La geometria dello spazio

Dallo studio delle prove Invalsi alla didattica attiva

Grado scolastico: Scuola secondaria di I grado

Area disciplinare: Matematica

I.C. Rignano-Incisa Valdarno

Docenti coinvolti: Lucia Ciabini

Realizzato con il contributo della Regione Toscana nell'ambito del progetto

Rete Scuole LSS a.s. 2021/2022

Collocazione del percorso nel curricolo verticale

Il percorso è stato svolto tra la fine di febbraio e la fine del mese di maggio del terzo anno della scuola secondaria di primo grado.
La programmazione curricolare di geometria del terzo anno prevede i seguenti argomenti:

- Geometria sul piano cartesiano: punti, segmenti e figure piane
- Rette sul piano cartesiano: rappresentazione della proporzionalità diretta e inversa
- Circonferenza e cerchio
- **Geometria solida**

Le conoscenze di geometria piana (poligoni, circonferenza e cerchio) sono prerequisiti indispensabili per affrontare la geometria dello spazio. Altrettanto importanti sono la conoscenza e la capacità di applicare le equivalenze tra unità di misura del volume, trattate approfonditamente durante il primo quadrimestre del primo anno, e richiamate nella parte introduttiva del percorso.

Obiettivi essenziali di apprendimento

Dalle Indicazioni Nazionali del 2012

- Riconoscere e denominare le forme del piano e dello spazio, le loro rappresentazioni e coglierne le relazioni tra gli elementi (<u>Traguardo di competenza</u>)
- Riprodurre figure e disegni geometrici, utilizzando in modo appropriato e con accuratezza opportuni strumenti (riga, squadra, compasso, goniometro, software di geometria)
- Rappresentare oggetti e figure tridimensionali in vario modo tramite disegni sul piano
- Visualizzare oggetti tridimensionali a partire da rappresentazioni bidimensionali
- Calcolare l'area e il volume delle figure solide più comuni e darne stime di oggetti della vita quotidiana
- Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure

Altri obiettivi

- Sviluppare un atteggiamento critico nei confronti dei quesiti geometrici, arrivando alla risoluzione con il ragionamento e la scomposizione in figure più semplici, più che attraverso l'applicazione meccanica di formule
- Ricondurre la forma di oggetti e strumenti di uso comune a quella dei solidi geometrici

Elementi salienti dell’approccio metodologico

Il percorso è stato proposto ad una classe abituata a lavorare secondo la didattica laboratoriale in cinque fasi fin dal primo anno della scuola secondaria di I grado.
Pur permanendo lo stato di emergenza dovuto alla pandemina da Covid-19, quest’anno è stato possibile utilizzare il laboratorio e proporre il lavoro in piccoli gruppi.
I concetti sono stati costruiti dopo una fase di osservazione, riflessione e verbalizzazione scritta individuale, spesso attraverso esercitazioni grafiche, rispondendo a quesiti posti dall’insegnante. La docente ha poi moderato la discussione con la trascrizione sulla LIM degli interventi e delle ipotesi (corrette e non) degli alunni per arrivare, dopo una discussione collettiva, alle conclusioni, alle definizioni, alle proprietà corrette e alle leggi matematiche.
Le conclusioni raggiunte, condivise da tutti, sono state trascritte ed evidenziate sul quaderno di ogni ragazzo.

Nota:
Per facilitare lo studio, in particolare degli studenti che hanno ancora difficoltà a scrivere e copiare dalla lavagna, l’insegnante ha realizzato dispense (aggiornate dopo ogni lezione e condivise attraverso la classroom) in cui sono state riportate le conclusioni, le definizioni e le formule ottenute, insieme ad alcune immagini significative relative alla discussione in classe.

Materiali, apparecchi e strumenti impiegati

Materiali

Cubi di legno verniciato

Solidi geometrici in plastica e in legno

Fotocopie di schede costruite a partire dai quesiti Invalsi

Cartoncino e fogli da origami

Fogli di acetato

Strumenti

Righelli, squadre, forbici, colla

Recipienti graduati e non

Barattoli e scatole di uso quotidiano

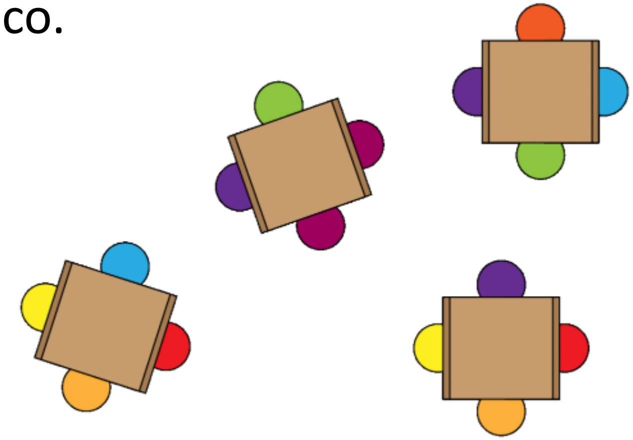
LIM e monitor interattivo per presentazione di materiale multimediale e per la discussione collettiva

Ambiente/i in cui è stato sviluppato il percorso

Aula e laboratorio di Matematica e Scienze

Il percorso si è svolto quasi interamente nel laboratorio di Matematica e Scienze, con un uso continuo del monitor interattivo. Nell'aula della classe sono state svolte solo le lezioni e le esercitazioni di consolidamento.

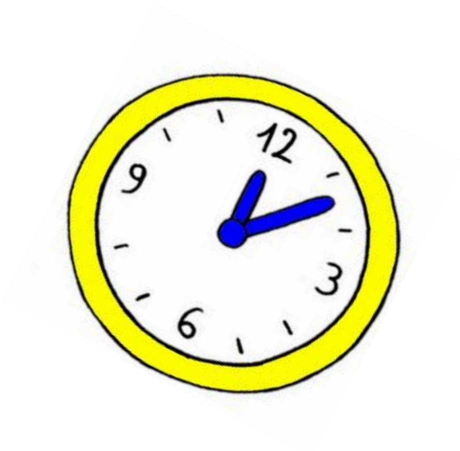
I banchi sono stati disposti ad isole, in modo da favorire l'interazione tra i ragazzi e la condivisione del materiale didattico.



Tempo impiegato

Per la progettazione specifica e dettagliata nella classe
10 h circa per la programmazione delle attività e per la ricerca e rielaborazione del materiale selezionato dalle prove Invalsi

Tempo-scuola di sviluppo del percorso
25 h circa per le attività laboratoriali, per le discussioni collettive e per le esercitazioni
1 h per la verifica intermedia
1 h per la verifica finale



Per la documentazione
15 h circa

Altre informazioni

Sitografia e bibliografia

Contaci!, Vol. 3, di C. Bertinetto, A. Metiäinen, J. Paasonen, E. Voutilainen, Ed. Zanichelli (Libro di testo)

https://www.gestinv.it/Index.aspx
Archivio interattivo delle prove Invalsi

INVALSI

https://invalsi-areaprove.cineca.it
Il sito dell'Istituto Invalsi, in particolare per le prove di matematica di grado 8, ma guardando anche quelle di grado 5, 10 e 13.

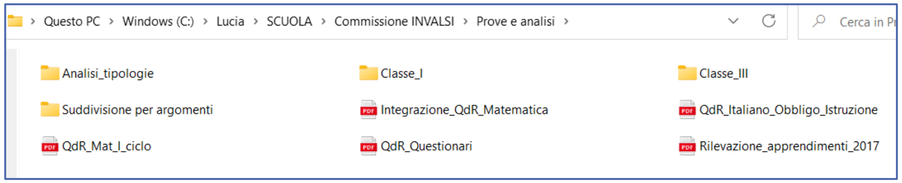
Video sullo sviluppo del cubo: https://www.youtube.com/watch?v=u4HQ1DQ6UyI
https://www.youtube.com/watch?v=URUb7GOEWyU&t=2s

Schooltoon: https://www.youtube.com/watch?v=AZnr4USo0pU

Descrizione del percorso didattico

Premessa

Il percorso, quasi interamente costruito partendo dai quesiti e dagli oggetti proposti dalle prove Invalsi, nasce da una doppia esigenza:



Un archivio di materiale raccolto e studiato nel tempo

1) **Di tempo.** Un po' per i tempi naturalmente distesi richiesti dalla pratica laboratoriale, un po' per gli inevitabili ritardi dovuti alla situazione pandemica, non è stato possibile iniziare la trattazione della geometria solida prima della fine del mese di febbraio.

2) **Didattica.** I quesiti tradizionalmente proposti nella programmazione di geometria sono spesso inutilmente complessi, lontani dalla realtà (che poi è fatta di oggetti tridimensionali!) e molto distanti da ciò che le prove Invalsi richiedono per verificare le competenze degli alunni alla fine del primo ciclo.
   Allo stesso tempo i quesiti Invalsi di geometria solida risultano talvolta di difficile comprensione, soprattutto per i ragazzi con DSA o con difficoltà ad astrarre le caratteristiche delle figure tridimensionali partendo dai disegni.

Queste condizioni, unitamente alle difficoltà oggettive del gruppo classe (18 alunni di cui 2 DVA e altri 7 con DSA o altri BES), hanno fornito la condizione ideale per mettere a frutto il lavoro di studio sulle prove Invalsi iniziato nel nostro Istituto nell'A.S. 2017/18. Una commissione appositamente individuata ha costruito nel tempo un archivio in cui i quesiti sono stati suddivisi per argomento e per tipologia. Gli stessi quesiti vengono opportunamente modificati e utilizzati per produrre schede di lavoro, come verrà illustrato nella descrizione dettagliata del percorso.

Le fasi del percorso:

Il percorso sulla geometria solida è stato svolto attraverso le seguenti fasi essenziali:

1. **Partiamo da quello che sappiamo…**
2. **Il cubo, dall’oggetto di legno alle formule dirette e inverse**
3. **Solidi composti da cubetti: costruiamo, poi calcoliamo!**
4. **Ancora sul cubo: lo sviluppo sul piano**
5. **Il parallelepipedo e altre scatole**
6. **Classifichiamo i solidi**
7. **Riempiamo i solidi a due basi**
8. **Il cilindro: volume, sviluppo, solidi di rotazione**
9. **La piramide**

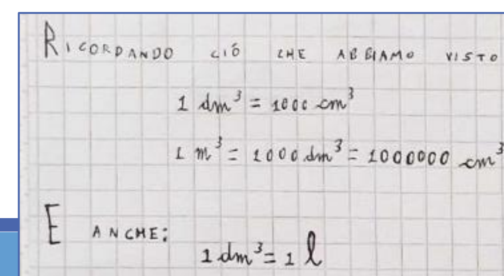
1. PARTIAMO DA QUELLO CHE SAPPIAMO… (O DOVREMMO SAPERE)

Volume e capacità, equivalenze e ricordi

Nel corso del primo anno è stata dedicata una parte importante della programmazione alla costruzione operativa delle unità di misura del volume, ai concetti di volume e capacità, alla misura di volumi di oggetti e spazi, tipo scatole e stanze.

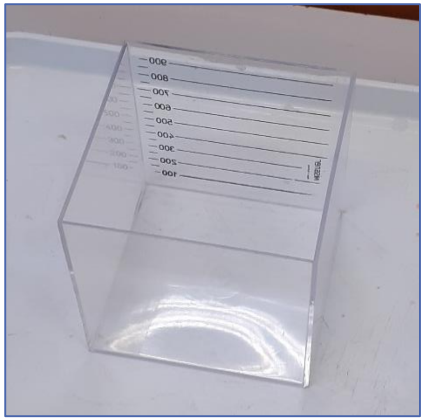
Abbiamo ricercato nel materiale archiviato nella classroom e nei quaderni le conclusioni a cui eravamo arrivati e le fotografie dei ragazzi, molto più piccoli.

E' stato piacevole vedere che molti di loro ricordavano le conclusioni e ritrovavano facilmente il materiale.

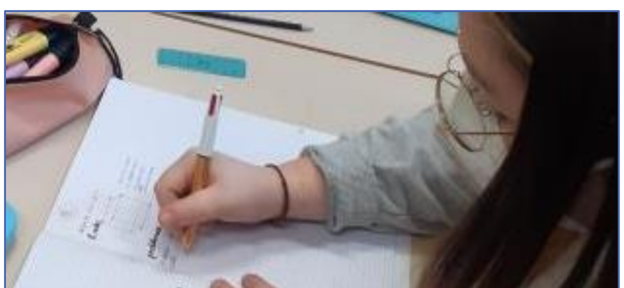


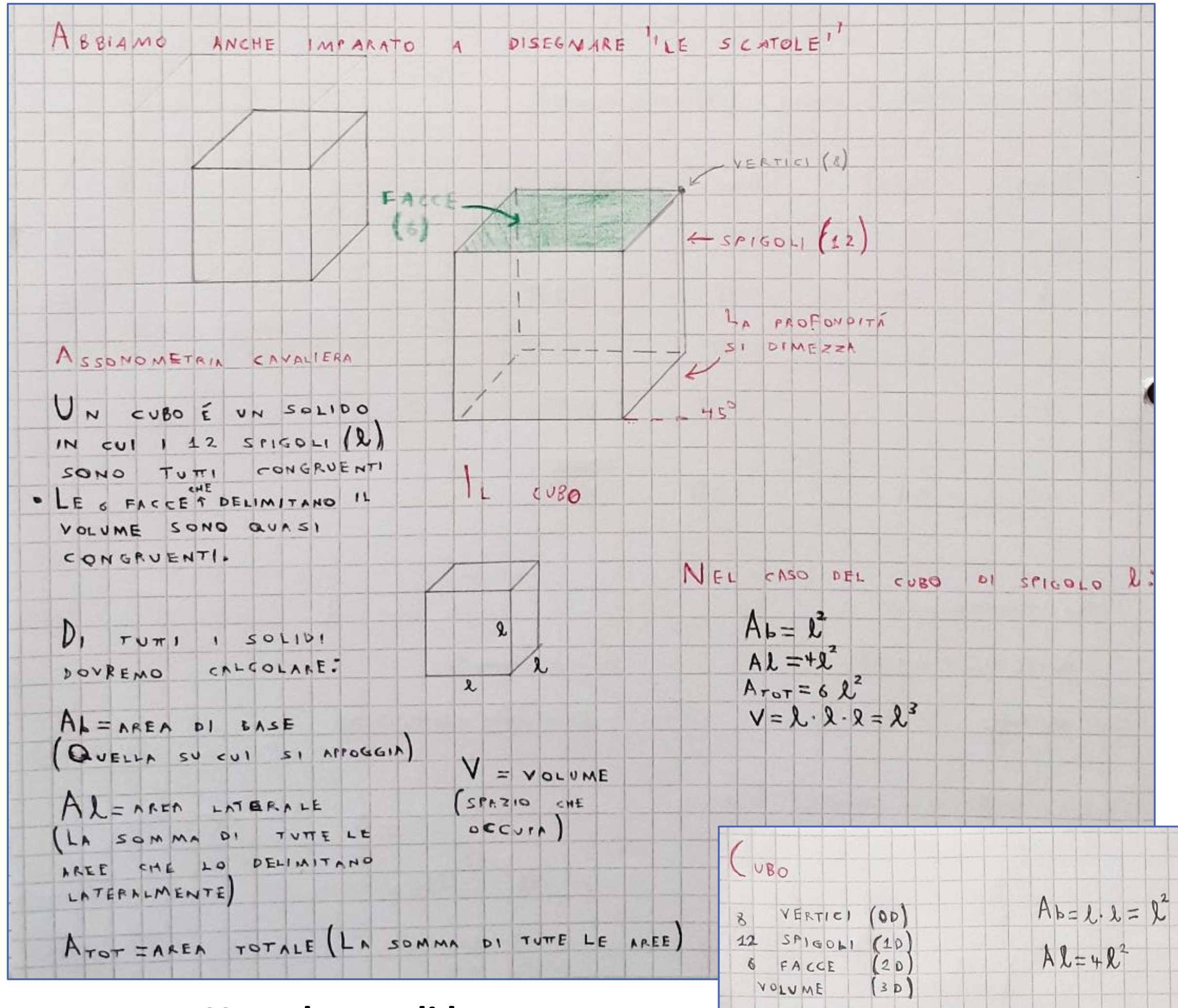
Un’equivalenza importante che avevamo ricavato, e che ricorre spesso nei quesiti delle prove Invalsi, è quella tra litro e decimetro cubo.
Poiché quest’anno è arrivata in classe una nuova alunna che non conosceva questa equivalenza, abbiamo ritenuto opportuno rivederla, facendola verificare proprio a lei, sotto lo sguardo attento e divertito dei compagni. Abbiamo ribadito, quindi, che:

$$\boxed{1\ dm^3 = 1\ l}$$



2. IL CUBO: DALL'OGGETTO DI LEGNO ALLE FORMULE





Un cubetto di legno a testa

Osserviamo, contiamo, diamo il nome agli elementi del cubo e impariamo a fare il disegno in assonometria cavaliera.

Il percorso vero e proprio inizia con la distribuzione di un cubetto di legno ad ogni alunno.
Dopo aver ricordato con gli alunni il significato di «spigolo», «vertice» e «faccia», e stato chiesto di:

- *osservare bene il cubo e scriverne tutte le caratteristiche geometriche*
- *provare a disegnarlo ricordando le regole dell'assonometria cavaliera*, già ampiamente trattata e utilizzata a tecnologia.

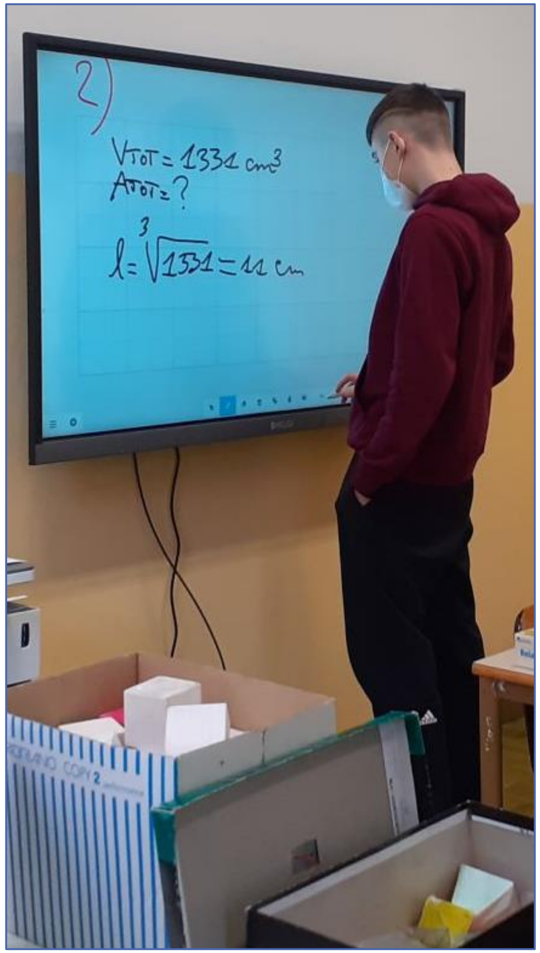
Dopo aver discusso, ed eventualmente corretto il lavoro degli alunni, l'insegnante ha assegnato due semplici problemi per applicare le formule dirette per il calcolo dell'area e del volume, e per ricavare le formule inverse corrispondenti:

Problema 1.
Calcola il volume di un cubo avente area totale di 384 cm^2

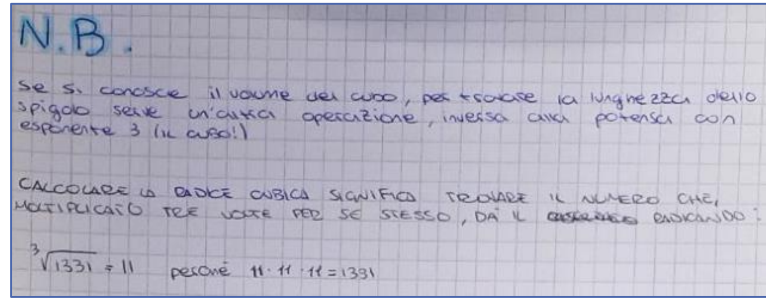
Problema 2.
Calcola l'area totale della superficie di un cubo avente il volume di 1331 cm^3

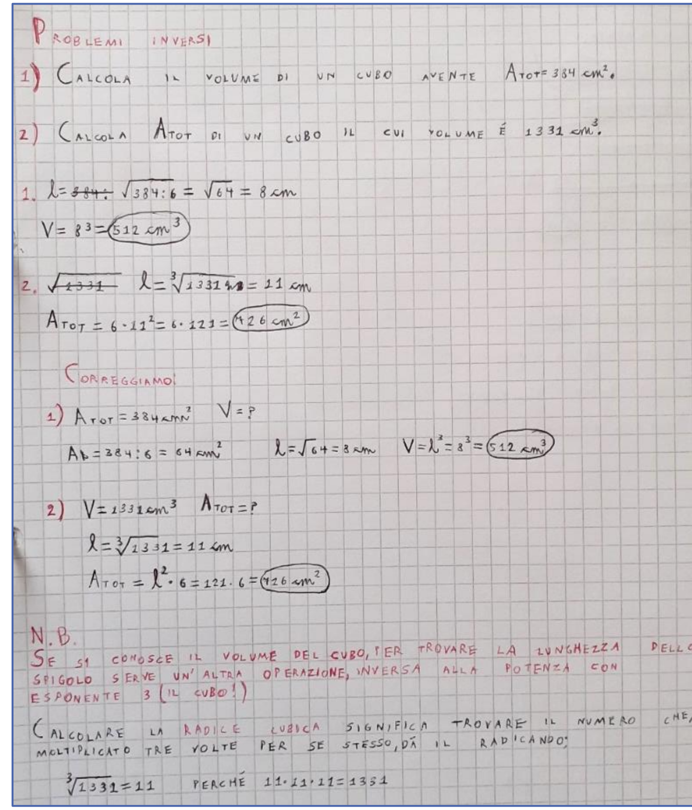
N.B. D'accordo con l'insegnante di sostegno, sempre presente nelle ore di geometria, ai ragazzi con DVA per il momento si è chiesto solo di applicare le formule dirette, assegnando la lunghezza dello spigolo del cubo.

Correzione e discussione del problema 1.



Correzione e discussione del problema 2.





La necessità di calcolare la radice cubica emerge in modo spontaneo, e altrettanto spontaneamente viene utilizzata da diversi alunni. Alla fine della discussione le definizioni e le formule vengono scritte alla lavagna dall'insegnante e trascritte da tutti i ragazzi.

3. SOLIDI COMPOSTI DA CUBETTI: COSTRUIAMO, POI CALCOLIAMO!

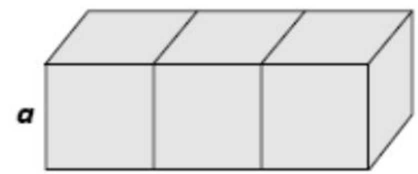
Ricavate proprietà e formule del cubo, è ora possibile iniziare a lavorare con i quesiti delle prove Invalsi. I solidi composti da cubi sono ricorrenti nelle prove nazionali, per tutti i gradi di istruzione. In questo percorso i quesiti sono stati spesso modificati, togliendo le quattro opzioni che di solito vengono fornite, e aggiungendo quantità da calcolare e disegni da realizzare.

Ogni situazione, poi, è stata riprodotta dagli studenti in modo da poter ragionare sul modello tridimensionale. In questo modo è stata favorita la partecipazione degli alunni con maggiori difficoltà.

Quesito 1: Tre cubetti

Dalla PN 2016

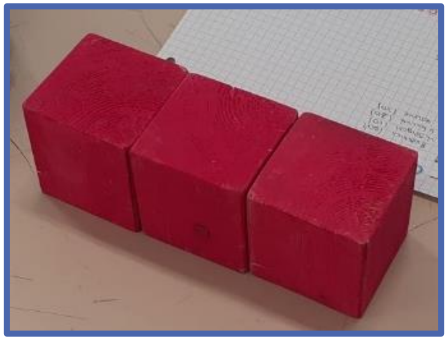
Per formare il parallelepipedo che vedi in figura si incollano tra loro tre cubi uguali di spigolo *a*.



Qual è la superficie totale del parallelepipedo così ottenuto?

