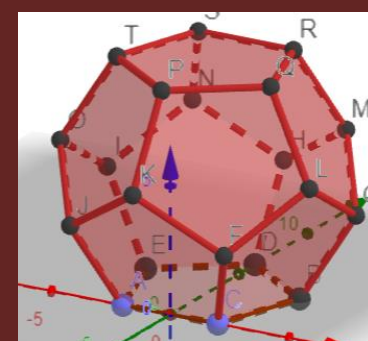
Dalla relazione di Eulero al numero dei poliedri regolari

Quindi le possibili soluzioni sono:

n	S	V	F	
3	6	4	4	tetraedro
4	12	8	6	Cubo (esaedro)
5	30	20	12	dodecaedro
6	imp			





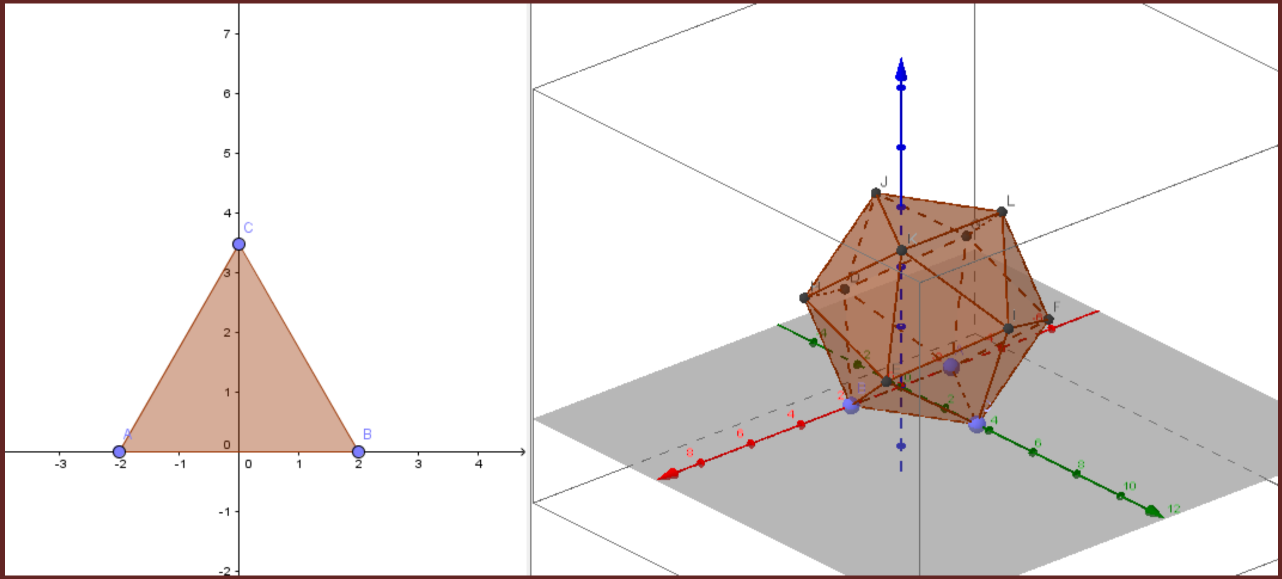


In conclusione quindi abbiamo ritrovato i cinque poliedri regolari!

Approfondimento 2
Liceo di ordinamento
Il volume dell'icosaedro

Costruisci, dopo aver creato due punti, l'icosaedro regolare con il comando Icosaedro [A,B].

Quale sarà il suo volume?



Approfondimento 2

Liceo di ordinamento

Il volume dell'icosaedro

Il problema è stato risolto fornendo una scheda guidata contenente i seguenti punti:

•Il volume dell'icosaedro si può determinare osservando che è costituito da 20 piramidi aventi per base una faccia dell'icosaedro e per vertice V il centro del poliedro.