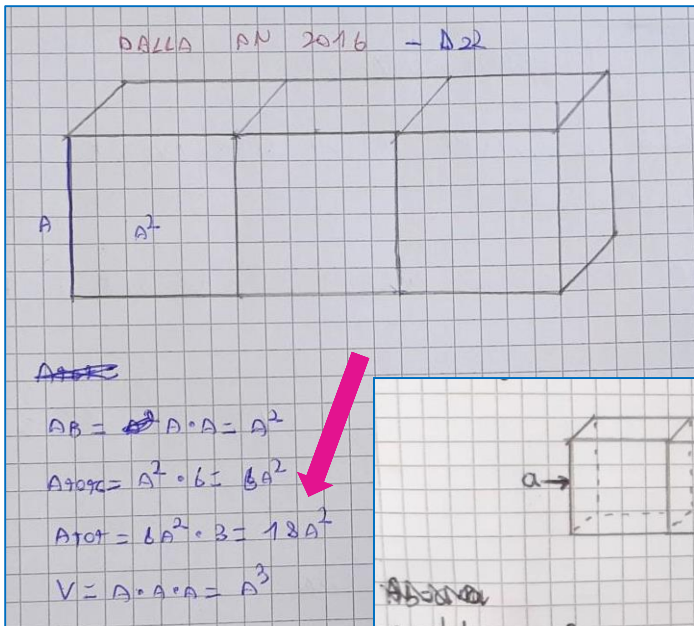
A. $6a^2$
B. $7a^2$
C. $14a^2$
D. $18a^2$

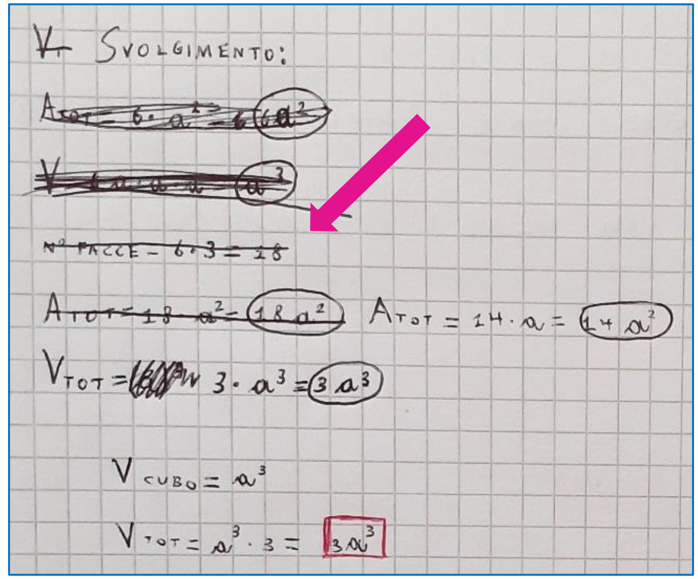
Le quattro opzioni non vengono fornite, mentre si suggerisce ai ragazzi con minori capacità di astrazione di attribuire allo spigolo del cubo un certo valore.



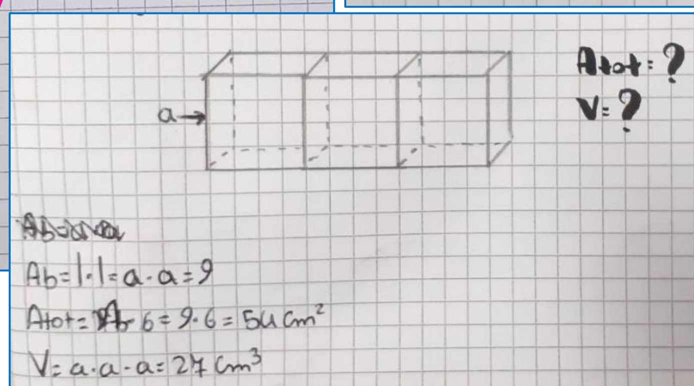
Su ogni banco il solido composto su cui ragionare

- *Provate con dei numeri, se vi torna più comodo*
- *Calcolate anche il volume del solido composto*

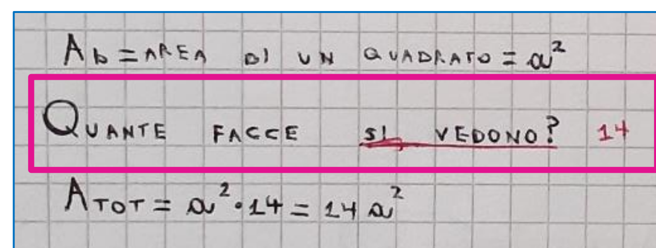




Nonostante il quesito non sia particolarmente difficile, alcuni alunni non lo portano a termine, mentre la maggioranza di loro applica le formule senza soffermarsi a pensare, e triplica sia il volume che l'area del cubo.



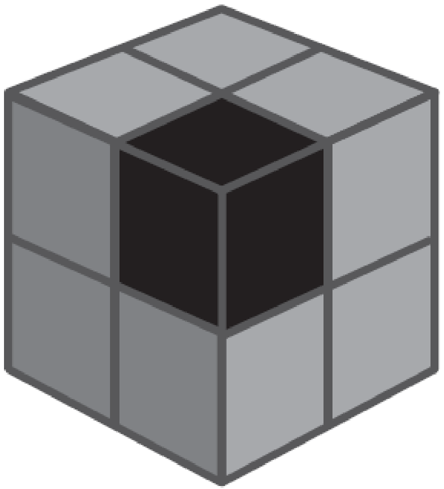
Nella discussione è necessario invitare a **contare le facce che effettivamente si vedono**. Questo anche per i problemi futuri!



Quesito 2: Otto (sette) cubetti

Dalla PN 2017

Osserva la figura.



IL CUBO IN FIGURA È COSTRUITO CON **8 CUBETTI DI LATO *a***.

1. CALCOLA L'AREA TOTALE E IL VOLUME DEL SOLIDO.

   ____

   ____

   ____

   ____

2. AL CUBO INIZIALE VIENE TOLTO IL CUBETTO COME IN FIGURA. CALCOLA IL NUOVO VOLUME E L'AREA TOTALE. CHE COSA PUOI NOTARE? PERCHÉ?

   ____

   ____

   ____

Il cubo nell'immagine è formato da 8 cubetti.
Viene eliminato il cubetto nero: com'è la superficie totale del solido rimanente rispetto a quella del cubo di partenza?

A. ☐ Uguale a quella del cubo

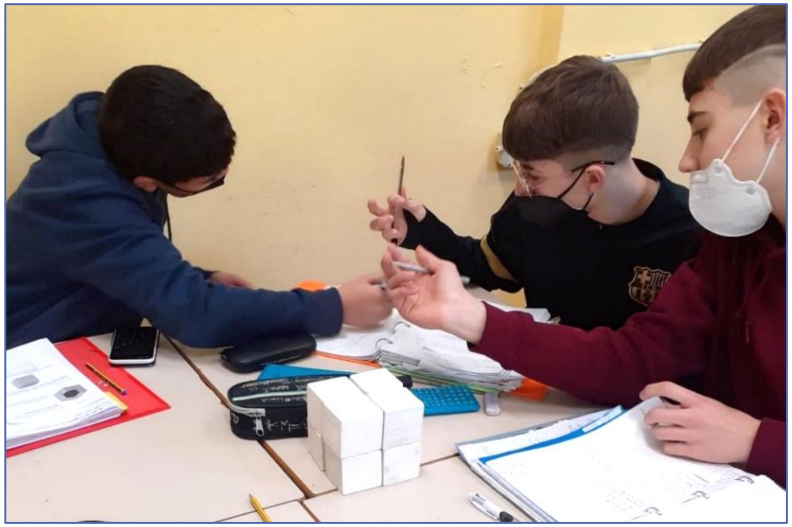
B. ☐ Maggiore di quella del cubo

C. ☐ Minore di quella del cubo

D. ☐ Non si può sapere perché non si conosce la misura dello spigolo del cubo

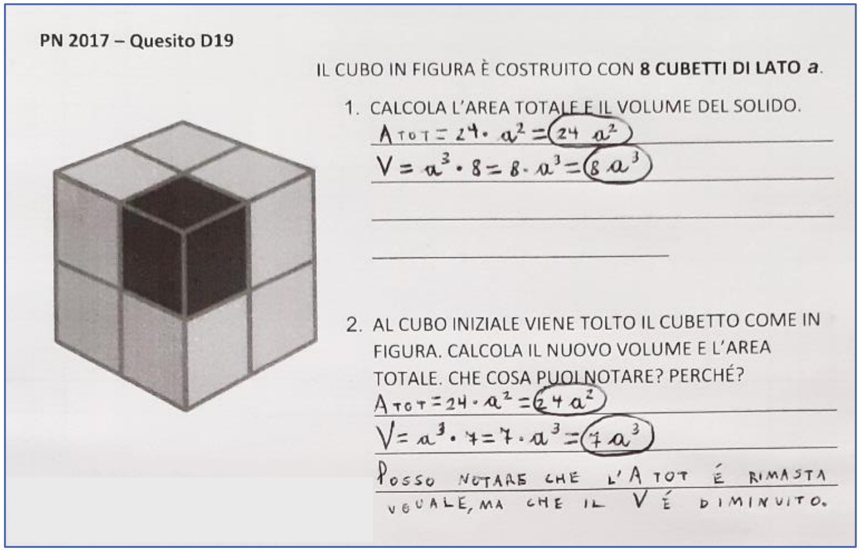
Anche in questo caso vengono tolte le quattro opzioni; il testo e le richieste vengono modificate in modo da ragionare ancora sulle formule dell'area della superficie e del volume.

Nella seconda parte si toglie uno degli otto cubetti. Si chiede di calcolare nuovamente volume e area della superficie, spiegando ciò che possono notare.



I ragazzi costruiscono il solido, osservano e contano, e questa volta non sbagliano.

Anche gli alunni con maggiori difficoltà partecipano e risolvono il problema. La maggior parte argomenta correttamente il motivo per cui l'area totale rimane la stessa.



PN 2017 – Quesito D19

IL CUBO IN FIGURA È COSTRUITO CON **8 CUBETTI DI LATO *a***.

1. CALCOLA L'AREA TOTALE E IL VOLUME DEL SOLIDO.

$A_{tot} = 24 \cdot a^2 = 24\,a^2$

$V = a^3 \cdot 8 = 8 \cdot a^3 = 8\,a^3$

2. AL CUBO INIZIALE VIENE TOLTO IL CUBETTO COME IN FIGURA. CALCOLA IL NUOVO VOLUME E L'AREA TOTALE. CHE COSA PUOI NOTARE? PERCHÉ?

$A_{tot} = 24 \cdot a^2 = 24\,a^2$

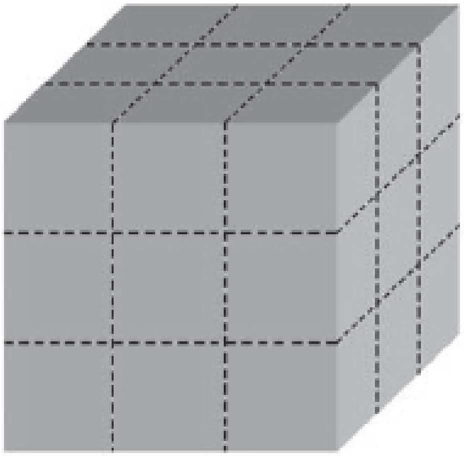
$V = a^3 \cdot 7 = 7 \cdot a^3 = 7\,a^3$

POSSO NOTARE CHE L'A TOT É RIMASTA UGUALE, MA CHE IL V É DIMINUITO.

Quesito 3: Ventisette cubetti

Dalla PN 2010

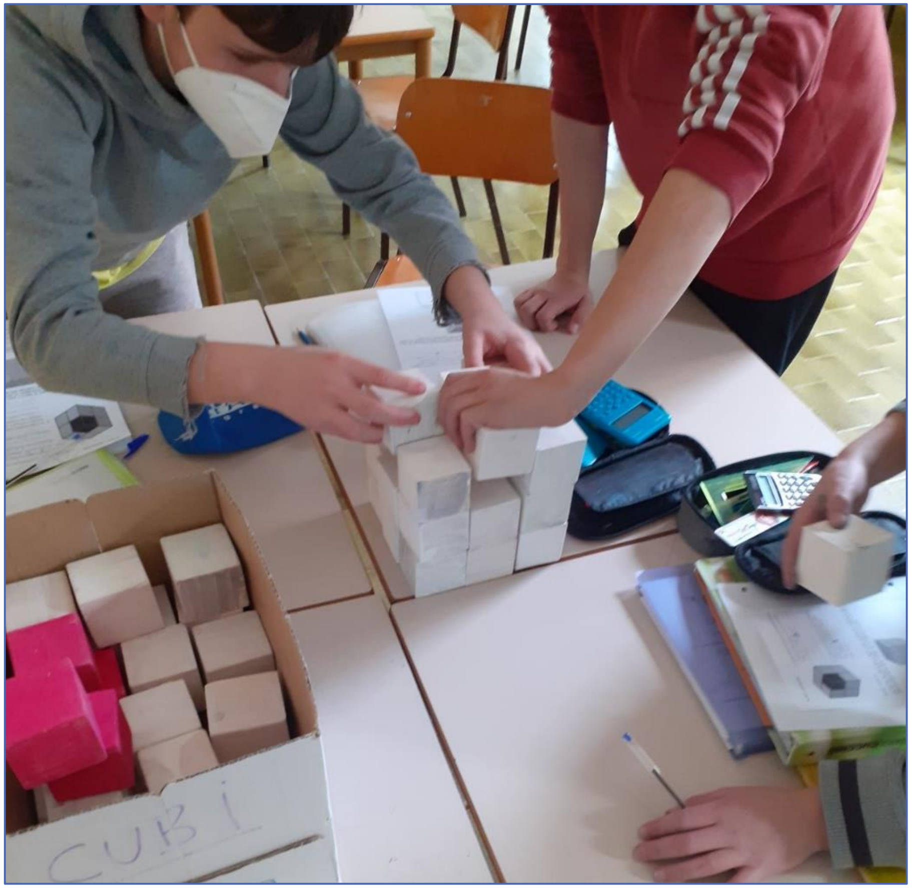
La superficie del cubo di legno in figura è stata completamente verniciata. Il cubo viene poi segato lungo le linee tratteggiate. Si ottengono così diversi cubetti, dei quali alcuni non hanno nessuna faccia verniciata, altri una o più facce verniciate.



Questo quesito viene assegnato senza modificare l'originale. Si chiede di immaginare e contare, aiutandosi con il modello reale…

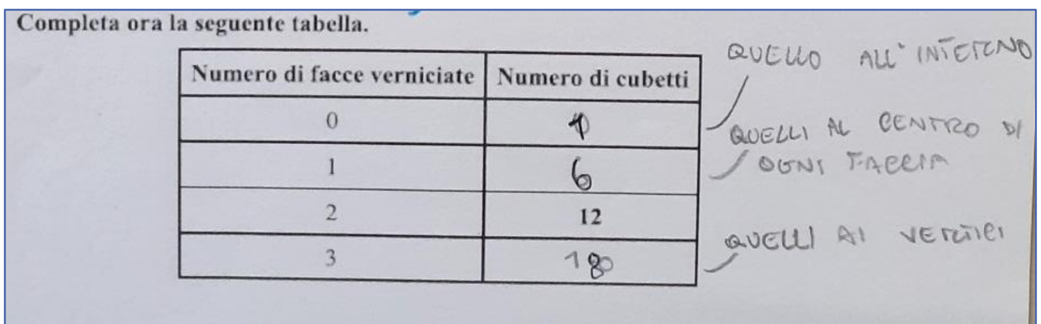
Completa ora la seguente tabella.

Numero di facce verniciate	Numero di cubetti
0	
1	
2	12
3	



Ragioniamo con il solido tridimensionale e con il cubo di Rubik!

Ai ragazzi è stato chiesto di provare a risolvere il quesito, prima solo osservando il solido composto, poi smontando e andando a contare le facce per fare eventuali correzioni o per completare.



Completa ora la seguente tabella.

Numero di facce verniciate	Numero di cubetti
0	1
1	6
2	12
3	18

QUELLO ALL'INTERNO

QUELLI AL CENTRO DI OGNI FACCIA

QUELLI AI VERTICI

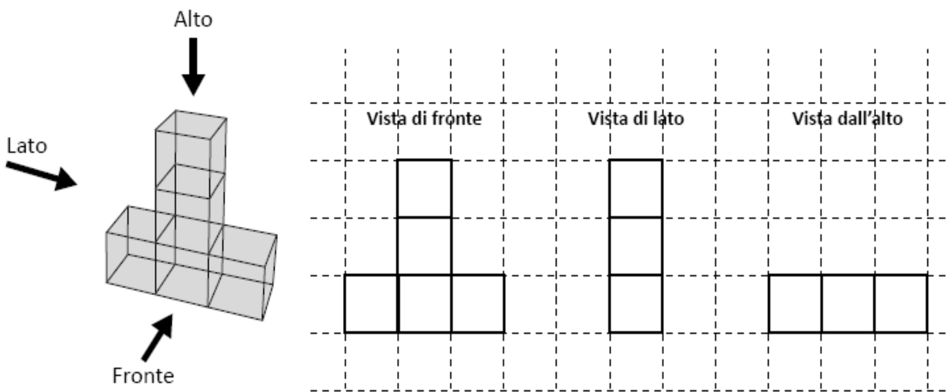
Un gruppo abbastanza numeroso ha completato correttamente tutta la tabella. Diversi ragazzi, però, hanno avuto difficoltà e hanno dovuto lavorare direttamente sul cubo tridimensionale, soprattutto per contare i cubetti con facce appartenenti a facce diverse del solido composto. Il cubetto interno è stato sostituito con uno rosa, per far vedere che nessuna delle sue facce risulta esposta.

Quesito 4: Visione di solidi

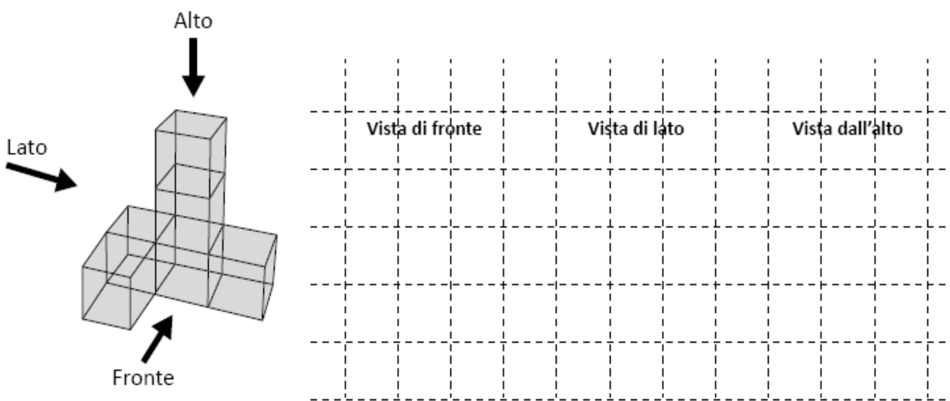
Dalla PN 2016

Maria ha unito dei cubetti di uguale dimensione per formare alcuni solidi.

Prima ha costruito il solido disegnato sotto e sulla quadrettatura a fianco ne ha rappresentato la vista di fronte, di lato e dall'alto.



Poi Maria costruisce il solido che vedi qua sotto. Disegna tu nella quadrettatura la vista di fronte, da uno dei due lati e dall'alto del secondo solido costruito da Maria.



OGNI CUBETTO HA LO SPIGOLO DI 4 cm.

CALCOLA:

- IL VOLUME DI OGNI CUBETTO

  ……………………………………………………………

  ……………………………………………………………

  ……………………………………………………………

- IL VOLUME TOTALE DEL SOLIDO DELLA FIGURA 2

  ……………………………………………………………

  ……………………………………………………………

  ……………………………………………………………

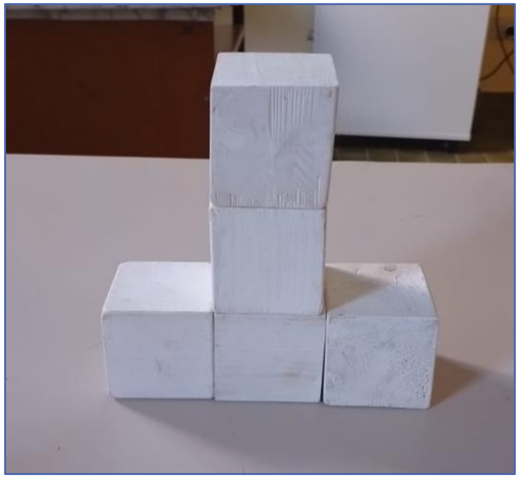
- L'AREA DELLA SUPERFICIE DEL SOLIDO DELLA FIGURA 1

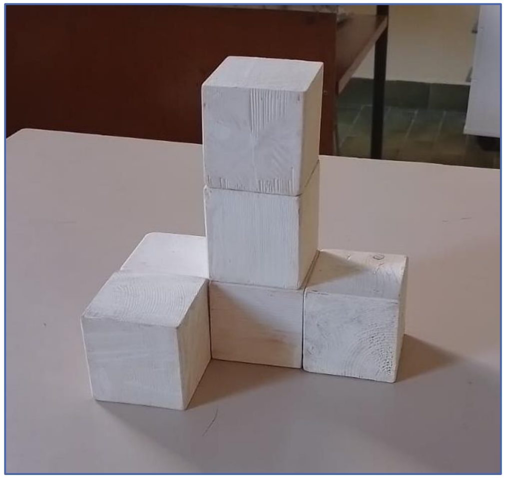
  ……………………………………………………………

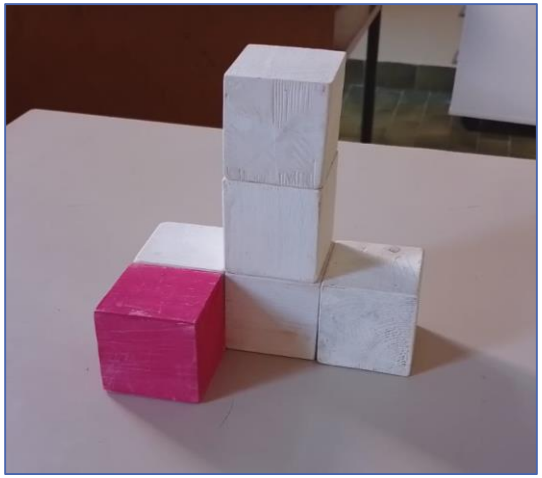
  ……………………………………………………………

  ……………………………………………………………

Un’altra tipologia ricorrente di quesiti Invalsi è quella che propone la visione da più punti di vista di solidi composti.
Anche in questo caso, ci sono ragazzi che non hanno difficoltà ad «immaginare» il solido e a riprodurne la proiezione su diversi piani. Per gli alunni discalculici in particolare, ma anche per altri ragazzi, questo tipo di quesiti risulta invece molto difficile, hanno bisogno di allenare la propria mente iniziando a lavorare con l’osservazione diretta.
Per questo siamo partiti da questo quesito, relativamente semplice, per andare poi a proporre situazioni più complesse in cui sono stati introdotti anche cubetti di colore diverso. Al quesito originale sono state aggiunte richieste relative al calcolo dell’area e del volume, che non hanno creato difficoltà.
La trattazione di questa parte è stata agevolata anche dalla collaborazione con l’insegnante di tecnologia, che nello stesso periodo faceva realizzare disegni di solidi composti utilizzando strumenti tradizionali e programmi di grafica.

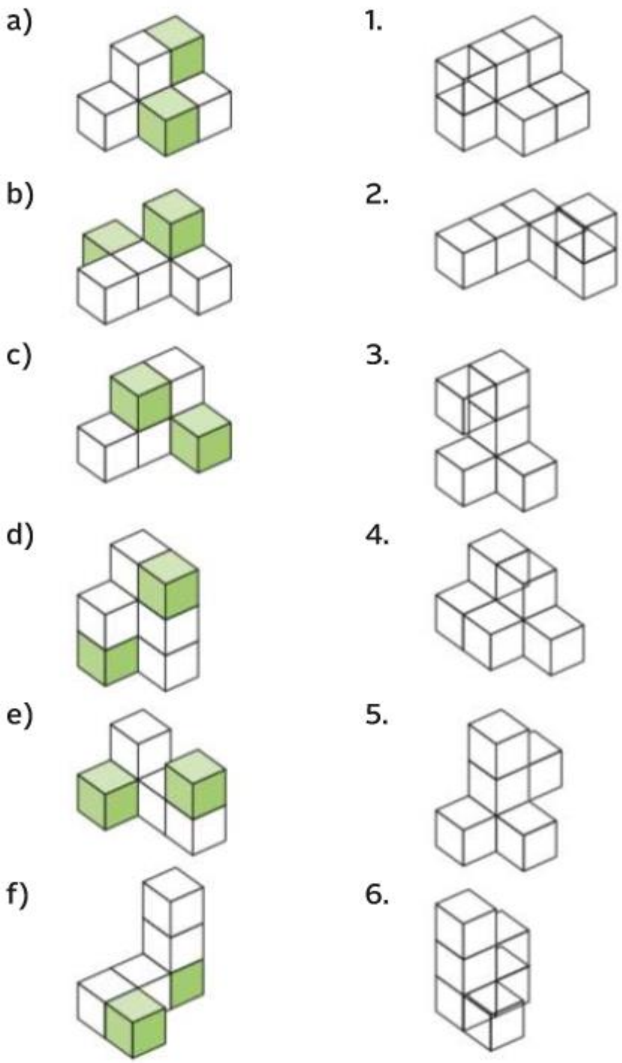






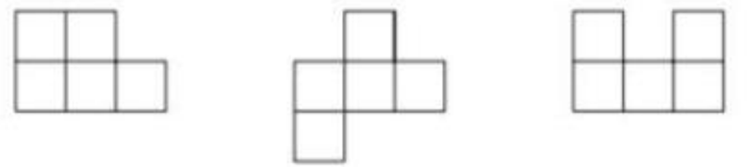
Dal libro «*Contaci!*», Ed. Zanichelli

35 **SFIDA** Nella figura sotto, a ogni solido a destra corrisponde uno dei solidi a sinistra, con qualche cubetto colorato.
Trova le coppie che si corrispondono e colora i cubetti dei solidi bianchi ai posti giusti.

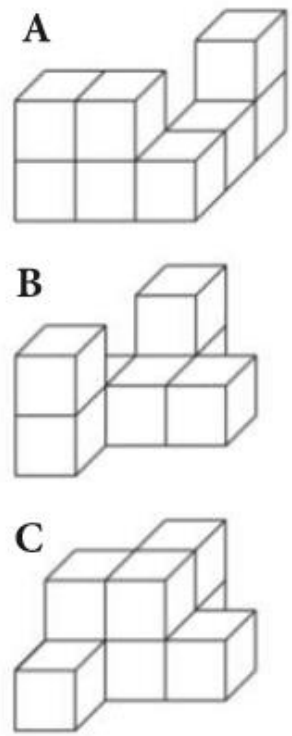


37 Un solido si rappresenta così nelle tre viste:

frontale dall'alto laterale destra



Di quale solido si tratta?



Dopo aver fatto diverse esercitazioni basate sull'osservazione diretta, è stato possibile proporre anche alcuni esercizi piuttosto complessi del libro di testo.

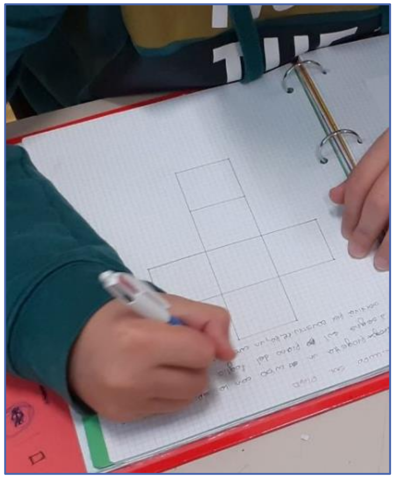
Nel quesito di sinistra i ragazzi hanno individuato facilmente le coppie; più difficile è stato colorare i cubetti verdi. L'altro quesito è risultato abbastanza semplice per la maggior parte dei ragazzi.

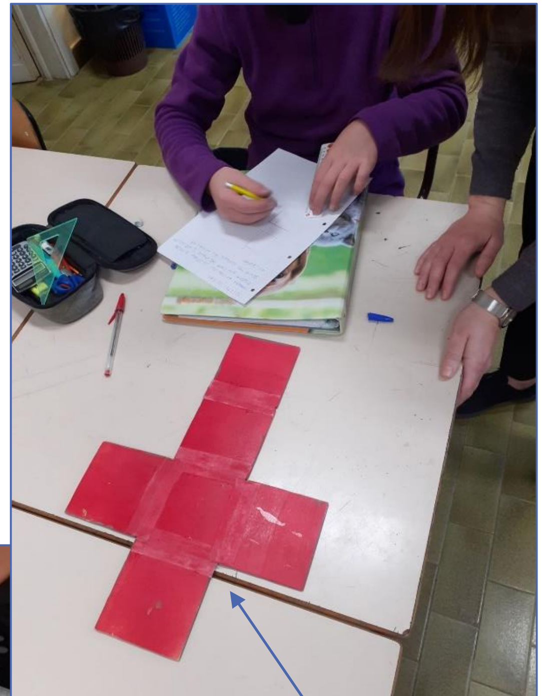
4. ANCORA SUL CUBO: LO SVILUPPO SUL PIANO

Viene ora richiesto di immaginare di aprire il cubo, come fosse una scatola, e di:

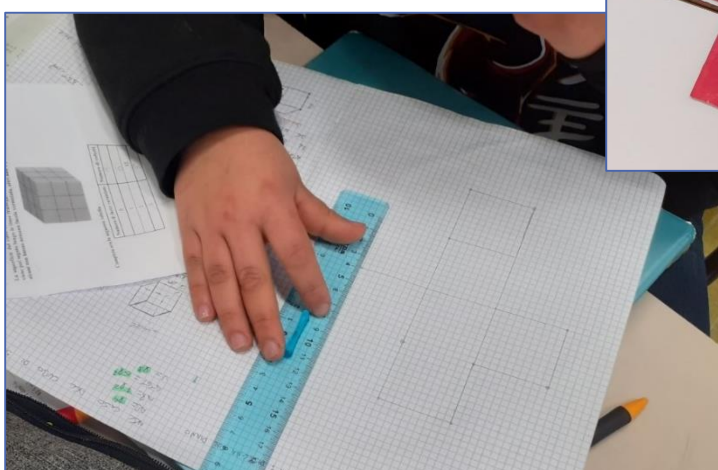
- *disegnare tutte le facce del cubo «aperto» sul foglio di quaderno*.

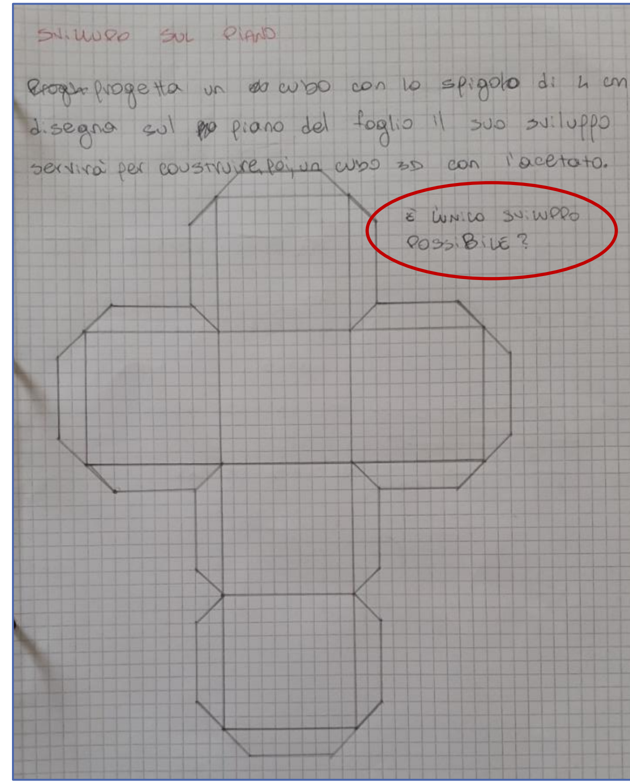
Non vengono fornite altre indicazioni, anche se ai ragazzi DVA viene fornito un modellino di legno che devono limitarsi a riprodurre.





Modellino in legno per gli alunni con DSA o DVA



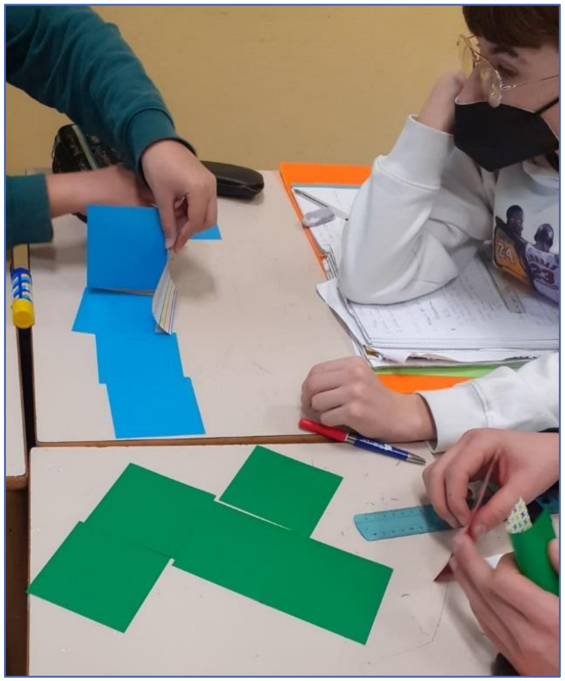


I ragazzi avevano già disegnato lo sviluppo sul piano del cubo a tecnologia, e forse per questo tutti, ma proprio tutti, disegnano lo sviluppo «a croce»

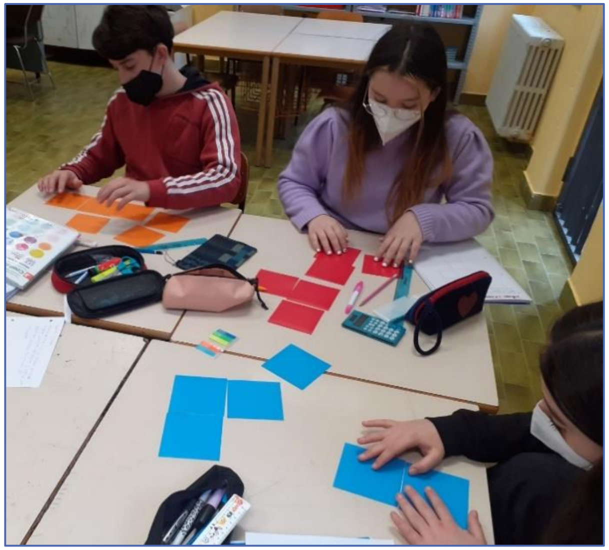
Dopo aver precisato che il disegno di un solido «aperto» si chiama **sviluppo sul piano**, e dopo aver verificato con il modello in legno che la soluzione proposta da tutti i ragazzi è corretta, si chiede:

- *Quello che avete disegnato, è l'unico sviluppo possibile?*

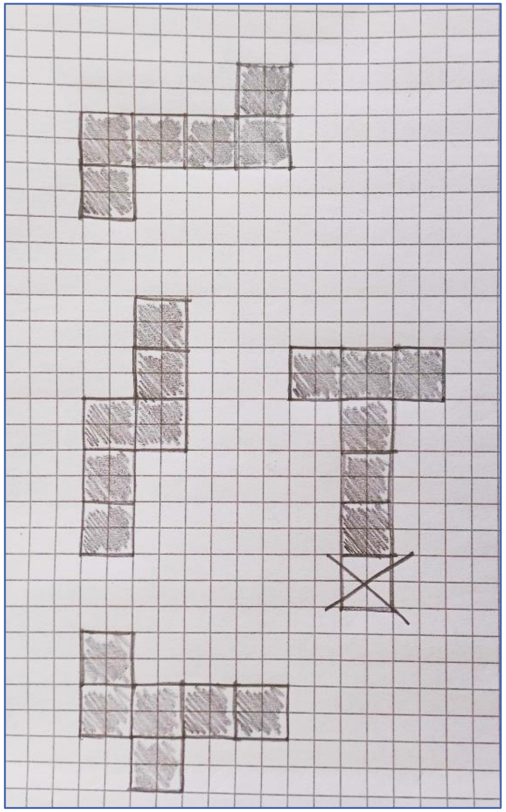
E si distribuiscono dei foglietti quadrati colorati da origami chiedendo di provare a trovare altri sviluppi. In questa fase si suggerisce di lavorare in piccolo gruppo, in modo da poter discutere le soluzioni e provare a verificare che il cubo si chiuda.

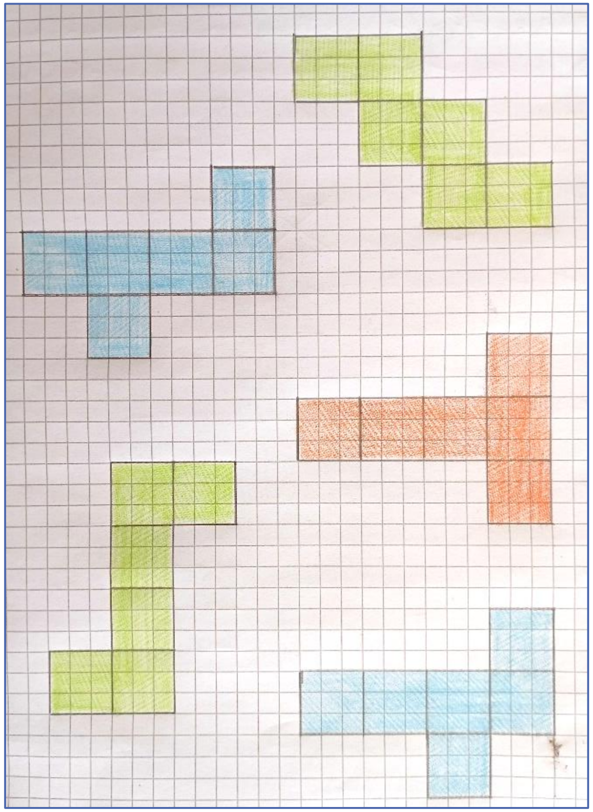


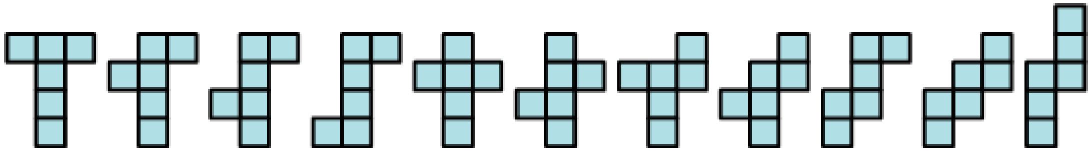
Le soluzioni trovate devono essere riportate sul quaderno, anche facendo disegni piccoli e senza righello.



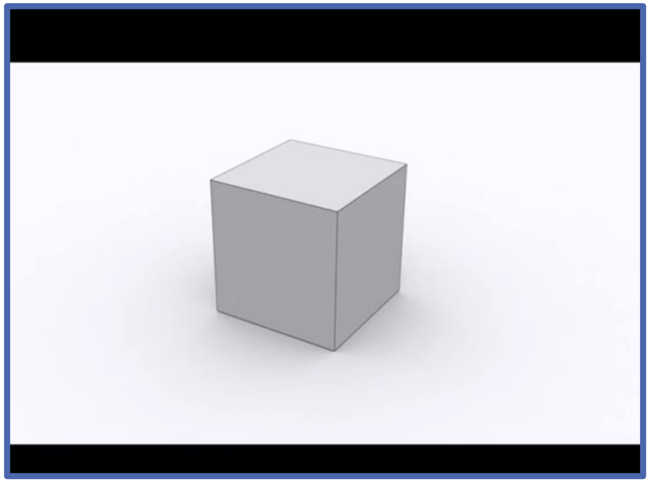
Le soluzioni trovate dai ragazzi, non sempre corrette, sono state confrontate con quelle proposte nel video. Ad ognuno, poi, è stata distribuita la stampa con gli 11 sviluppi del cubo.



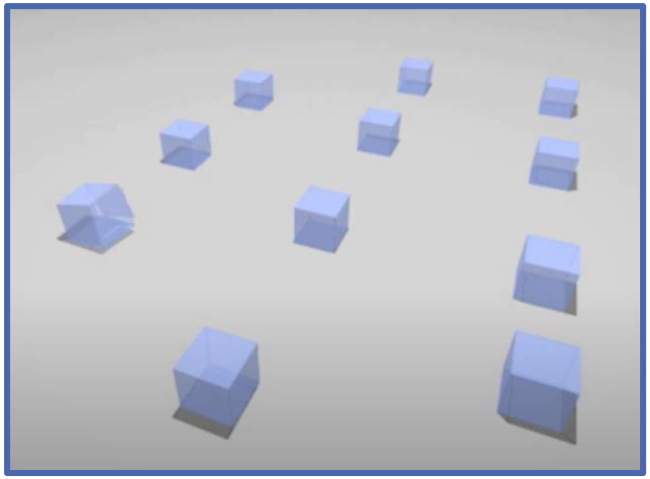




1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11



Video 1

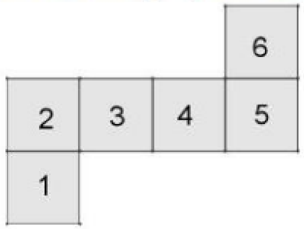


Video 2

Quesiti 5-8: Dadi e sviluppi

PN 2013 – II SECONDARIA – QUESITO D32

La seguente figura rappresenta uno sviluppo piano di un cubo.



Quale tra le seguenti coppie è formata da facce opposte del cubo?

A. ☐ 1 e 4

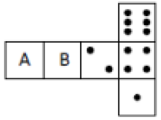
B. ☐ 2 e 5

C. ☐ 3 e 5

D. ☐ 4 e 6

PN 2014 – V PRIMARIA – QUESITO D22

Anna vuole costruire un dado usando forbici, colla e cartoncino. Conosce la regola dei dadi secondo la quale la somma del numero dei pallini delle facce opposte è sempre 7.



Ha già disegnato i pallini su alcune facce.

Quanti pallini deve disegnare sulle facce A e B ?

Faccia A: .... pallini

Faccia B: .... pallini

PN 2009 – QUESITO D13

In un foglio di cartoncino si ritaglia un quadrato di lato 10 cm. Da ogni angolo si ritaglia un quadratino di lato 1 cm (che nella figura 1 vedi più scuro), per poter costruire una scatola ripiegando le strisce laterali.
Qual è la capacità della scatola ottenuta ripiegando le strisce laterali?

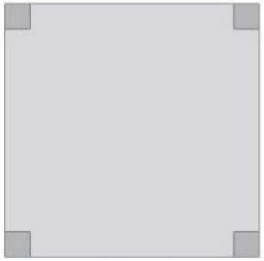


figura 1

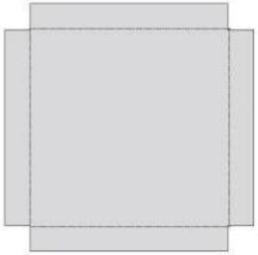


figura 2

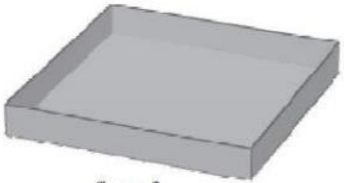


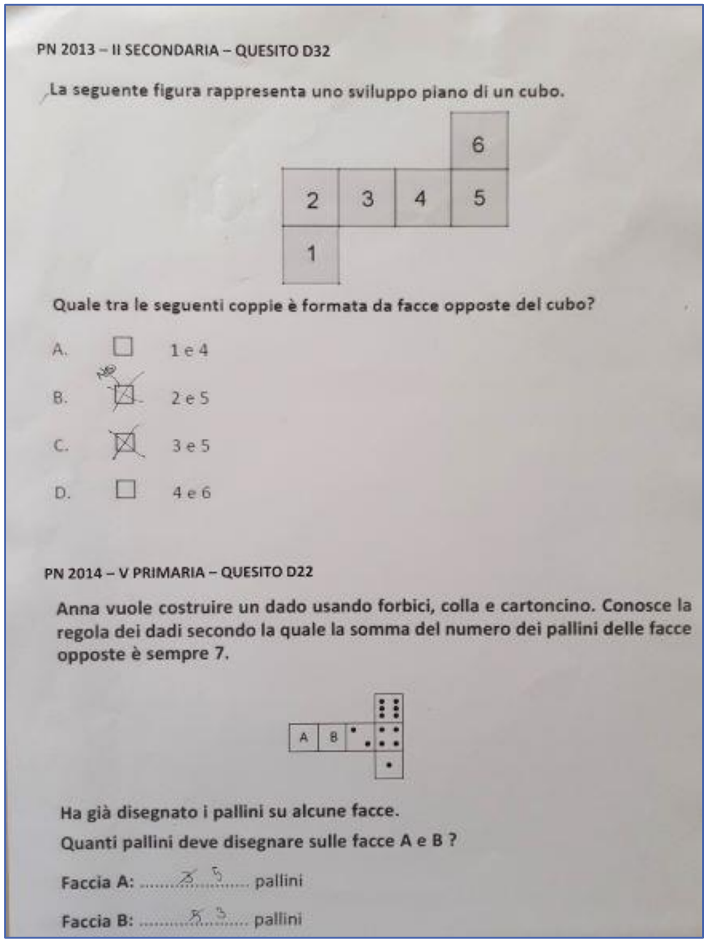
figura 3

PN 2015 – QUESITO D24

Marta confeziona il regalo per un'amica utilizzando una scatola a forma di cubo. Per abbellire la scatola Marta applica su tutte le facce degli adesivi quadrati tutti uguali, disponendoli come in figura.

Quanti adesivi in totale applica Marta sulla scatola?

Per lavorare ancora sugli sviluppi e sulla superficie è stata costruita una scheda di lavoro con quesiti presi dalle prove Invalsi di V primaria, III secondaria di primo grado e II secondaria di secondo grado. I quesiti sui dadi sono stati risolti facilmente da alcuni alunni, ma per altri è risultato più difficile del previsto, come dimostrano le schede riportate sotto e svolte da due ragazzi che non hanno particolari problemi con la matematica:


PN 2013 – II SECONDARIA – QUESITO D32

La seguente figura rappresenta uno sviluppo piano di un cubo.

Quale tra le seguenti coppie è formata da facce opposte del cubo?

A. ☐ 1 e 4

B. ☒ 2 e 5

C. ☒ 3 e 5

D. ☐ 4 e 6

PN 2014 – V PRIMARIA – QUESITO D22

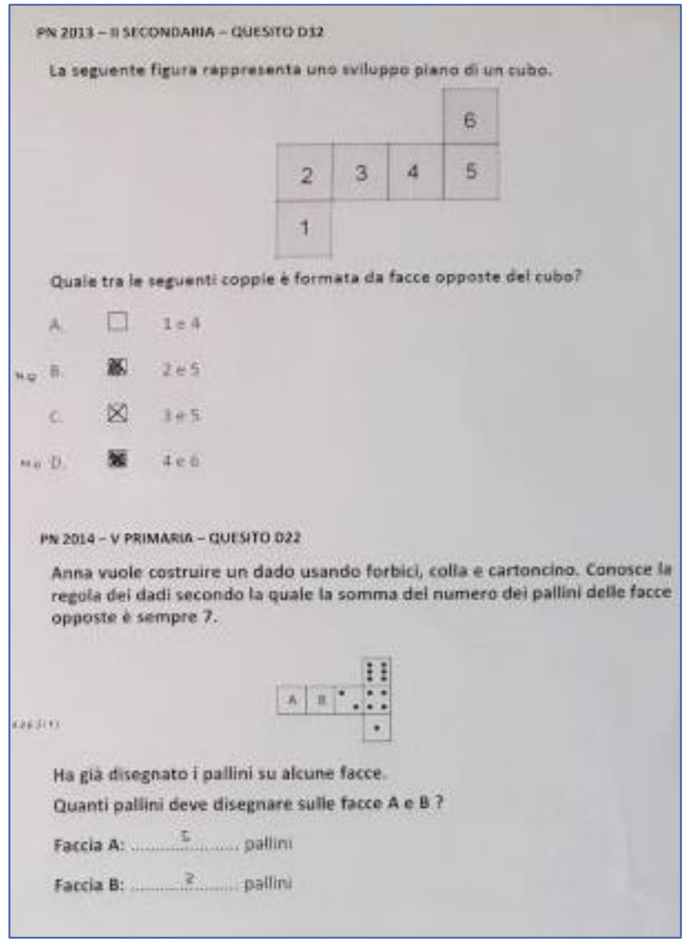
Anna vuole costruire un dado usando forbici, colla e cartoncino. Conosce la regola dei dadi secondo la quale la somma del numero dei pallini delle facce opposte è sempre 7.

Ha già disegnato i pallini su alcune facce.

Quanti pallini deve disegnare sulle facce A e B ?

Faccia A: ...~~3~~ 5... pallini

Faccia B: ...~~5~~ 3... pallini


PN 2013 – II SECONDARIA – QUESITO D32

La seguente figura rappresenta uno sviluppo piano di un cubo.

Quale tra le seguenti coppie è formata da facce opposte del cubo?

A. ☐ 1 e 4

B. ■ 2 e 5

C. ☒ 3 e 5

D. ■ 4 e 6

PN 2014 – V PRIMARIA – QUESITO D22

Anna vuole costruire un dado usando forbici, colla e cartoncino. Conosce la regola dei dadi secondo la quale la somma del numero dei pallini delle facce opposte è sempre 7.

Ha già disegnato i pallini su alcune facce.

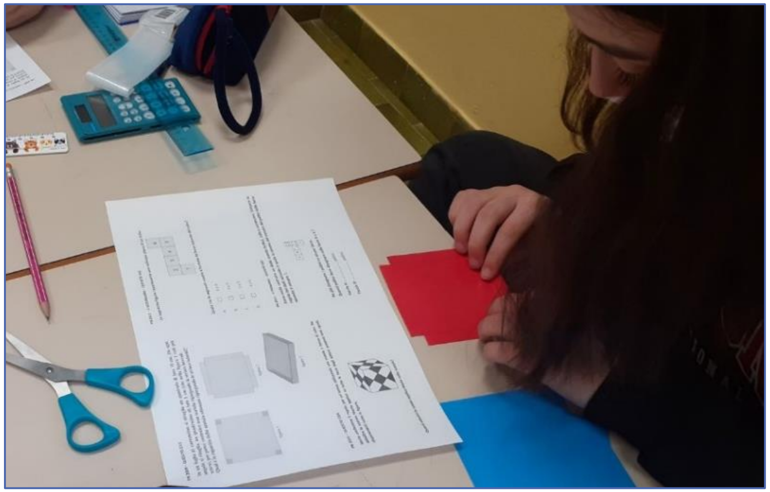
Quanti pallini deve disegnare sulle facce A e B ?