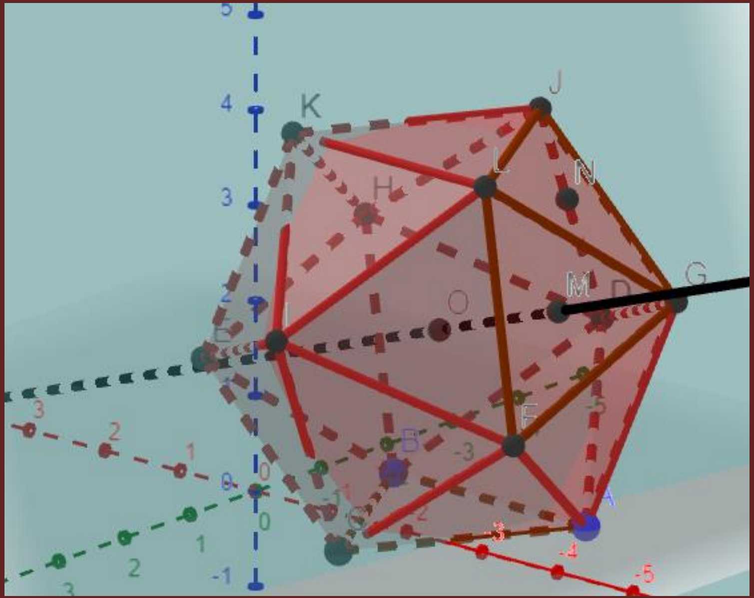
•Dopo aver disegnato con Geogebra un icosaedro verifica che esiste il centro dell'icosaedro

(il centro è un punto

equidistante da tutti i vertici)

•Disegna il piano per V

perpendicolare ad un asse



Approfondimento 2
Liceo di ordinamento
Il volume dell'icosaedro

- Determina l'intersezione tra il piano e l'icosaedro.

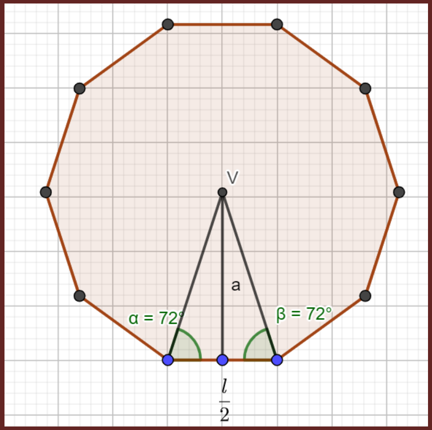
Che poligono è?E' un poligono regolare?

Quanto misura il lato del poligono rispetto allo sigolo dell'icosaedro?

Quanto misura l'apotema del poligono sezione?

Verifica che l'apotema misura

$$a = \frac{\frac{l}{2}}{2}\tan 72° = \frac{l}{4}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$$

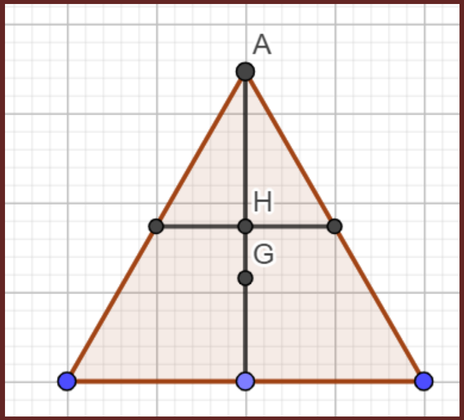


Approfondimento 2
Liceo di ordinamento
Il volume dell'icosaedro

- L'apotema è perpendicolare alla faccia del poliedro?
- Qual è l'altezza delle piramidi?

Osserva che l'altezza di una delle 20 piramidi cade nel baricentro del triangolo equilatero.

- Quanto misura HG? Ricorda che il baricentro divide ogni mediana in due parti di cui quella contenente il vertice è il doppio dell'altra.



Verifica che HG risulta:

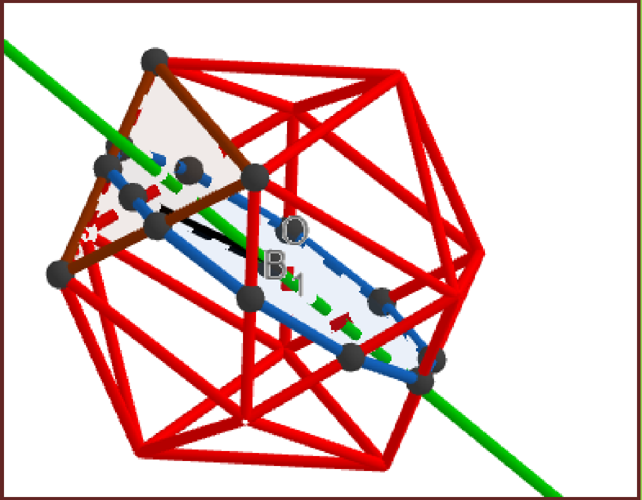
$$HG = \frac{2}{3}h - \frac{1}{2}h = \frac{h}{6} = \frac{l\sqrt{3}}{12}$$