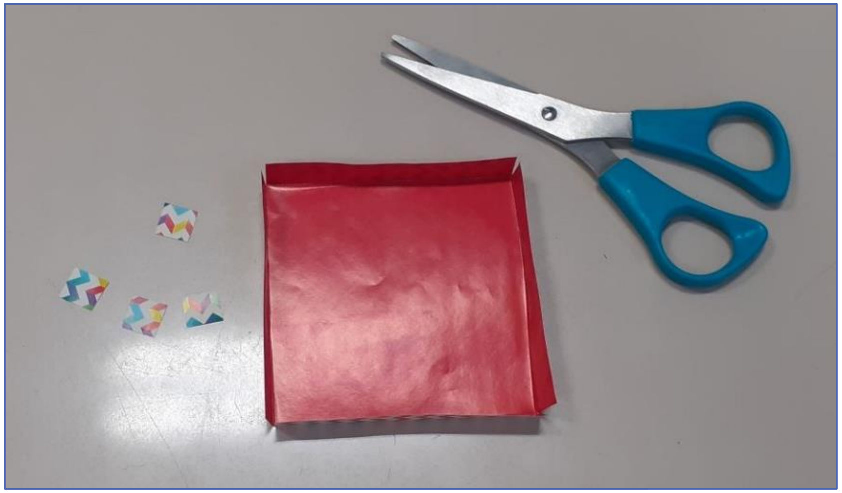
Faccia A: ...5... pallini

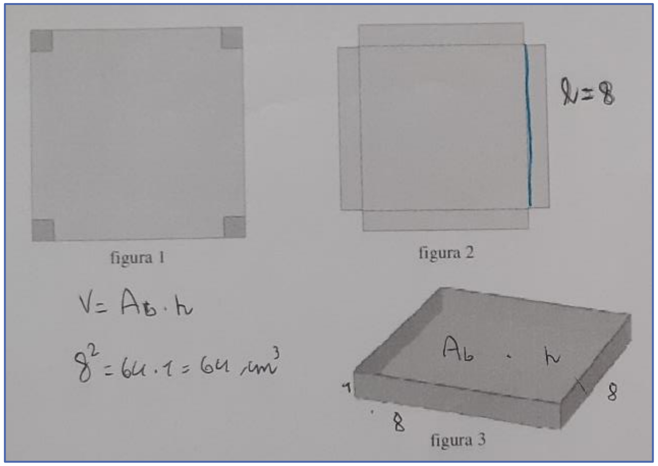
Faccia B: ...2... pallini

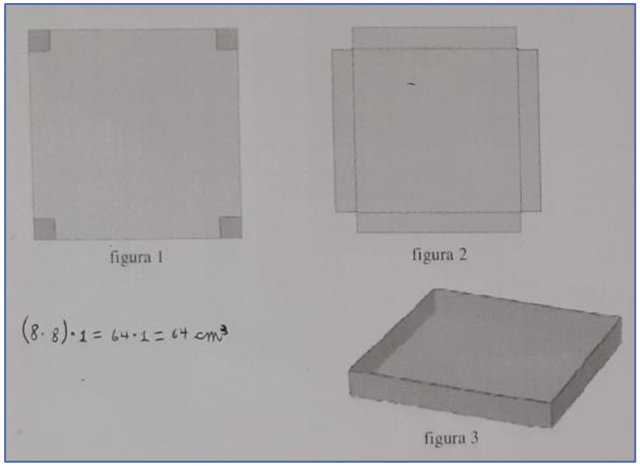
Passare mentalmente dallo sviluppo al solido, e viceversa, non è banale… Per qualcuno è stato necessario lavorare con un cubetto di legno, trasformato in dado.

Per la risoluzione del quesito sugli adesivi sulle facce del cubo, sono state utilizzate diverse tecniche di conteggio, che gli alunni hanno spiegato a voce alla classe.
Il quesito sulla scatolina non è propriamente sullo sviluppo del cubo, ma si riferisce ad un foglietto 10 cm x 10 cm del tipo di quelli che i ragazzi avevano da poco utilizzato, e parte da una figura sul piano per costruire un oggetto tridimensionale.









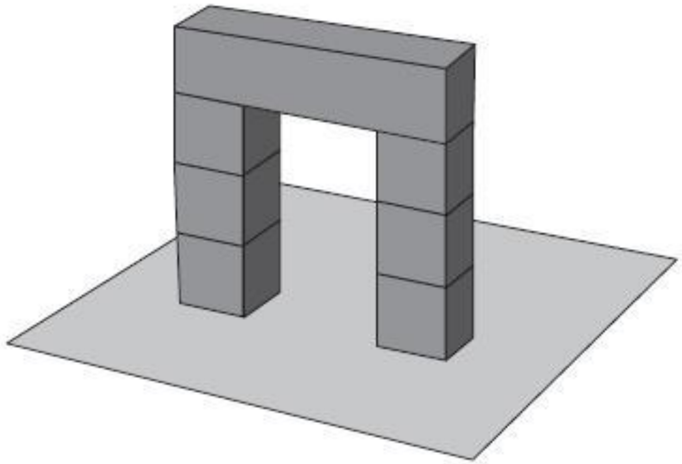
I ragazzi potevano scegliere la strategia risolutiva che preferivano: alcuni hanno ragionato direttamente sul disegno, altri hanno realizzato la scatolina e misurato. Le diverse soluzioni sono state presentate alla classe e discusse.

5. IL PARALLELEPIPEDO E ALTRE SCATOLE

Quesito 9: Cubetti e parallelepipedo

Dalla PN 2012 – L10

L'arco mostrato in figura è formato da sei cubi di lato *L* e da un parallelepipedo di dimensioni *L, L, 4L*.



Si vuole dipingere l'arco; quanto misura la superficie da colorare?

A. $42L^2$

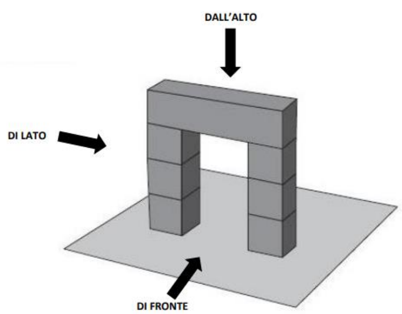
B. $40L^2$

C. $38L^2$

D. $36L^2$

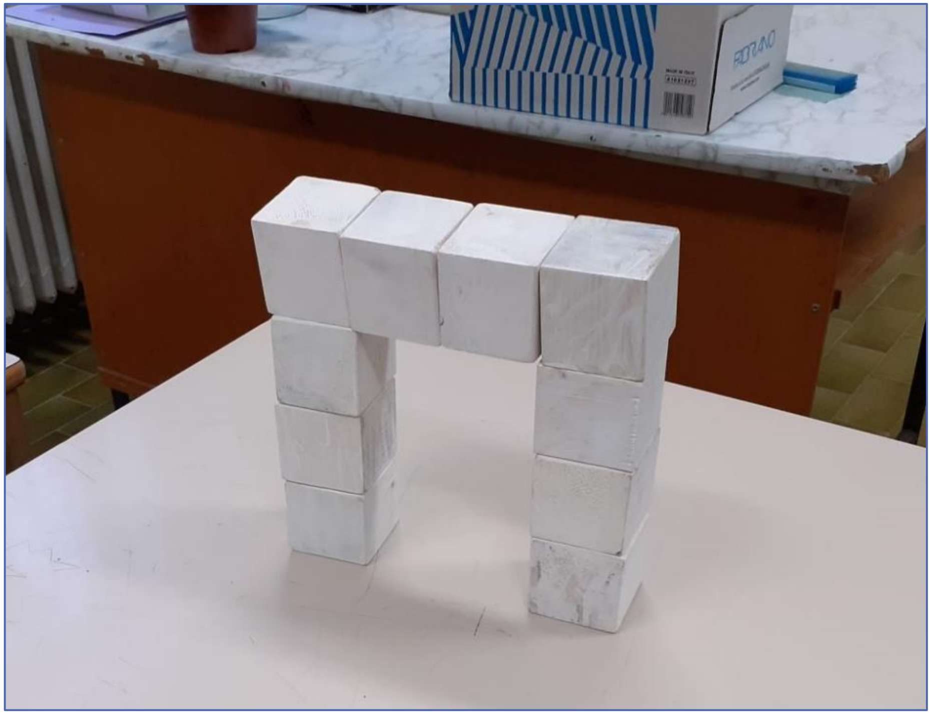
Si tolgono le opzioni sull'area della superficie e si chiede il disegno del solido, da diversi punti di vista e in scala

L'arco in figura è formato da sei cubi di lato L e da un parallelepipedo di dimensioni L, L, 4L.

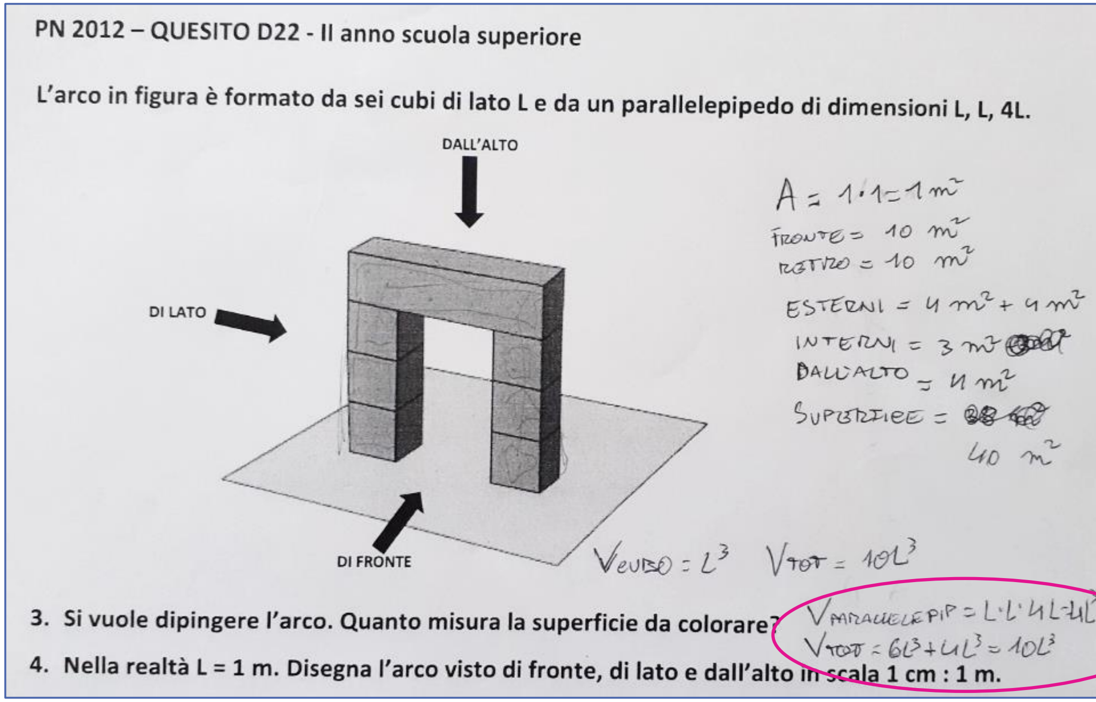


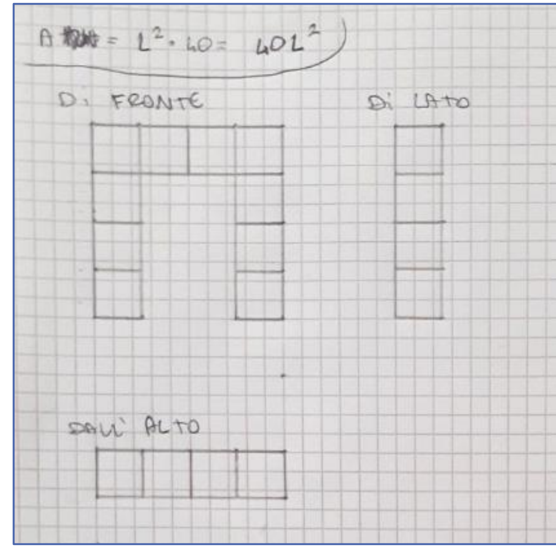
1. **Si vuole dipingere l'arco. Quanto misura la superficie da colorare?**
2. **Nella realtà L = 1 m. Disegna l'arco visto di fronte, di lato e dall'alto in scala 1 cm : 1 m.**

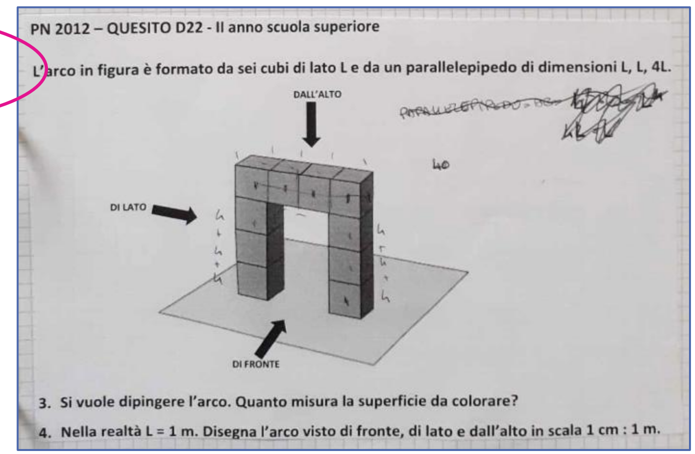
Per andare oltre il cubo e introdurre il parallelepipedo, su cui comunque i ragazzi avevano lavorato in modo pratico nel percorso sul volume, si propone un quesito Invalsi somministrato ad una seconda classe della scuola secondaria di secondo grado. Questo è stato modificato in modo da consolidare e ripassare quanto appreso fino ad ora: calcolo di superficie e volume, disegno e rappresentazione in scala. Come per gli altri quesiti, si realizza il modello tridimensionale.

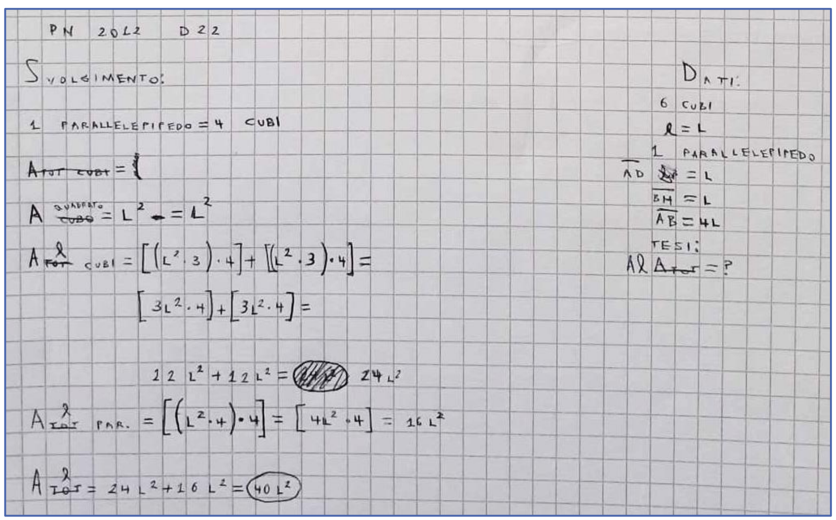


Non avendo parallelepipedi adatti, i ragazzi concordano di sostituire il parallelepipedo con quattro cubetti appoggiati su un righello.









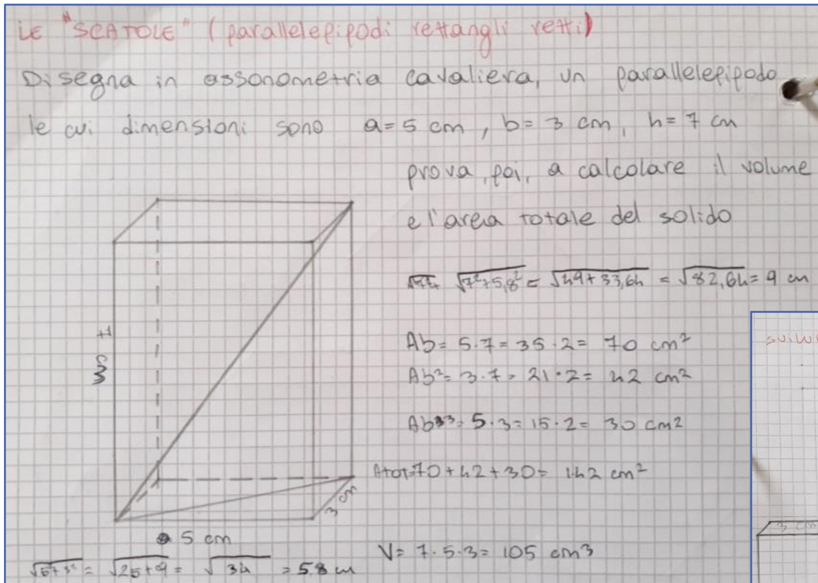
Calcolo e disegno risultano relativamente semplici per la maggior parte degli studenti.

Alcuni hanno avuto bisogno di contare avvicinandosi al modello. Per il calcolo del volume alcuni hanno applicato la formula del volume del parallelepipedo con le lettere, pur non avendo ancora trattato la moltiplicazione algebrica.

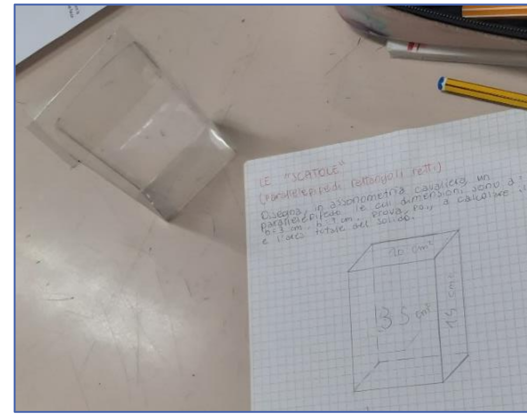
SI CONTINUA CON LE «SCATOLE», OSSIA CON I PARALLELEPIPEDI

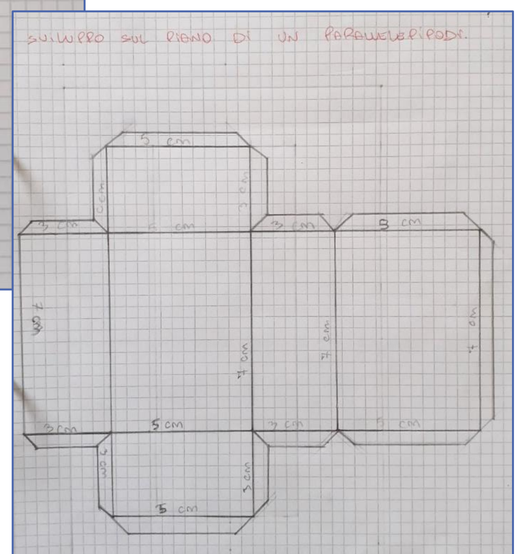
A questo punto si formalizzano le proprietà del parallelepipedo, dopo aver chiesto ai ragazzi di svolgere individualmente un'esercitazione:

- *Disegna un parallelepipedo di dimensioni a = 5 cm, b = 3 cm, h = 7 cm*
- *Prova a calcolare volume e area totale del solido*
- *Disegna lo sviluppo sul piano*

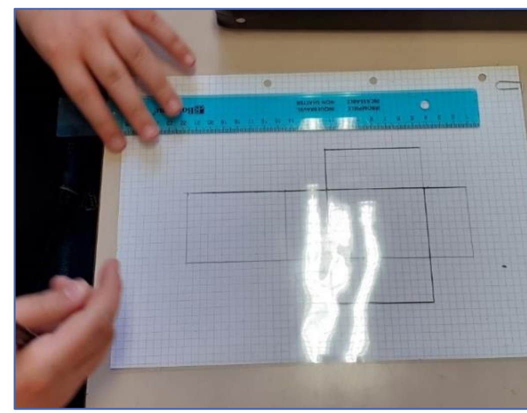


Si calcolano le aree delle superfici sommando le aree dei rettangoli e notando che sono uguali a due a due.





Lo sviluppo sul piano è servito anche per realizzare un modellino tridimensionale in acetato da usare per gli esercizi e per le verifiche.

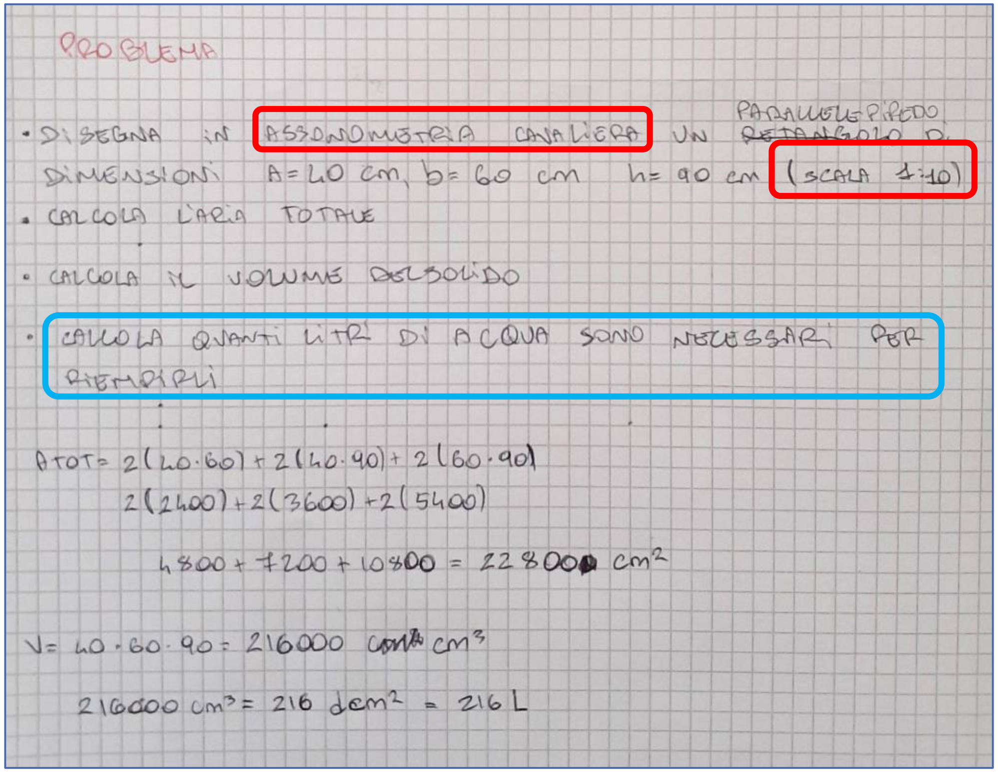


In generale:

V = a · b · c

A = 2 (a · b) + 2 (a · c) + 2 (b · c)

Attraverso un esercizio di consolidamento assegnato a casa, poi, si chiede di prestare un’attenzione particolare alla costruzione geometrica, alla rappresentazione in scala e al calcolo del volume.



PROBLEMA

- DISEGNA IN ASSONOMETRIA CAVALIERA UN PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO DI DIMENSIONI A=40 cm, b=60 cm h=90 cm (SCALA 1:10)
- CALCOLA L'AREA TOTALE
- CALCOLA IL VOLUME DEL SOLIDO
- CALCOLA QUANTI LITRI DI ACQUA SONO NECESSARI PER RIEMPIRLI

$A_{TOT} = 2(40 \cdot 60) + 2(40 \cdot 90) + 2(60 \cdot 90)$

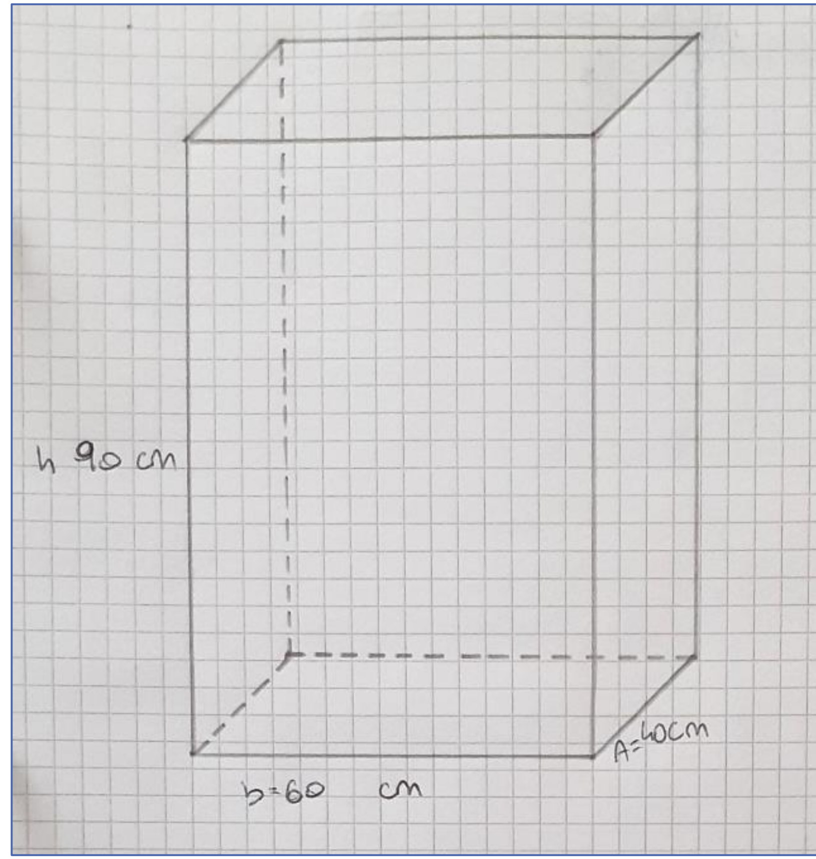
$2(2400) + 2(3600) + 2(5400)$

$4800 + 7200 + 10800 = 22800\ cm^2$

$V = 40 \cdot 60 \cdot 90 = 216000\ cm^3$

$216000\ cm^3 = 216\ dm^2 = 216\ L$

Si chiede anche di esprimere il volume in litri con l’opportuna equivalenza.