Approfondimento 2
Liceo di ordinamento
Il volume dell'icosaedro

NOTA

Questa parte ha permesso di riflettere sulla posizione retta piano e sulla visione spaziale. Inizialmente la maggior parte degli studenti aveva pensato che l'apotema del decagono fosse perpendicolare alla faccia del poliedro e con Geogebra ha invece potuto osservare come ciò non fosse vero.

Il problema del calcolo dell'altezza della piramide è stato quindi più complicato e ci ha permesso anche di richiamare in gioco varie nozioni di geometria piana viste nel biennio.

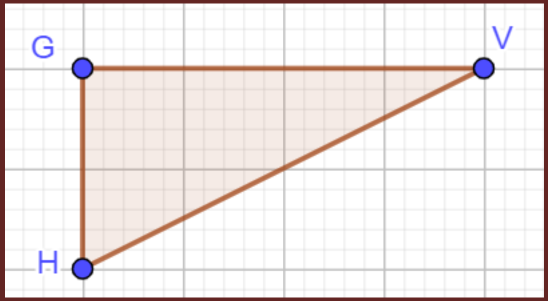


Approfondimento 2

Liceo di ordinamento

Il volume dell'icosaedro

- Puoi calcolare l'altezza delle piramidi che compongono l'icosaedro con il teorema di Pitagora:

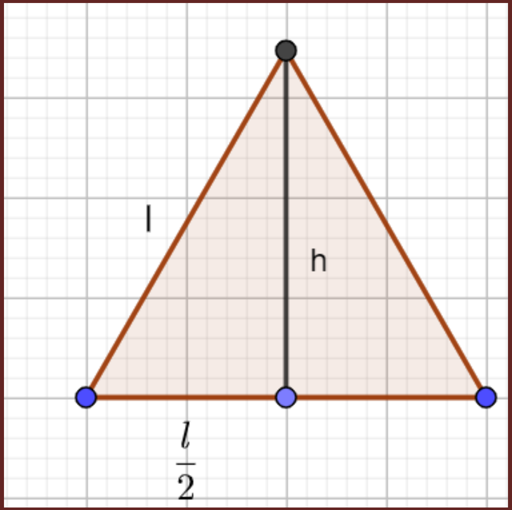


$$VG = \sqrt{VH^2 - GH^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{4}\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{l\sqrt{3}}{12}\right)^2} = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{3}}$$

Approfondimento 2
Liceo di ordinamento
Il volume dell'icosaedro

Quanto misura l'area di una faccia dell'icosaedro?

$$h = \frac{l}{2}\sqrt{3}$$



Quindi:

$$A = \frac{l \cdot \frac{l}{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

In conclusione verifica che il volume è:

$$V = 20\frac{Aa}{3} = \frac{20}{3}\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\frac{l}{4}\sqrt{\frac{14+6\sqrt{5}}{3}} = \frac{5}{12}l^3\sqrt{14+6\sqrt{5}} = \frac{5}{12}l^3\left(3+\sqrt{5}\right)$$

Approfondimento 2

Liceo di ordinamento

Il volume dell'icosaedro

NOTA

Questa attività pur essendo piuttosto complessa ha permesso agli studenti più motivati di utilizzare le conoscenze di goniometria e trigonometria sviluppate nel primo quadrimestre e di migliorare la visualizzazione spaziale di figure anche complicate.