Successivamente, anche in preparazione al compito dell’esame di Stato conclusivo, verranno introdotti anche il peso, già trattato attraverso il percorso sulle forze, e il concetto di peso specifico, che invece non è stato possibile approfondire con un percorso dedicato.

I solidi incontrati fino a questo punto erano già stati trattati, e quindi noti agli alunni. E’ il momento di ampliare la trattazione introducendo gli altri solidi geometrici.

6. CLASSIFICHIAMO I SOLIDI

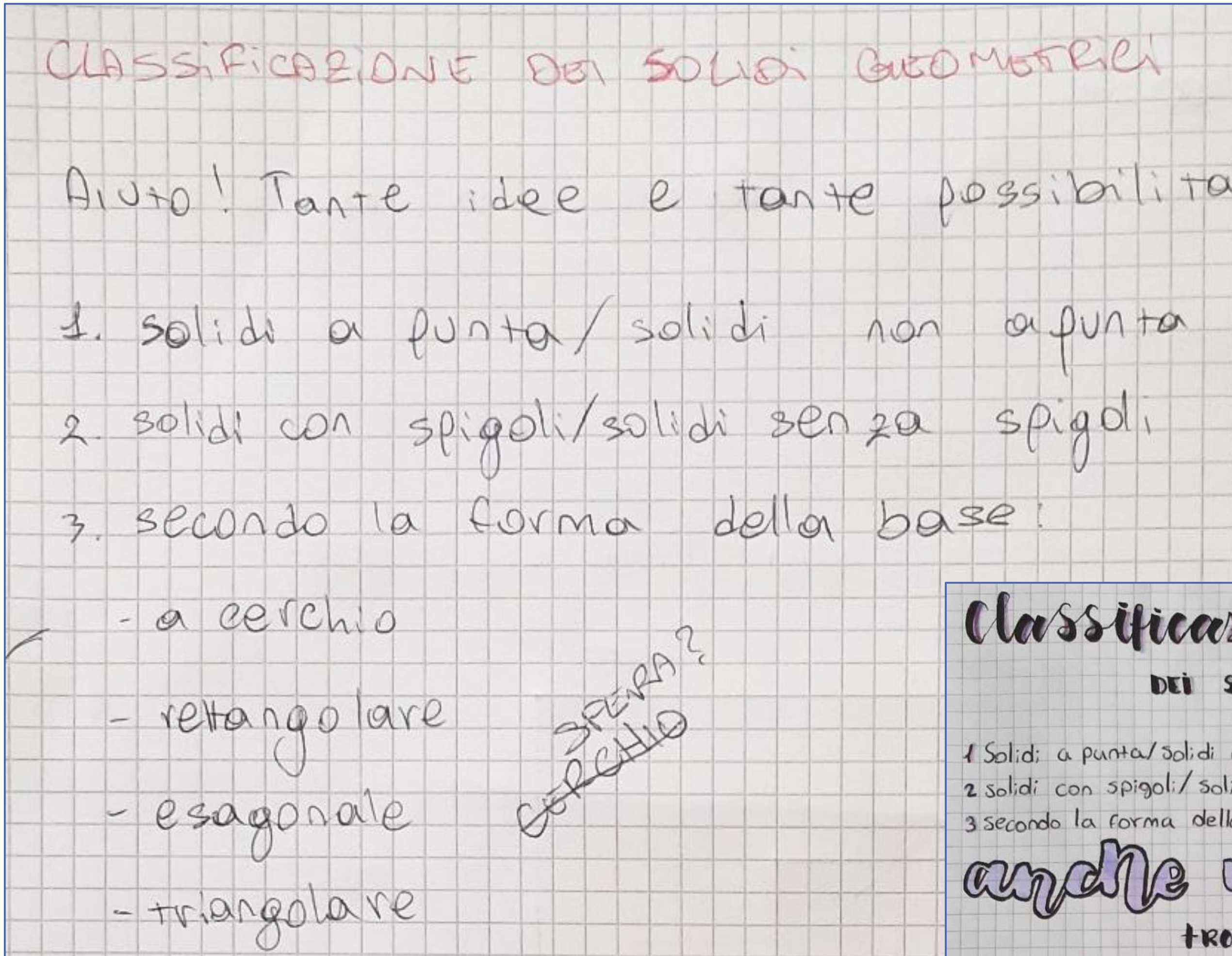
Prima di ampliare e di tornare ai quesiti Invalsi…

Utilizzando solidi geometrici vari, i ragazzi si confrontano ed elaborano delle proposte di classificazione, esplicitando i criteri seguiti.

A PUNTA **NON A PUNTA**

CON IL CERCHIO **CON I POLIGONI**

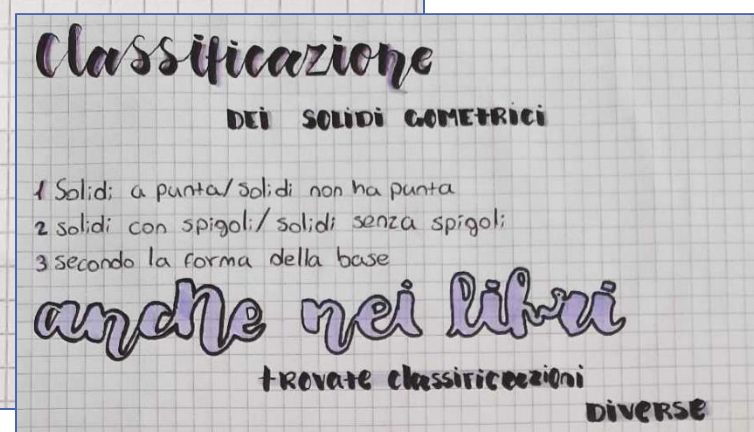
Nella discussione collettiva ogni alunno, o gruppo di alunni, spiega agli altri come ha pensato di classificare i solidi secondo un criterio logico.
Si precisa che, purché i criteri siano sensati e coerenti, tutte le classificazioni sono corrette. Anche nei libri di testo, infatti, si trovano proposte diverse.


CLASSIFICAZIONE DEI SOLIDI GEOMETRICI

Aiuto! Tante idee e tante possibilità

1. solidi a punta / solidi non a punta
2. solidi con spigoli/solidi senza spigoli
3. secondo la forma della base:
- a cerchio
- rettangolare
- esagonale
- triangolare

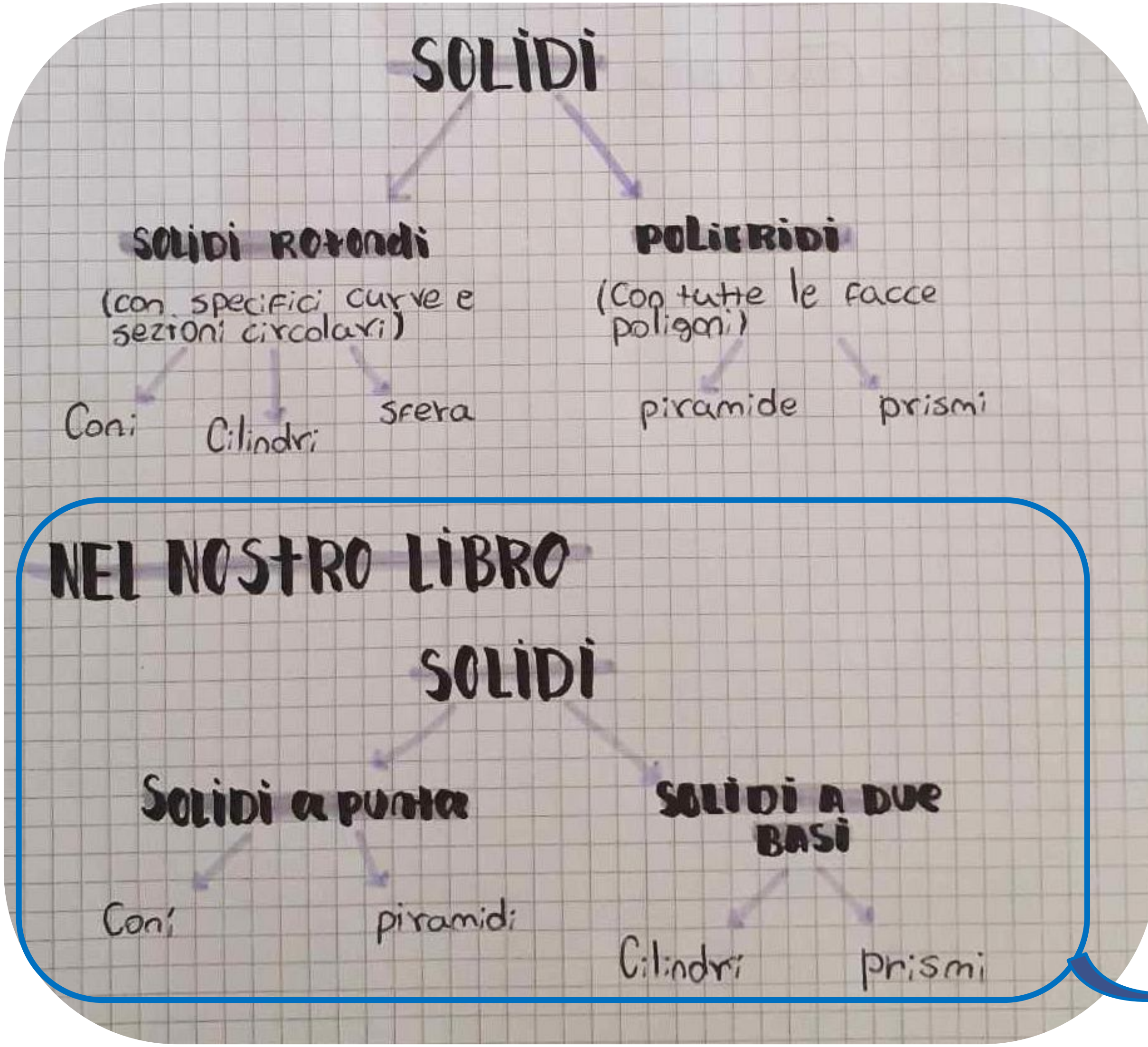
SFERA?
CERCHIO

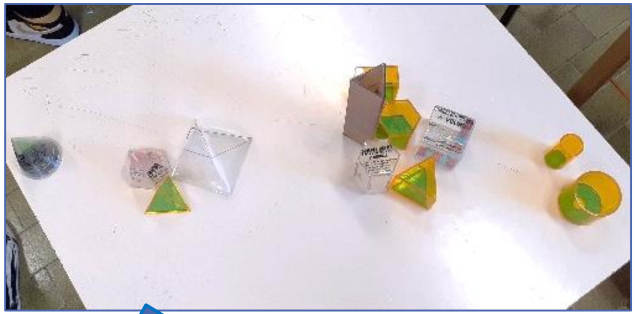

Classificazione
DEI SOLIDI GOMETRICI

1 Solidi a punta/solidi non ha punta
2 solidi con spigoli/ solidi senza spigoli
3 secondo la forma della base

anche nei libri
trovate classificazioni
diverse

Vediamo insieme quelle più frequenti e schematizziamo sul quaderno:

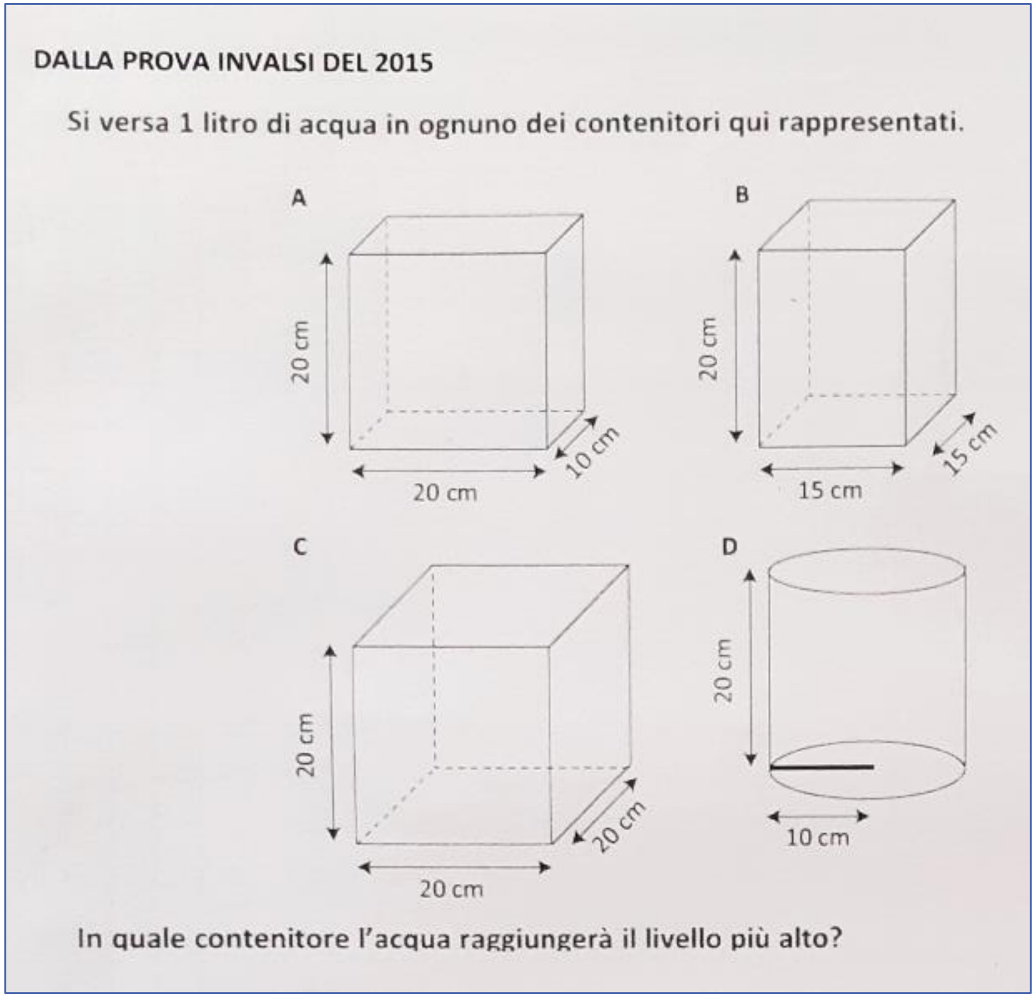




Questa è la classificazione presente nel nostro libro di testo

7. RIEMPIAMO I SOLIDI A DUE BASI

Quesito 10: recipienti, volumi e capacità


DALLA PROVA INVALSI DEL 2015

Si versa 1 litro di acqua in ognuno dei contenitori qui rappresentati.

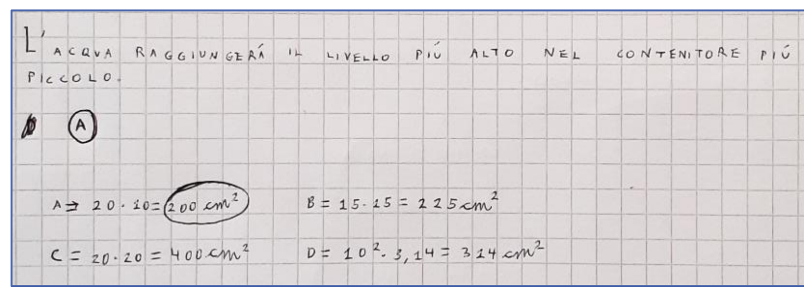
In quale contenitore l'acqua raggiungerà il livello più alto?

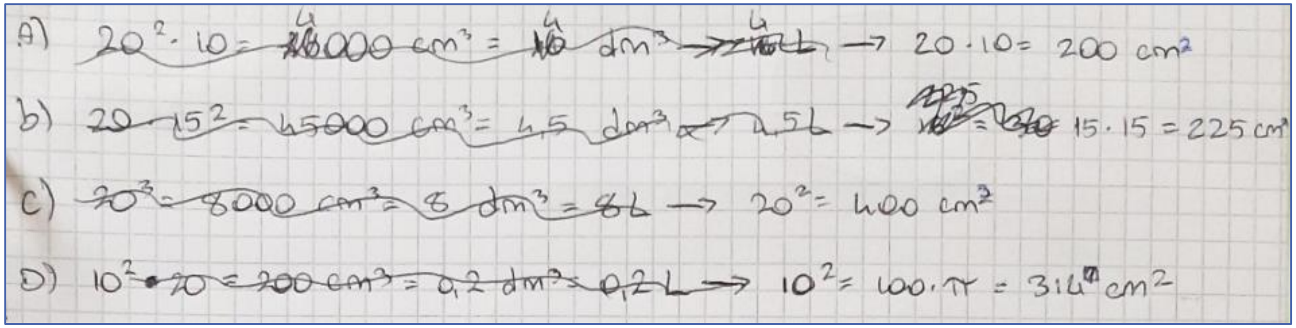
Dopo aver introdotto la classificazione essenziale dei solidi geometrici, si passa a lavorare sui solidi a due basi, di cui i cilindri rappresentano solo il caso particolare con base circolare.

Viene assegnato questo quesito, senza modificarlo, in cui si richiede unicamente di dire dove, a parità di quantità di liquido versato, questo raggiunge il livello più alto.

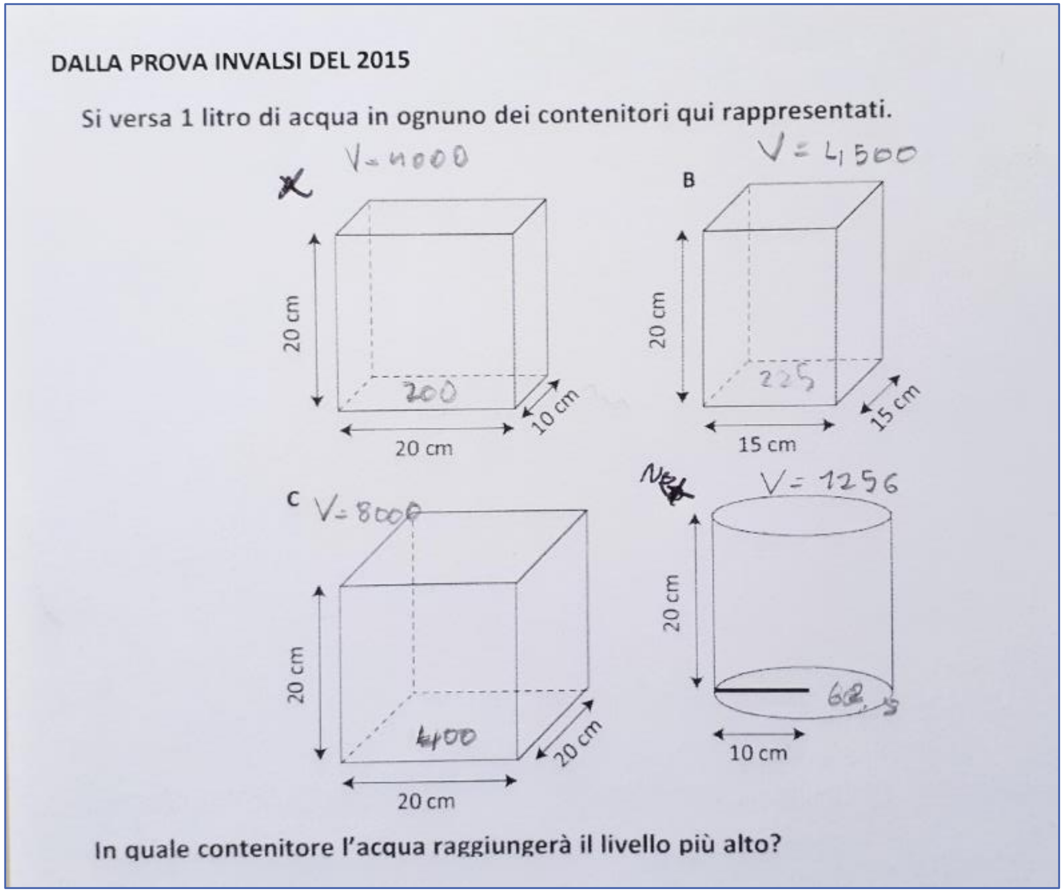
Nel percorso su volume e capacità avevamo già visto che nei travasi il volume del liquido si conserva, e che l'altezza raggiunta dal liquido sarà tanto maggiore quanto «più piccola» è la base.

Molti ragazzi, infatti, risolvono correttamente calcolando l'area della superficie di base:



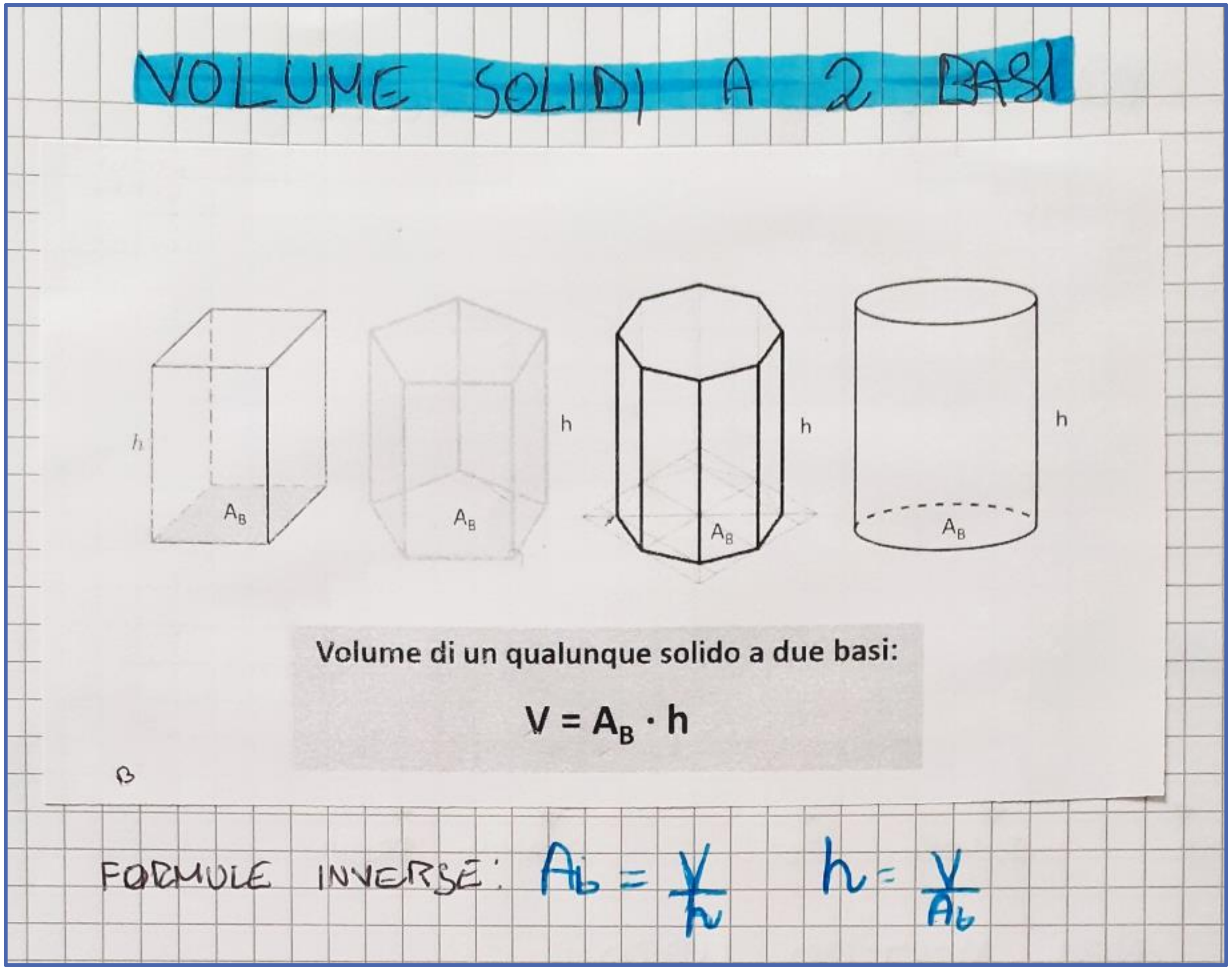


Altri calcolano il volume del recipiente, sbagliando quello del cilindro su cui non abbiamo ancora ragionato.



Probabilmente non hanno interpretato correttamente la domanda e, come spesso succede, hanno calcolato la quantità che i dati del testo consentivano di calcolare, senza preoccuparsi che questa corrispondesse alla richiesta.

Generalizziamo:



Dal momento che la formula per calcolare il volume era comunque venuta fuori nella discussione collettiva del quesito, si generalizza e si concettualizza per tutti i solidi a due basi, specificando che, a seconda della forma della base, si dovrà scegliere la giusta formula dell'area della figura piana (quadrato, rettangolo, poligono regolare, cerchio, …).
Si ricavano facilmente, insieme, anche le formule inverse.

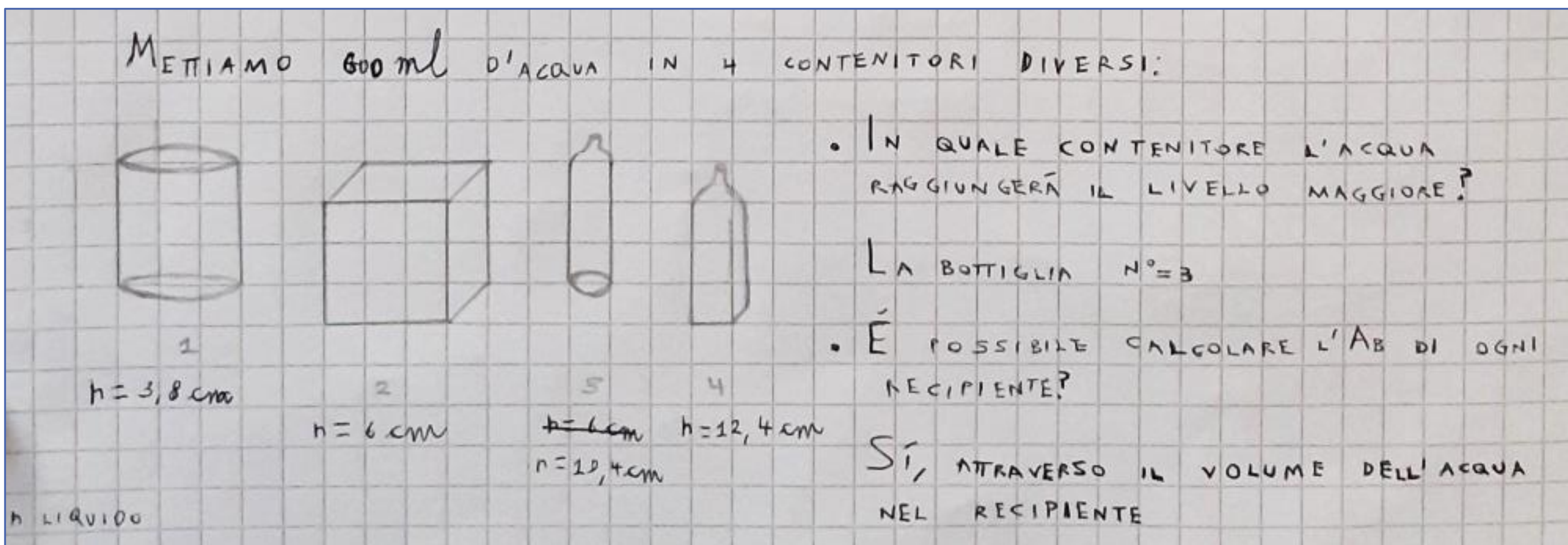
Per casa, dopo aver ricavato le formule, si chiede di:

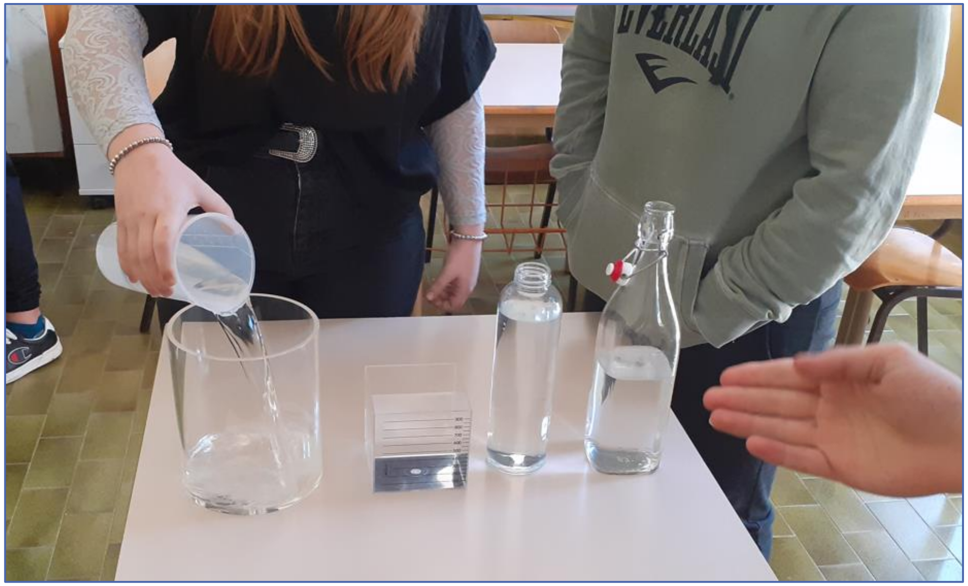
- *Calcolare il livello raggiunto dal liquido in ogni contenitore dell'esercizio della prova Invalsi del 2015*

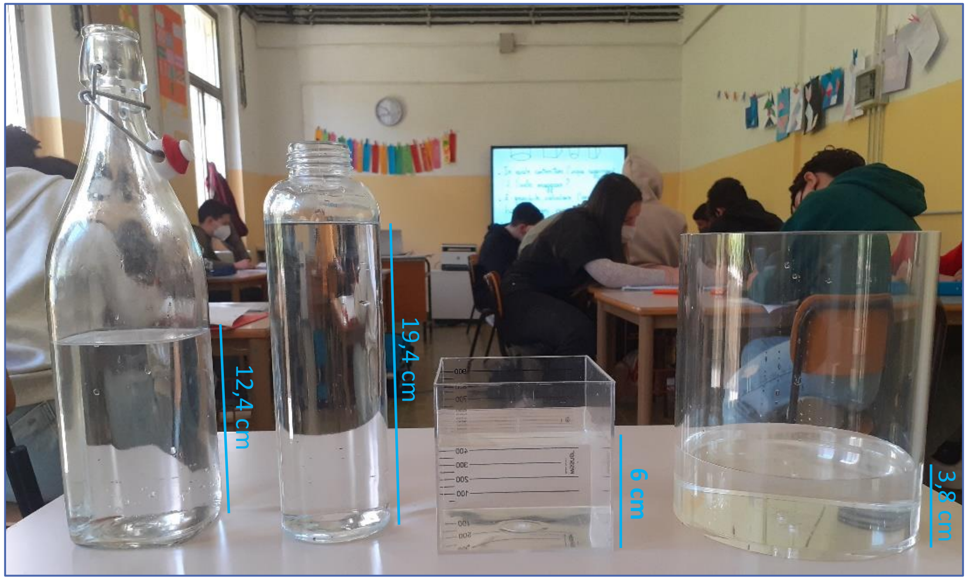
Il quesito appena affrontato merita di essere verificato sperimentalmente con recipienti di forma diversa:

Versiamo 600 ml in ogni contenitore (la quantità è stata scelta in base alla capacità del recipiente più piccolo):

- *In quale contenitore l'acqua raggiungerà il livello maggiore?*







Attraverso l'osservazione diretta, anche i più scettici si convincono che il livello massimo si raggiunge nel contenitore «con la base più piccola».
Il volume si conosce; per calcolare l'area della superficie di base dobbiamo misurare l'altezza raggiunta dal liquido e applicare la formula inversa!

$$V = 600 \text{ ml} = 600 \text{ cm}^3$$

$A_1 = 600 \text{ cm}^3 : 12{,}4 \text{ cm} = 48{,}39 \text{ cm}^2$

$A_2 = 600 \text{ cm}^3 : 19{,}4 \text{ cm} = 30{,}93 \text{ cm}^2$

$A_3 = 600 \text{ cm}^3 : 6 \text{ cm} = 100 \text{ cm}^2$ → Base del decimetro cubo!

$A_4 = 600 \text{ cm}^3 : 3{,}8 \text{ cm} = 157{,}89 \text{ cm}^2$

8. IL CILINDRO: VOLUME, SVILUPPO, SOLIDI DI ROTAZIONE

Quesiti 11 e 12: continuiamo con i cilindri

Dalla PN 2012

E8. Per scavare le gallerie di una linea della metropolitana si fa uso di una macchina cilindrica che sposta la terra, come quella che vedi in figura. La galleria che la macchina riesce a scavare ha un diametro di 6,80 m. Oggi la macchina ha scavato un tratto lungo 10 metri.

a. Il volume di terra che è stato rimosso è

~~A. ☐ circa 70 m^3~~

~~B. ☐ circa 120 m^3~~

~~C. ☐ circa 360 m^3~~

~~D. ☐ circa 470 m^3~~

b. Ieri la macchina ha spostato circa 250 m^3 di terra. ~~La densità della terra spostata è circa 1 800 kg/m^3~~. Quanto pesa la terra che la macchina ha spostato ieri?

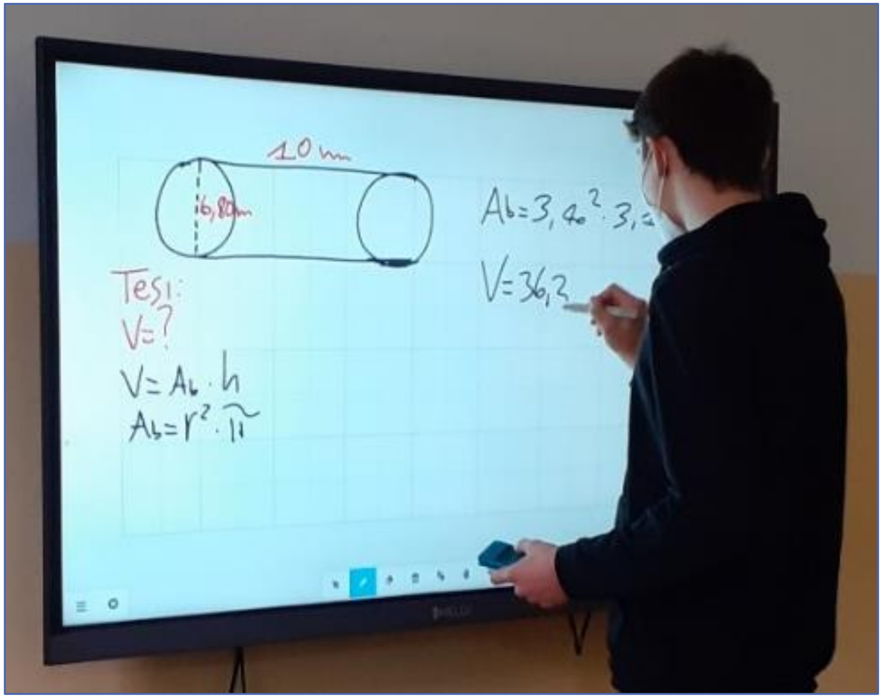
Risposta: circa .... kg

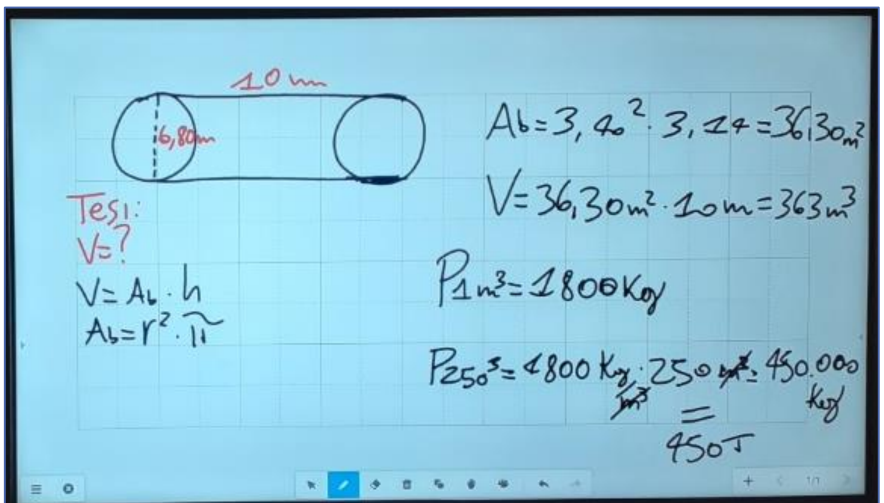
Si approfondisce ora la trattazione dei cilindri, sempre partendo da un quesito Invalsi collegato ad una situazione di realtà. Ancora una volta il quesito viene modificato togliendo le quattro opzioni e si riformula la seconda parte in modo da poter usare il risultato per definire il peso specifico.

a. Qual è il volume di terra che è stato rimosso dalla macchina?

b. Ieri la macchina ha spostato circa 250 m^3 di terra. Ogni m^3 di terra pesa 1800 Kg. Quanto pesa la terra che la macchina ha spostato ieri?

Si preferirà parlare di peso specifico, anziché di densità, coerentemente con i percorsi del CIDI a cui si fa riferimento per la programmazione di scienze.





Il quesito non risulta di immediata comprensione per tutti, e diversi alunni non riescono a risolvere individualmente il problema. L'aspetto concettualmente più difficile è capire che la lunghezza della galleria scavata, che non corrisponde alla lunghezza della macchina, è l'altezza del cilindro di terra.
Il funzionamento della macchina viene spiegato perfettamente da un alunno in fase di correzione e discussione collettiva.
La risoluzione del problema viene commentata in ogni suo passaggio.

Partendo dal dato: «ogni m^3 di terra pesa 1800 Kg», si definisce **il peso specifico come il peso del volume unitario**, e si scrivono le unità di misura più utilizzate:
Kg/m^3 e g/cm^3
Si ricavano anche le formule inverse, che nel problema vengono utilizzate in modo istintivo, ragionando sulle quantità reali.

Seguono esercizi di consolidamento sul volume del cilindro e sul peso specifico presi dal libro di testo, che per brevità non vengono riportati.

Dalla PN 2021

D11. **Un barattolo di pelati da 0,4 kg è alto 11 cm e ha la base di 6 cm di diametro. Qual è il volume del barattolo?**

- ☐ A. ~~Circa 100 cm^3~~
- ☐ B. ~~Circa 200 cm^3~~
- ☐ C. ~~Circa 300 cm^3~~
- ☐ D. ~~Circa 400 cm^3~~

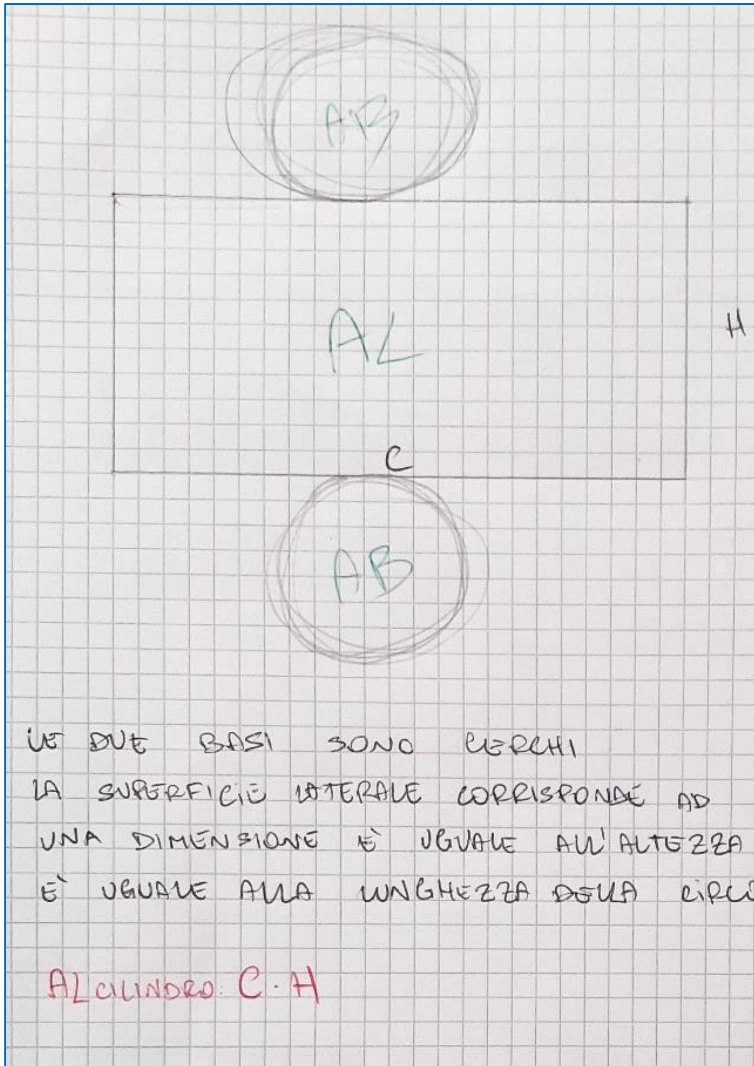
- **Quanto pesa ogni cm^3 di polpa di pomodoro?**
- **Disegna, a grandezza reale, l'etichetta del barattolo.**

Si propone ora un altro quesito Invalsi, modificato in modo da lavorare ancora su volume e peso specifico, ma soprattutto per ingrodurre l'area della superficie del cilindro.

Vengono forniti dei barattoli di pomodoro del tipo di quelli del quesito con cui soprattutto i ragazzi con maggiori difficoltà nel ragionamento, possono verificare che l'etichetta ha forma rettangolare.

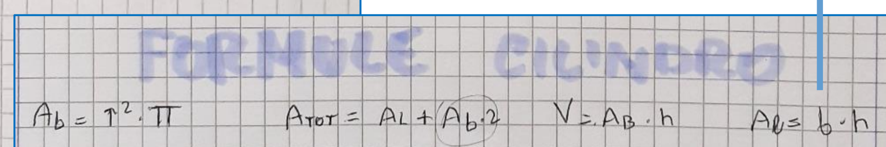
Si chiede:

- *E’ possibile sviluppare completamente la superficie di un cilindro sul piano?*
- *Se sì, come si calcola l’area totale della superifice?*



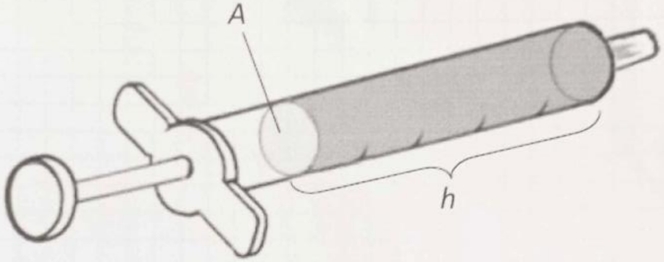
In modo piuttosto agevole si ricavano lo sviluppo sul piano del cilindro e le formule per calcolare l’area delle superfici.

b = C



Quesito 13

PN 2014 – Quesito D24



a. La lunghezza della colonna del liquido contenuto nella siringa è indicata con *h*. Il volume del liquido è *V*. Scrivi la formula che ti permette di calcolare l'area *A* della sezione della siringa conoscendo *h* e *V*.

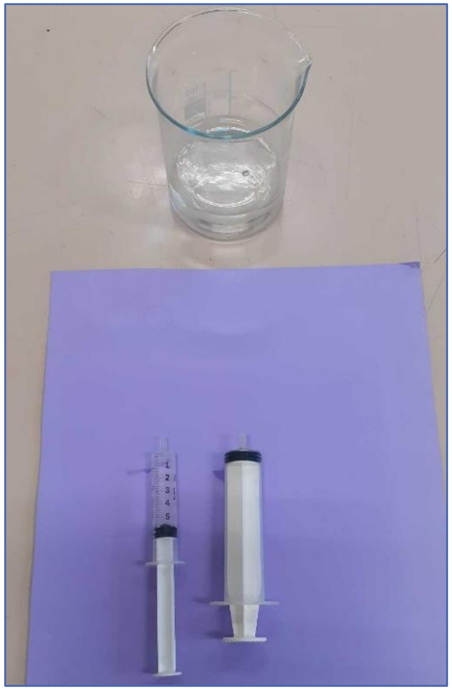
Risposta: $A = \frac{V}{h}$

b. Lo stesso volume *V* di liquido viene messo in una seconda siringa e la lunghezza della colonna di liquido diventa il doppio. L'area della sezione di questa siringa rispetto alla prima è

$V = \frac{A}{2} \cdot h \cdot 2$ (Prova con dei numeri)

Proporzionalità inversa

(all'aumento di h ↑, A diminuisce ↓ ma il prodotto rimane costante

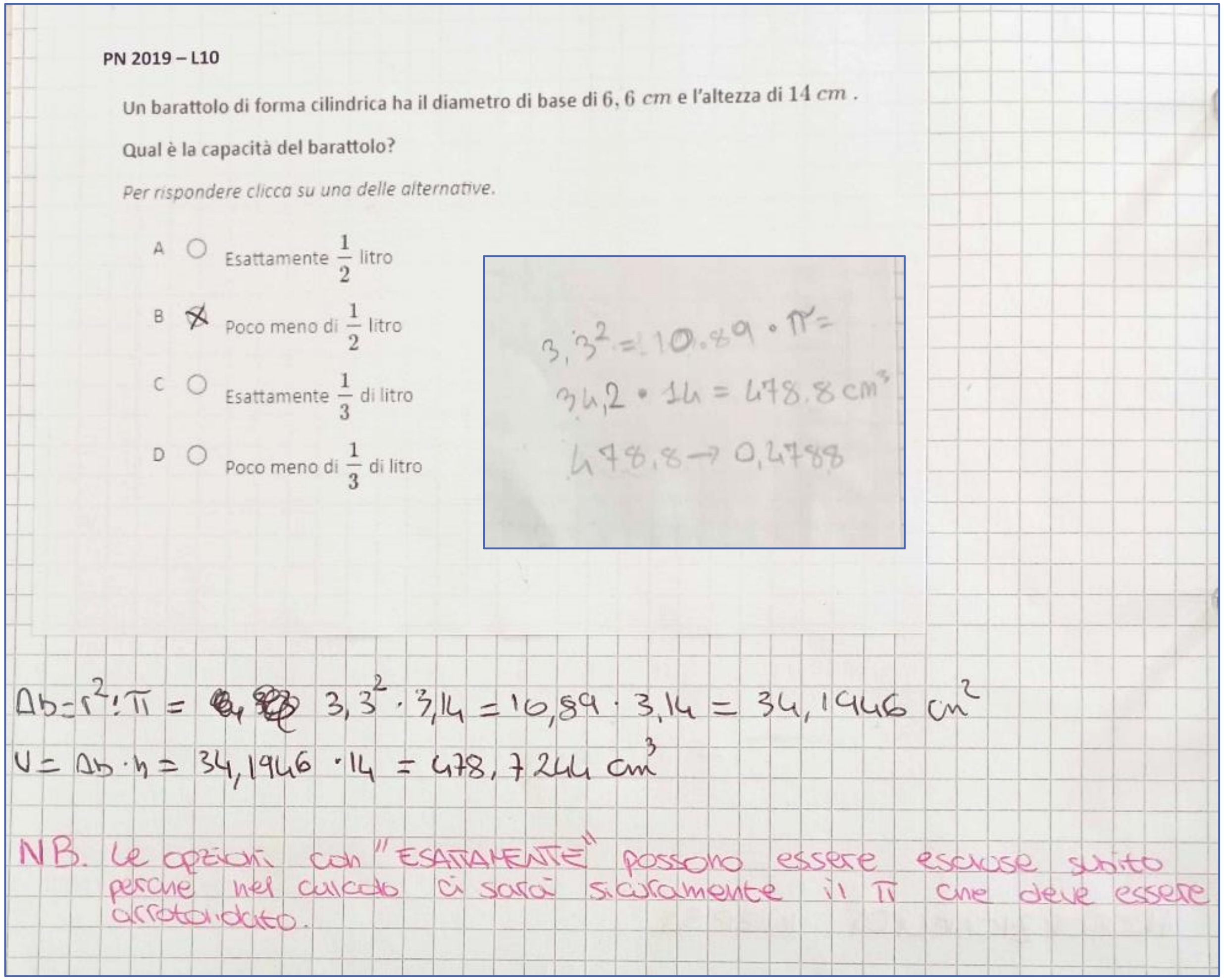


È facile verificare con due siringhe di diversa capacità

Questo quesito consente di ragionare sulle formule inverse del volume del cilindro, ancora una volta in un contesto di realtà in cui il solido geometrico è riprodotto in una posizione ed in una situazione diverse da quelle dei libri di testo.

Molti ragazzi dicono istintivamente che se la lunghezza della colonna (altezza del cilindro) raddoppia, allora la base deve dimezzare. Il quesito offre la possibilità di ripassare anche la proporzionalità inversa, verificando con numeri e simboli.

Quesito 14


PN 2019 – L10

Un barattolo di forma cilindrica ha il diametro di base di $6,6\ cm$ e l'altezza di $14\ cm$.

Qual è la capacità del barattolo?

Per rispondere clicca su una delle alternative.