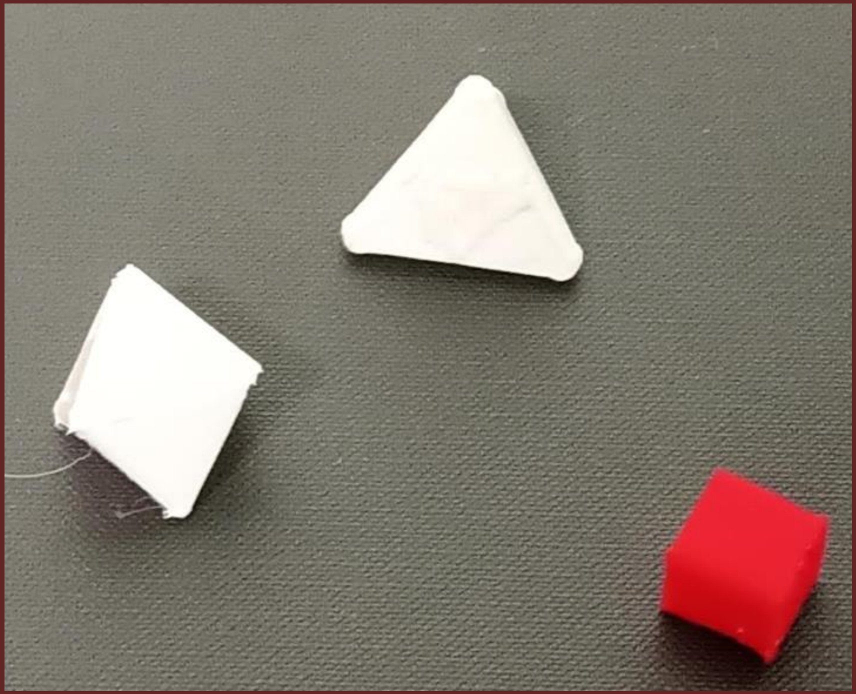
Le stampe 3D dei poliedri regolari

Infine ciascun gruppo di lavoro ha stampato un poliedro a piacere.

NOTA: per fare la stampa 3D è sufficiente esportare il file Geogebra nel formato .stl e poi aprirlo nel computer collegato alla stampante e in cui è installato il software specifico(nel nostro caso Ultimaker Cura) impostando alcuni parametri (per esempio la dimensione, riposizionare sul piano di stampa, mettere un "appoggio" ecc.)

Le stampe 3D dei poliedri regolari

Gli studenti sono stati molto stimolati dal poter utilizzare la stampante 3D (appena acquistata dall'Istituto) ed hanno gestito anche la parte tecnica (uso del software Ultimaker Cura per la gestione dei parametri di stampa) con grande naturalezza.



Verifica

La verifica è stata di tipo individuale e le attività proposte sono state di due tipi:

- risoluzione di alcuni esercizi
- esplorazioni con Geogebra con la richiesta di formulare ipotesi.

Verifica

Esercizio 1

Trova una formula per la superficie totale del tetraedro.

Esercizio 2

Trova una formula per il volume dell’ottaedro

Esercizio 3
(Esplorazione con Geogebra)

Sezionando un cubo con un piano puoi ottenere un trapezio isoscele? Perché non si può ottenere come sezione un poligono con sette o più lati? Prova con Geogebra e motiva la risposta.

Verifica

L'esercizio che ha creato maggiori difficoltà è stato il terzo in quanto richiedeva un certo sforzo nella visualizzazione spaziale anche se l'uso del software lo ha reso molto più chiaro.

La risposta alla seconda domanda del terzo quesito ha creato difficoltà nell'argomentazione e solo alcuni studenti sono riusciti a mettere in relazione il numero delle facce con il numero dei lati del poligono sezione.

Risultati ottenuti

- Promuovere una visione spaziale
- Promuovere la capacità di interpretare i risultati ottenuti
- Sviluppare la capacità di fare congetture e verificarle
- Sviluppare la capacità di fare collegamenti
- Sviluppare il concetto di costruzione in matematica
- Sviluppo del linguaggio

Questi obiettivi di maggior respiro devono ancora essere consolidati e interiorizzati dagli studenti.

- Conoscere i poliedri regolari e alcune loro caratteristiche
- Conoscere la relazione di Eulero

Questi obiettivi sono stati mediamente raggiunti da tutti i ragazzi

Valutazione dell’efficacia del percorso didattico sperimentato

1. Gli studenti sono stati più partecipi alle attività
2. Gli studenti hanno sviluppato maggiormente competenze argomentative ed esplorative
3. Gli studenti hanno sviluppato competenze di *cooperative learning*
4. Gli studenti, nel laboratorio di informatica, si sono sentiti maggiormente autonomi e hanno lavorato con entusiasmo.