A ○ Esattamente $\frac{1}{2}$ litro

B ☒ Poco meno di $\frac{1}{2}$ litro

C ○ Esattamente $\frac{1}{3}$ di litro

D ○ Poco meno di $\frac{1}{3}$ di litro

$3,3^2 = 10.89 \cdot \pi =$

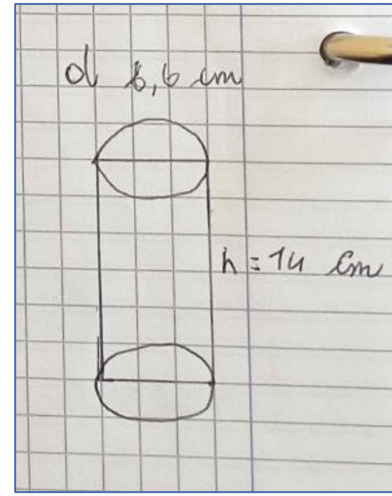
$34,2 \cdot 14 = 478.8\ cm^3$

$478,8 \rightarrow 0,4788$

$A_b = r^2 \cdot \pi = 3,3^2 \cdot 3,14 = 10,89 \cdot 3,14 = 34,1946\ cm^2$

$V = A_b \cdot h = 34,1946 \cdot 14 = 478,7244\ cm^3$

NB. Le opzioni con "ESATTAMENTE" possono essere escluse subito perché nel calcolo ci sarà sicuramente il π che deve essere arrotondato.



A questo punto del percorso, questo quesito (proposto al secondo anno della scuola superiore) non crea particolari problemi: a parte un uso non sempre appropriato delle unità di misura, i ragazzi calcolano il volume in cm^3 e lo esprimono in litri dividendo per 1000.

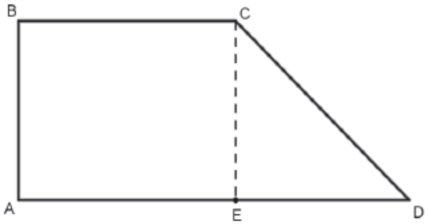
Merita invece di riflettere sul fatto che, dovendo utilizzare π per il calcolo del volume, l'avverbio «esattamente» consente di scartare a priori la prima e la terza opzione.

Quesiti 15 e 16: solidi di rotazione

Attraverso la proposta di due quesiti Invalsi per la scuola superiore, ma ritenuti abbastanza semplici, sono stati introdotti i solidi di rotazione. Lo scopo principale era quello di vedere il cilindro anche come solido di rotazione, ma tra i quesiti Invalsi ci sono soltanto rotazioni di trapezi.

Dalle PN 2015 e 2018 – Grado L10

Osserva la figura.



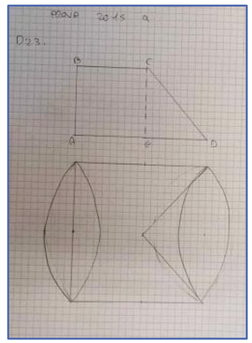
Se si fa ruotare il trapezio rettangolo *ABCD* di un giro completo attorno alla sua base minore si ottiene un solido formato da:

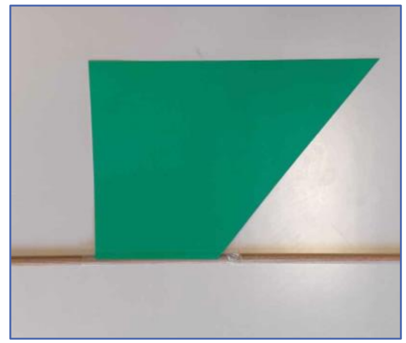
A. ☐ un cilindro con una cavità conica

B. ☐ un tronco di cono

C. ☐ un cilindro e un cono sovrapposti

D. ☐ un cilindro e due coni sovrapposti





Utilizzando cartoncini e asticelle di legno, comunque, i ragazzi hanno risolto correttamente i quesiti e disegnato il solido ottenuto.

Correggendo il secondo quesito, scartate le prime tre possibilità, abbiamo chiamato «tronco di cono» il solido ottenuto.

DalleaPN 2015 – Grado L10

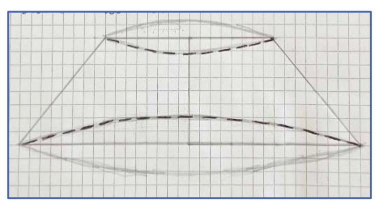
Ruotando di un giro completo un trapezio rettangolo attorno al lato perpendicolare alle basi si ottiene:

A. ☐ un cono

B. ☐ un cilindro con una cavità conica

C. ☐ un cilindro con un cono sovrapposto

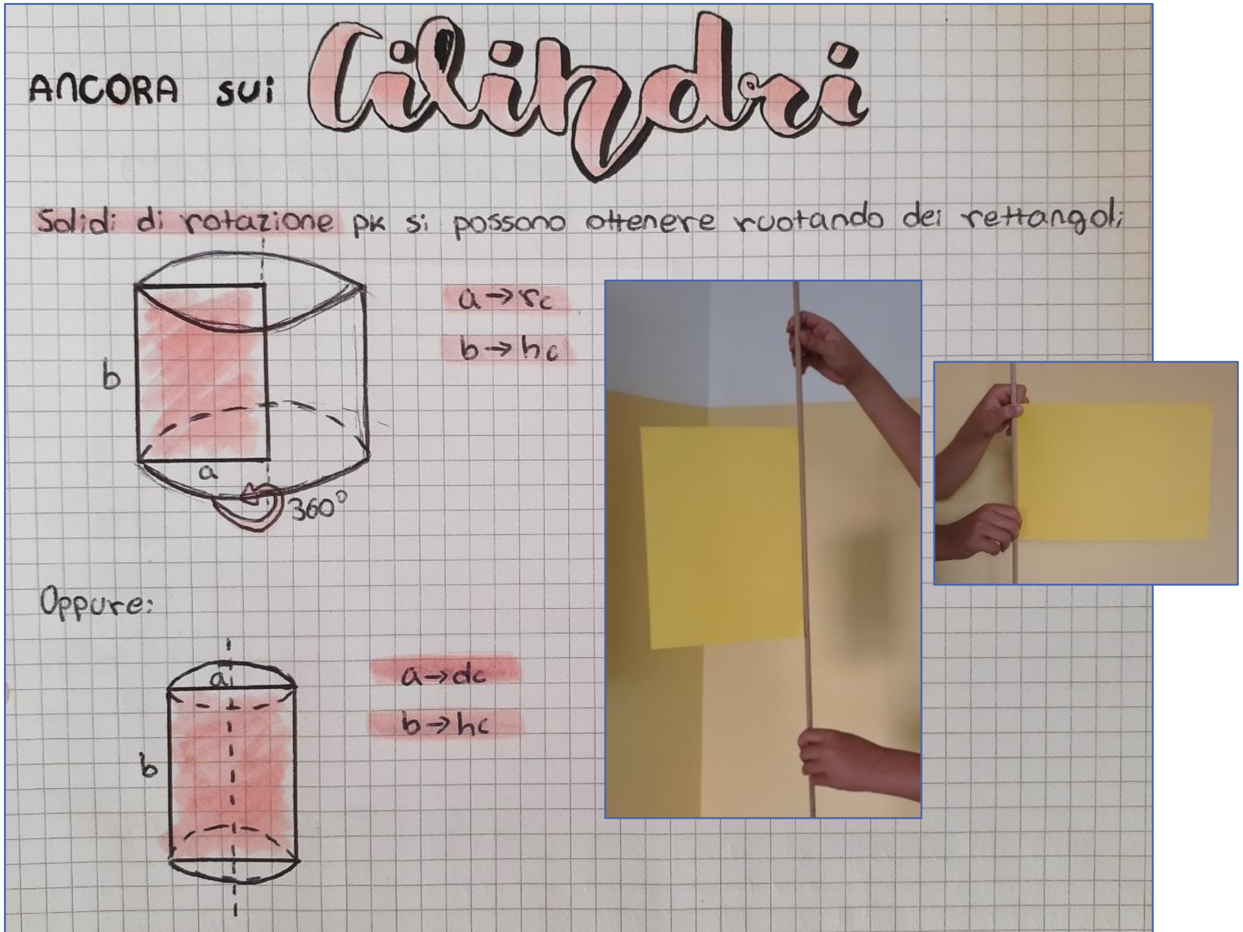
D. ☐ un tronco di cono



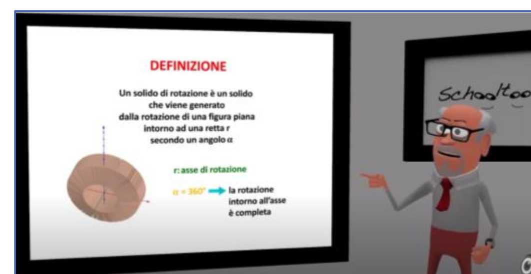
Si chiede:

- *È possibile, allora, ottenere un cilindro facendo ruotare una figura piana nello spazio?*

Provando con dei cartoncini colorati si arriva facilmente a concludere che un cilindro si può ottenere ruotando un rettangolo di 360° intorno ad uno dei lati, ottenendo ovviamente cilindri diversi.



Con qualche prova in più suggerita dall’insegnante, si ricavano anche i cilindri per rotazione di 180° intorno agli assi di simmetria.
Anche la corrispondenza tra gli elementi caratteristici del rettangolo e quelli del cilindro viene ricavata correttamente da quasi tutti gli alunni.
Il Prof. Eddie di Schooltoon ci aiuta a capire meglio…



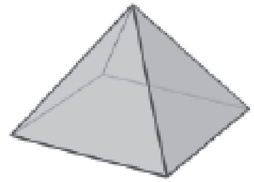
https://www.youtube.com/watch?v=AZnr4USo0pU

9. LA PIRAMIDE

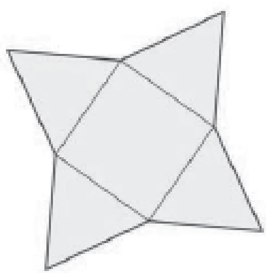
Quesito 17

Dalla PN 2009

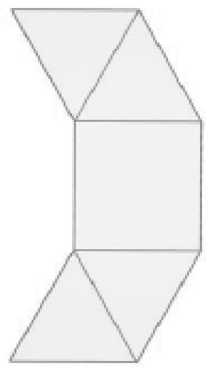
La piramide disegnata qui a fianco è un solido formato da 4 triangoli equilateri uguali fra loro e da una base quadrata.



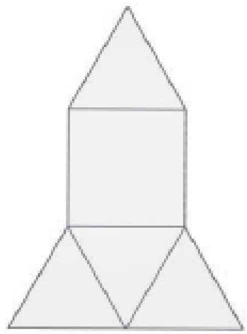
~~**Per ciascuno dei seguenti disegni, indica con una crocetta nella tabella sottostante se è uno sviluppo della piramide.**~~



Disegno 1



Disegno 2



Disegno 3

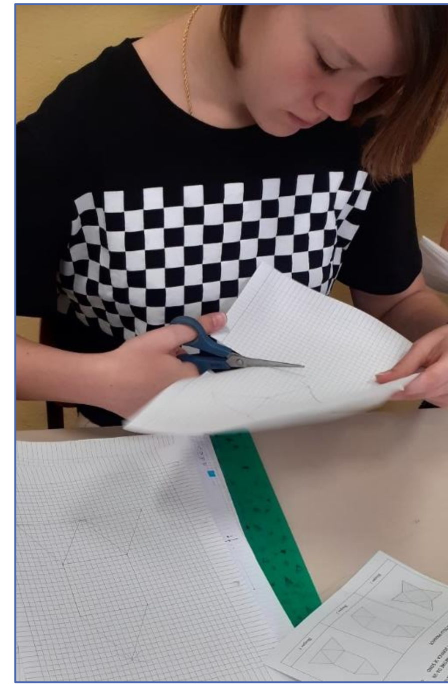
Disegno	SI	NO
1	☐	☐
2	☐	☐
3	☐	☐

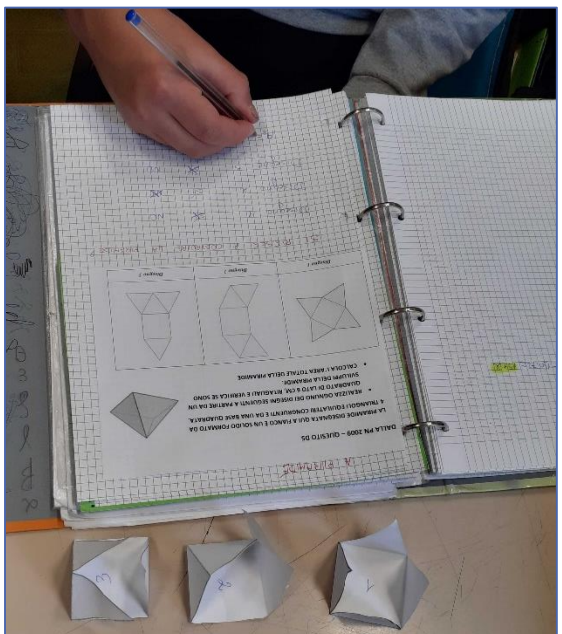
Se i quesiti delle prove Invalsi sui parallelepipedi sono molto numerosi, quelli sulla piramide, e in generale sui solidi a punta, sono pochissimi, e mai basati sul calcolo e sull'applicazione di formule.
Per introdurre la piramide, quindi, si parte da un quesito sullo sviluppo, modificato in modo da renderlo operativo e allo stesso tempo utile per discutere il calcolo dell'area della superficie.

LA PIRAMIDE DISEGNATA QUI A FIANCO È UN SOLIDO FORMATO DA 4 TRIANGOLI EQUILATERI CONGRUENTI E DA UNA BASE QUADRATA.

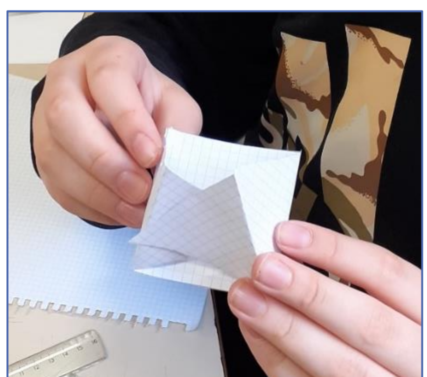
- REALIZZA OGNUNO DEI DISEGNI SEGUENTI A PARTIRE DA UN QUADRATO DI LATO 6 CM, RITAGLIALI E VERIFICA SE SONO SVILUPPI DELLA PIRAMIDE.
- CALCOLA L'AREA TOTALE DELLA PIRAMIDE

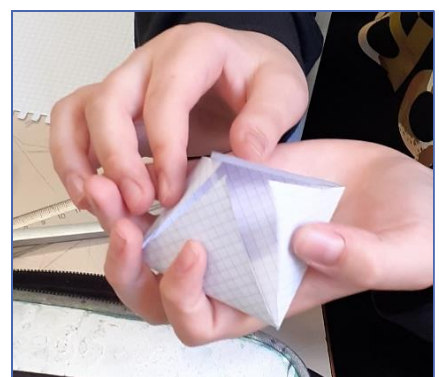
Non vengono date indicazioni per la realizzazione del disegno, che richiede la costruzione di triangoli equilateri in diverse posizioni. Contrariamente a quanto ci si aspettava, la maggior parte dei ragazzi è riuscita a disegnare tutti e tre gli sviluppi rapidamente e senza difficoltà.

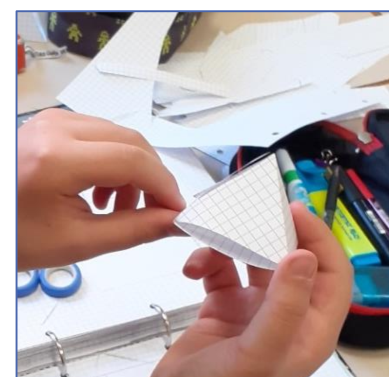


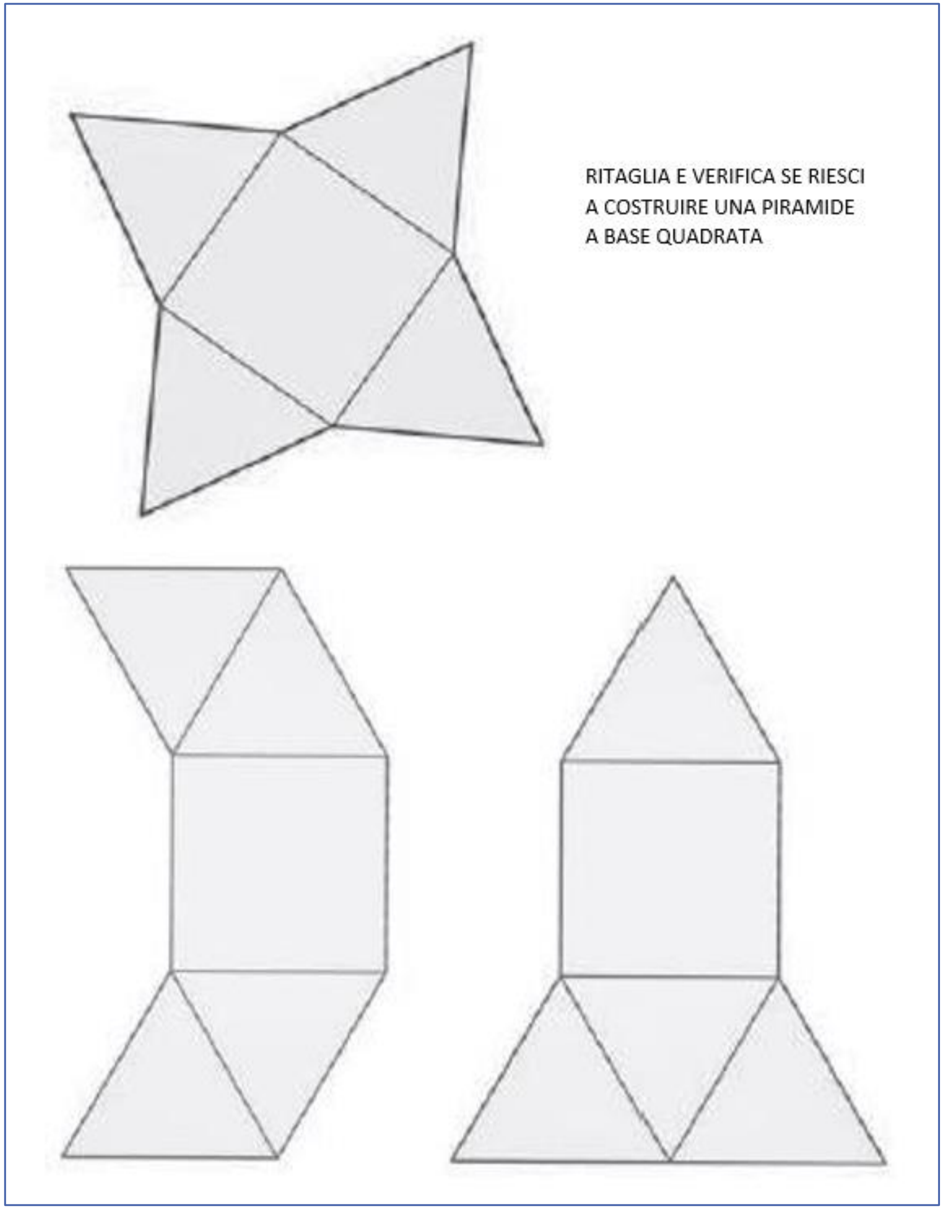


Molti avevano già ipotizzato che il disegno 2 non potesse essere lo sviluppo di una piramide, e lo verificano facilmente tagliando e piegando.

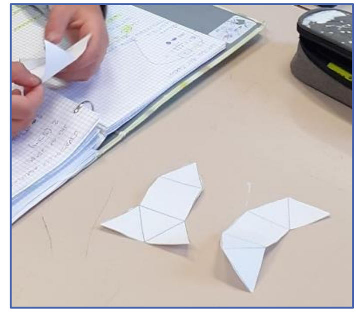


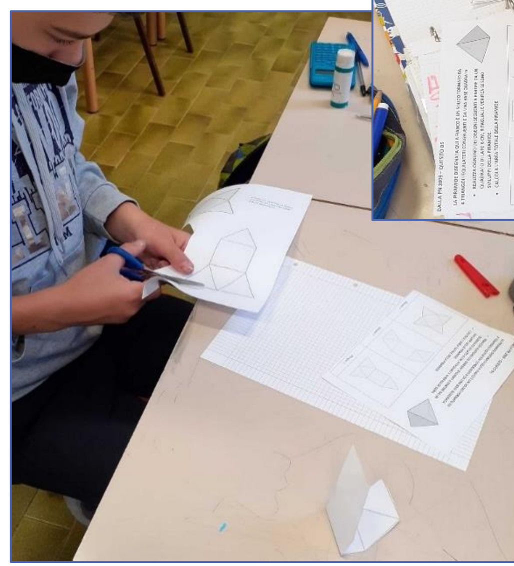


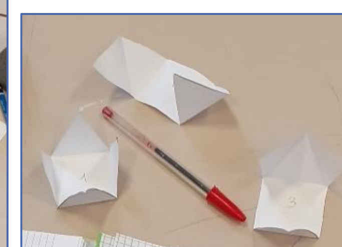


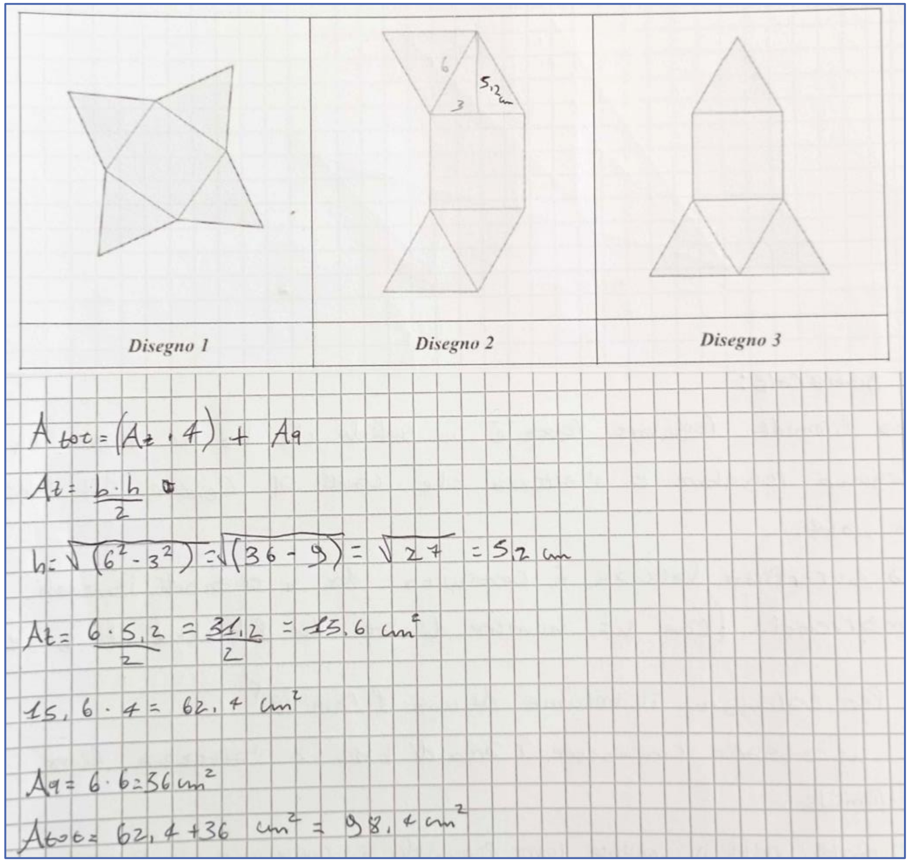


Ai ragazzi con maggiori difficoltà viene fornita una fotocopia con gli sviluppi già disegnati e ingranditi, che devono solo ritagliare e piegare per verificare quanto richiesto.





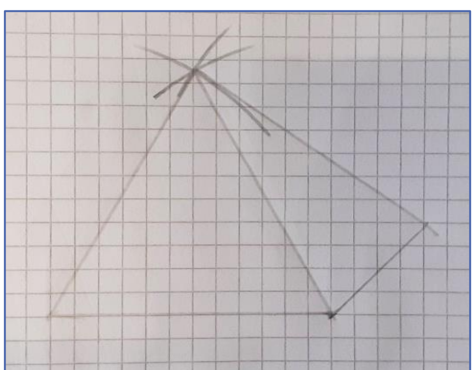


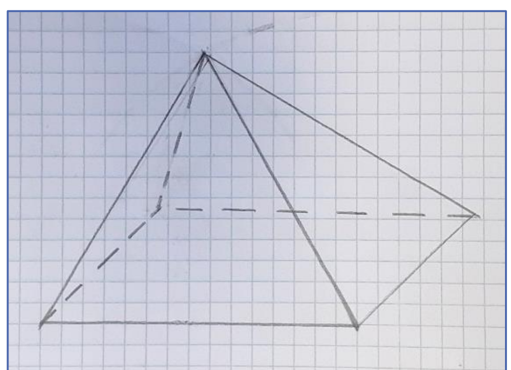


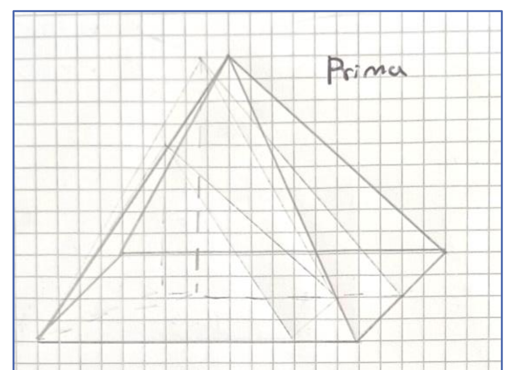
Anche il calcolo dell'area totale della superficie, fatto individualmente e poi corretto alla lavagna, non crea problemi: i ragazzi scompongono la superficie nelle figure piane che la costituiscono, calcolano l'altezza del triangolo equilatero con il teorema di Pitagora, e sommano.

Non viene richiesto niente di diverso, e la trattazione delle piramidi, dal punto di vista quantitativo, anche per motivi di tempo si limita alle piramidi rette a base quadrata.

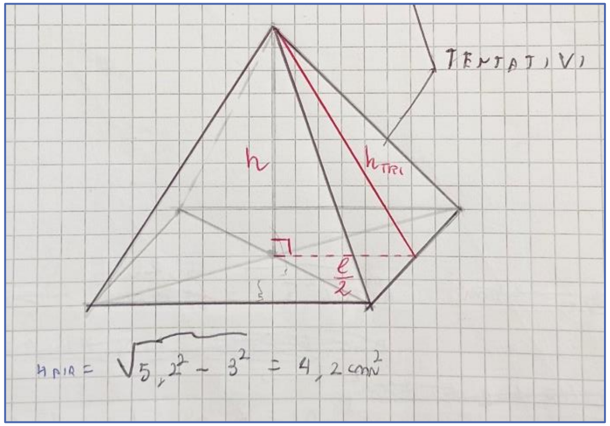
Per introdurre il volume, viene poi richiesto di provare a disegnare la piramide in 3D, in assonometria cavaliera. I disegni che i ragazzi hanno fatto senza indicazioni precise, sono quasi tutti sbagliati:

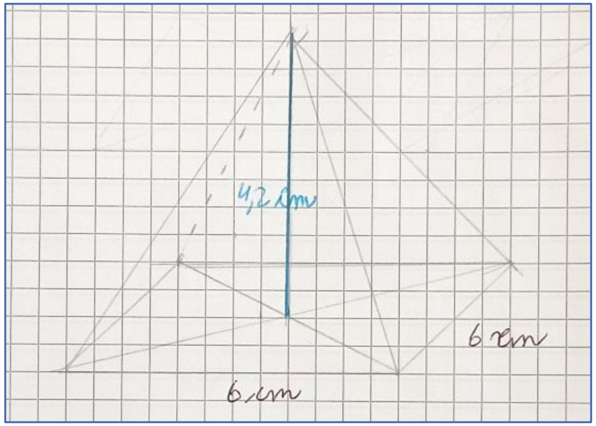


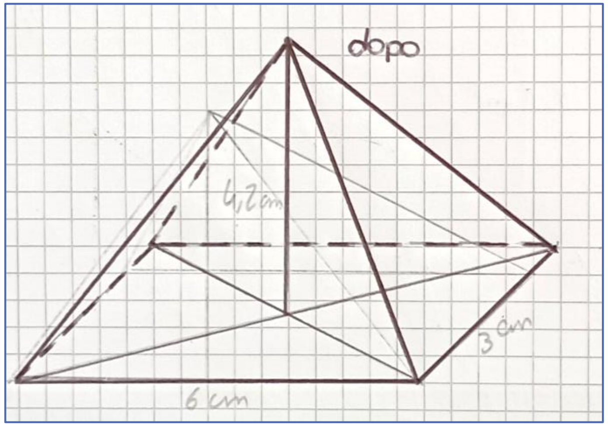




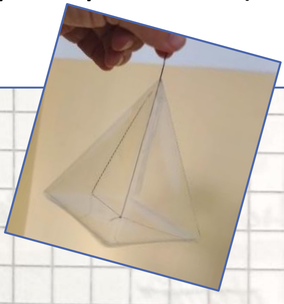
Dopo aver ragionato insieme con un modellino tridimensionale, evidenziando le caratteristiche geometriche della piramide retta a base quadrata, i ragazzi realizzano il disegno corretto calcolando anche l’altezza con il teorema di Pitagora:







Si scrive la definizione di piramide regolare retta. Si precisa che esistono altri tipi di piramidi (non regolari, non rette, …) ma che ci limiteremo a trattare solo quelle più regolari.



In generale

- Una piramide regolare retta è un solido che ha per base un poligono regolare e l'altezza che cade al centro del poligono di base.
- la superfice laterale e' costituita da ~~un~~ n triangoli isoseeli congruenti (con n = numero di lati del poligono di base).

… e infine il volume

E PER CALCOLARE IL VOLUME DI UNA PIRAMIDE?

- È necessario conoscere l'area di base e l'altezza della piramide

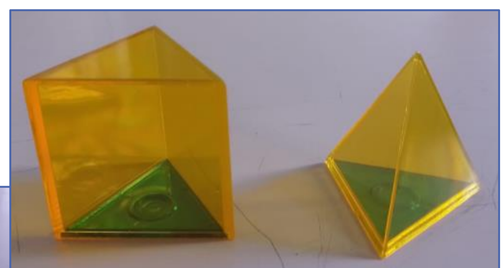
Dopo aver convenuto, per analogia con gli altri solidi geometrici trattati, che per il calcolo del volume della piramide si debbano conoscere l'area della superficie di base e l'altezza, si chiede:

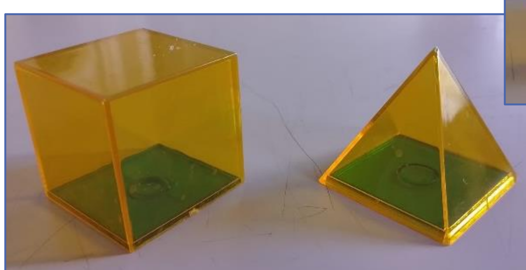
- Quante volte il volume della piramide è contenuto in quello di un prisma di uguali Ab e h? X 3

X 3

X 3

La dimostrazione che il volume della piramide sia contenuto esattamente 3 volte, e non 2, in quello di un parallelepipedo con la stessa area di base e la stessa altezza viene fatta escusivamente in modo sperimentale, con i travasi, Utilizzando anche piramidi e prismi a base triangolare:





3 ·

QUINDI:

$$V_{pir} = \frac{A_b \cdot h}{3}$$

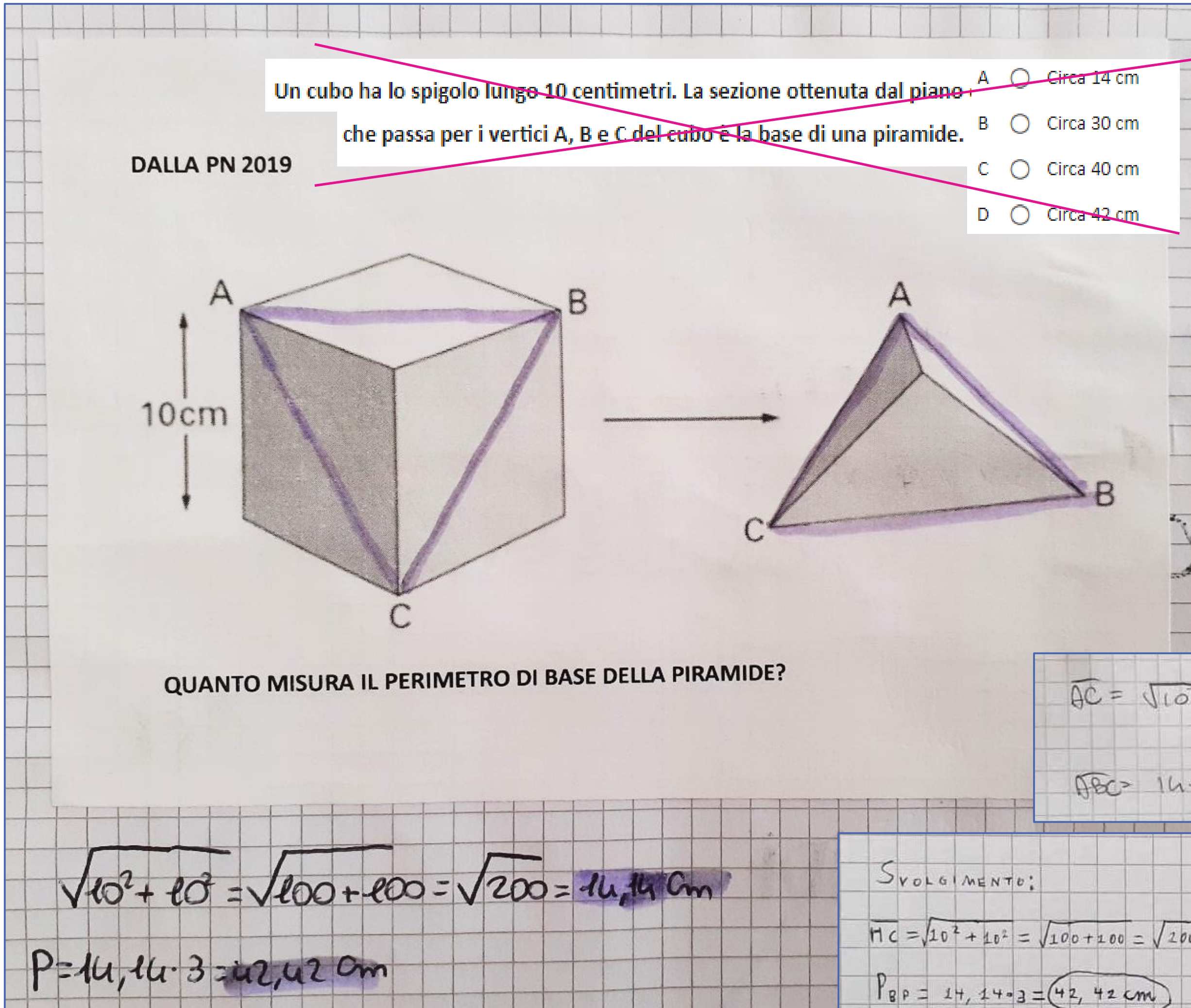
$$A_b = \frac{V \cdot 3}{h}$$

$$h = \frac{V \cdot 3}{A_b}$$

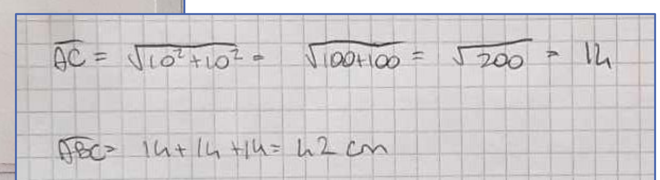
Ancora sulla piramide

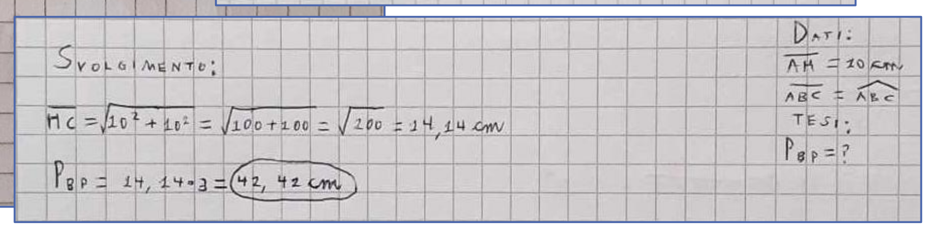
Per consolidare quanto appreso sulla piramide, e per lavorare ancora sulla visione spaziale, vengono proposti diversi quesiti, presi dal libro di testo (non riportati) e ancora dalle prove Invalsi.

Quesito 18



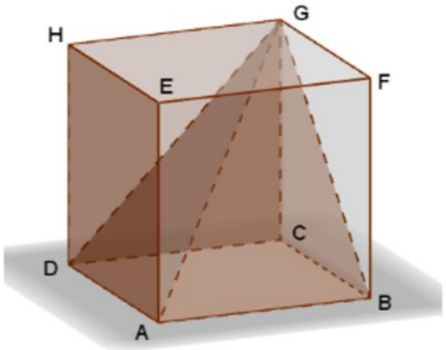
Questo quesito, probabilmente concepito per applicare la formula per il calcolo della diagonale del quadrato e approssimare il risultato, viene modificato togliendo anche il testo. I ragazzi deducono correttamente le informazioni dalla figura e risolvono il quesito, applicando però la formula generica del Teorema di Pitagora e utilizzando la calcolatrice (consentita dal 2018).





Quesiti 19 e 20

DALLA PN 2019 – LIVELLO L13 - QUESITO D5



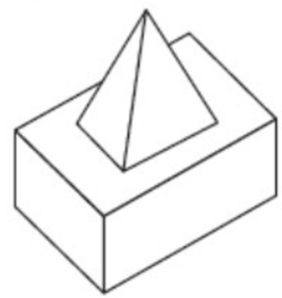
Digita la risposta alla domanda. Scrivi il risultato sotto forma di frazione.

Il rapporto tra il volume della piramide e il volume del cubo è

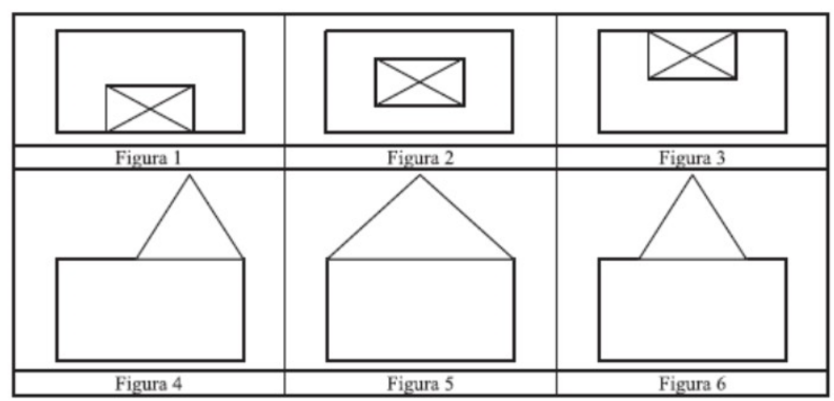
Risposta: ________

Il percorso sulla geometria solida, ma anche l'anno scolastico, si conclude con la risoluzione individuale e la correzione collettiva di questi due quesiti, che non richiedono rappresentazioni, né dimostrazioni.

PN 2012 – QUESITO D25



QUALI, TRA LE SEGUENTI, POSSONO ESSERE RAPPRESENTAZIONI DEL SOLIDO DA DIVERSI PUNTI DI VISTA?



Un'ultima considerazione

Ad eccezione dei quesiti sui solidi di rotazione, in cui si trova un riferimento al cono, questa figura solida è completamente trascurata dalle prove Invalsi. Per motivi di tempo si omette la trattazione delle proprietà geometriche e del calcolo di aree di superfici e volumi del cono, ma ci si ripropone, per il prossimo anno, di costruire alcuni quesiti e situazioni sperimentali del tipo di quelle proposte dai quesiti Invalsi. Questo per completare la programmazione di geometria e soprattutto per ragionare sugli oggetti conici, che sono piuttosto comuni.

Verifica degli apprendimenti

Durante il percorso sono state somministrate due prove di verifica: la prima (Verifica 1) per accertare l'acquisizione di competenze e conoscenze relative alla parte su cubi, parallelepipedi e solidi composti; la seconda (Verifica 2) relativa al cilindro, alla piramide e con esercizi di ripasso su tutti i solidi trattati.
In entrambi i casi, sono state utilizzate molte figure per rendere più comprensibili i quesiti, soprattutto per gli alunni con BES. Agli alunni più deboli nel ragionamento o con grosse difficoltà grafiche è stata data la possibilità di utilizzare modelli tridimensionali presenti in laboratorio o costruiti da loro.

In ogni esercizio sono state chiaramente indicate le richieste, e quando possibile è stato chiesto di motivare le risposte per verificare anche l'acquisizione di competenze lessicali e la consapevolezza degli apprendimenti.

Verifica 1

Nome e cognome .... Classe .... Data......................

1. UN PARALLELEPIPEDO HA DIMENSIONI a = 45 cm, b = 60 cm, h = 80 cm.

1.1 DISEGNA IL PARALLELEPIPEDO IN ASSONOMETRIA CAVALIERA (1:10)

1.2 CALCOLA L'AREA TOTALE DEL PARALLELEPIPEDO

1.3 CALCOLA IL VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO

1.4 CALCOLA LA LUNGHEZZA DELLO SPIGOLO DI UN CUBO CHE HA LO STESSO VOLUME DEL PARALLELEPIPEDO

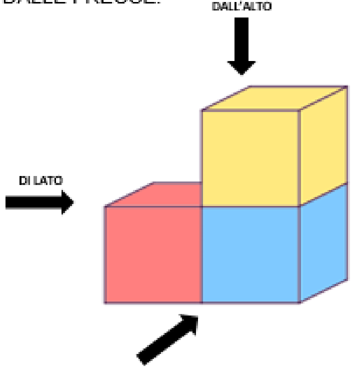
1.5 QUANTI LITRI DI ACQUA SAREBBERO NECESSARI PER RIEMPIRE COMPLETAMENTE IL PARALLELEPIPEDO?

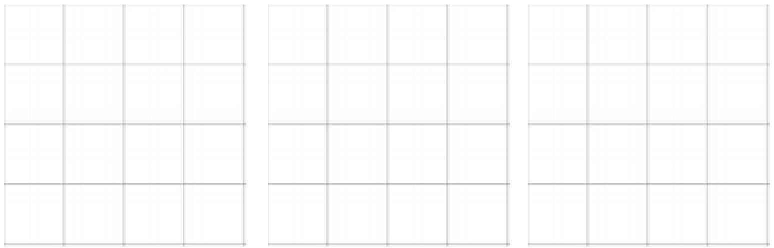
2. IL SOLIDO IN FIGURA È STATO COSTRUITO UTILIZZANDO TRE CUBI COLORATI CON LO SPIGOLO DI 3 cm.

2.1 CALCOLA L'AREA DELLA SUPERFICIE TOTALE DEL SOLIDO

2.2 CALCOLA IL VOLUME DEL SOLIDO

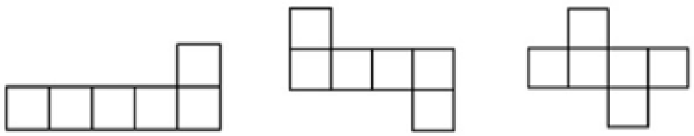
2.3 DISEGNA LA VISTA DI FRONTE, DALL'ALTO E DI LATO, COME INDICATO DALLE FRECCE.



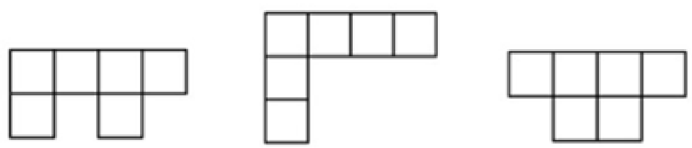


DALL'ALTO DI FRONTE DI LATO

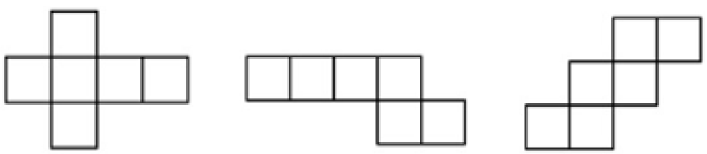
3. INDICA QUALI, TRA LE SEGUENTI FIGURE, SONO LO SVILUPPO SUL PIANO DI UN CUBO



SÌ NO SÌ NO SÌ NO



SÌ NO SÌ NO SÌ NO

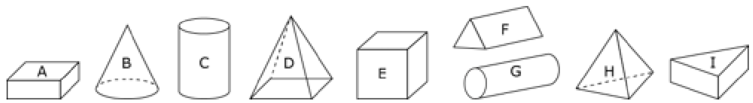


SÌ NO SÌ NO SÌ NO

Verifica 2

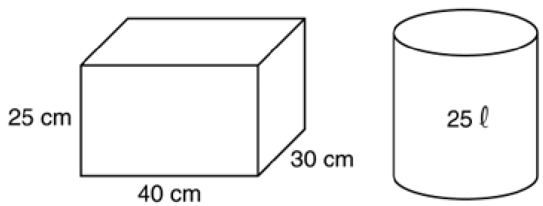
Nome e cognome .... Classe .... Data.................

1. **Quali tra le seguenti figure sono:**

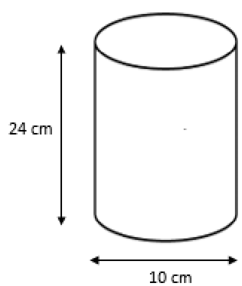


a) solidi a due basi ....
b) solidi a punta ....
c) parallelepipedi rettangoli ....
d) piramidi? ....

2. **Risolvi il seguente problema:**
La scatola è piena di passato di pomodoro. Si riesce a far stare tutto il passato nel cilindro? Motiva la risposta con dei calcoli.

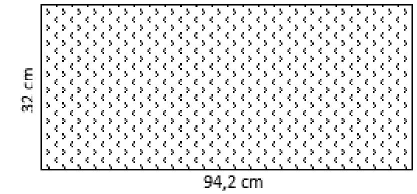


3. **Risolvi:**

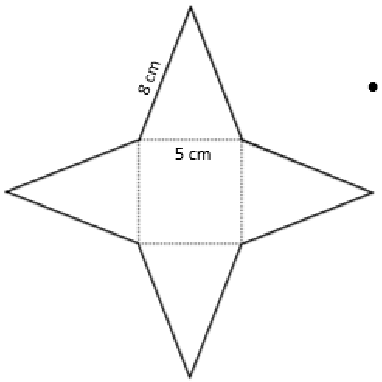


- Calcola l'area totale e il volume del cilindro
- Calcola il peso dell'oggetto sapendo che è fatto di rame e che ogni cm^3 di rame pesa 8,9 g.

4. **Il rettangolo della figura viene piegato a formare la superficie laterale di un cilindro. Calcola il volume del cilindro che si origina (per π utilizza il valore approssimato 3,14)**

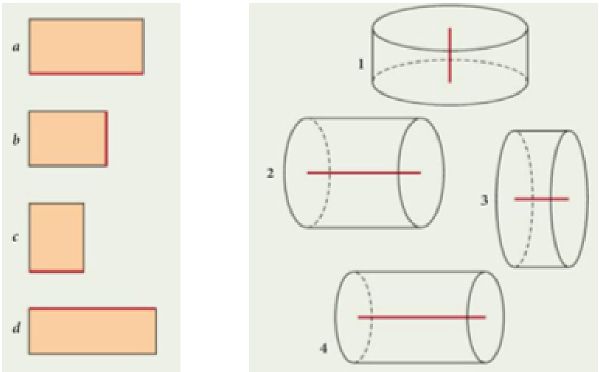


5. **Si vuole costruire una scatola a forma di piramide a base quadrata.**



- Quanti cm^2 di cartoncino sono necessari?

6. **Collega ogni rettangolo al cilindro corrispondente**



Risultati ottenuti

Le verifiche hanno avuto un esito positivo. Su 18 alunni, due hanno riportato un'insufficienza lieve (5+). Un numero significativo di alunni ha avuto valutazioni buone (8) o molto buone (9, 9½, 10), dimostrando di aver consolidato il lavoro a scuola con lo studio a casa.

Con poche eccezioni, i ragazzi hanno partecipato attivamente alle lezioni in classe, soprattutto alle esercitazioni grafiche e alle esperienze pratiche con gli oggetti e con il cartoncino, dove si sono messi in evidenza alunni che, pur non avendo un buon rapporto con la matematica, sono dotati di buone capacità manuali.

Particolarmente apprezzata è stata la modalità di lavoro a piccoli gruppi, dove tutti gli alunni che riuscivano a risolvere rapidamente i quesiti o a realizzare l'oggetto o il disegno richiesto, si sono resi disponibili ad aiutare i compagni con maggiori difficoltà.

Valutazione dell'efficacia del percorso didattico sperimentato

Tutte le fasi del percorso sono state costruite prendendo spunto da uno o più quesiti Invalsi, non solo del livello 08. Quando possibile e funzionale, gli oggetti proposti nelle prove sono stati costruiti o riprodotti, in modo da aiutare il ragionamento e migliorare la capacità di visione spaziale. Proprietà, regole e formule sono state ricavate dopo aver manipolato e disegnato, e dopo aver discusso le osservazioni degli alunni. Procedere per domande e sperimentazioni, seguite da discussioni collettive moderate dall'insegnante, ha numerosi vantaggi:

- si registra un significativo coinvolgimento di <u>tutti</u> i ragazzi;
- la matematica risulta una disciplina legata alla realtà, utile per interpretare il mondo che ci circonda;
- vengono stimolate le abilità pratiche degli alunni e allo stesso tempo si facilita la memorizzazione, rendendo più duraturi gli apprendimenti.