REGIONE TOSCANA

Un altro potere delle potenze

Scuola secondaria di secondo grado
Area disciplinare: Matematica

Liceo statale "C. Lorenzini"

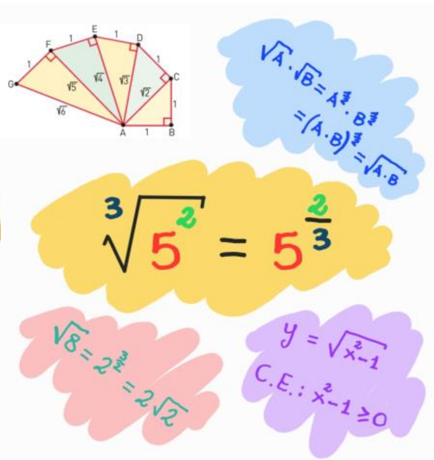
Docenti: Cinzia Gonfiotti

Realizzato con il contributo della Regione Toscana
nell'ambito del progetto
Rete Scuole LSS a.s. 2022/2023

Liceo Statale "C. Lorenzini"

Classico, Linguistico, Scientifico, Scienze Umane

Pescia (PT)

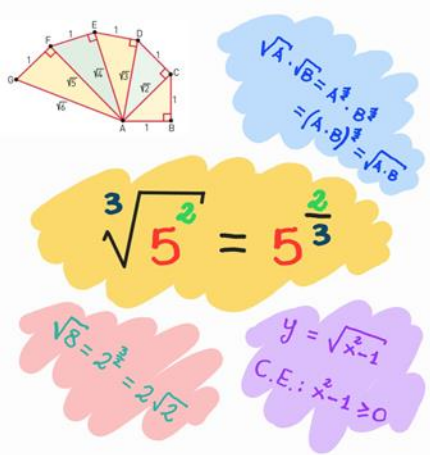


Un altro potere delle potenze

Come ripensare didatticamente un argomento storico del calcolo algebrico

Classe seconda Liceo

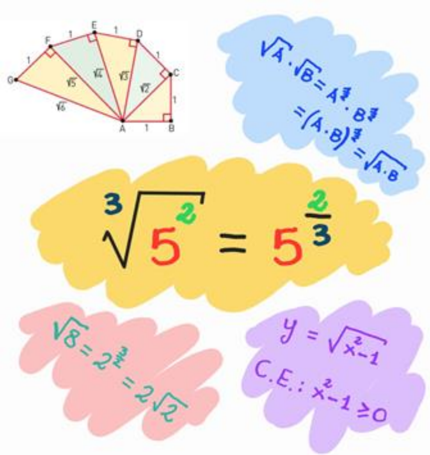
Indirizzo Scientifico Ordinario



collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale (1)

Il percorso nasce da una riflessione sulla trattazione dei radicali nella classe seconda del Liceo scientifico. Generalmente i libri di testo presentano l'argomento indicando una successione di regole da seguire, sia per la semplificazione di radicali che per le operazioni con essi e ciò induce gli studenti a risolvere in modo meccanico le espressioni proposte, che spesso risultano di difficile risoluzione. Questo, talvolta, finisce con lo scoraggiare gli studenti che non si sentono adeguati, alimentando una certa diffidenza verso l'argomento.

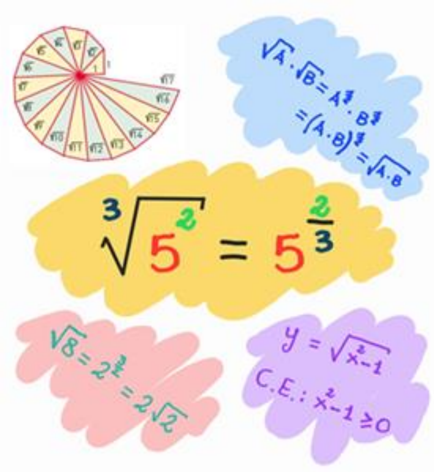
Inoltre, questo tipo di trattazione non mette in sinergia le conoscenze già acquisite dagli studenti, in merito al calcolo algebrico, con le operazioni con i radicali: solo alla fine del capitolo, infatti, viene indicata una forma diversa per esprimerli, cioè come potenze con esponente razionale.



collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale (2)

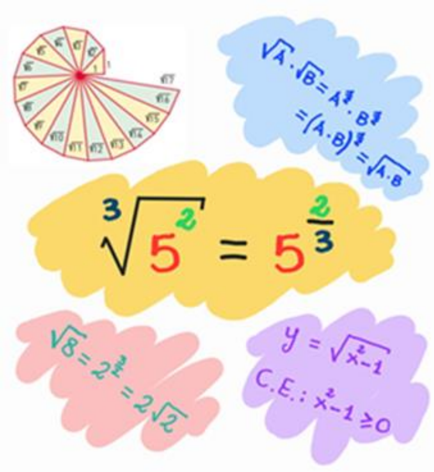
In questo percorso i radicali sono stati proprio introdotti come potenze a esponente razionale, utilizzando poi le già note proprietà delle potenze per eseguire le operazioni con essi.

Successivamente, in modo naturale e spontaneo gli studenti hanno compreso la stretta connessione tra le due forme di scrittura e hanno iniziato a scegliere le potenze con esponente razionale o l’espressione con le radici in base alla più indicata nella risoluzione dei vari esercizi.



obiettivi essenziali di apprendimento

- Estendere il concetto di potenze a esponente intero a quello con esponente frazionario.
- Comprendere l'analogia tra le due diverse forme di scrittura (potenze con esponente razionale ed espressione con i radicali).
- Apprezzare la differenza fra le rappresentazioni geometriche degli insiemi numerici (discreto, denso e continuo).
- Acquisire consapevolezza in merito alle condizioni di esistenza di un radicale e all'introduzione del valore assoluto, quando necessario.
- Saper ricavare e applicare le principali regole del calcolo con i radicali.
- Comprendere la connessione tra zeri e segno di una funzione irrazionale e le soluzioni di equazioni e disequazioni irrazionali.
- Acquisire progressivamente autonomia nella risoluzione di equazioni, disequazioni e sistemi irrazionali.

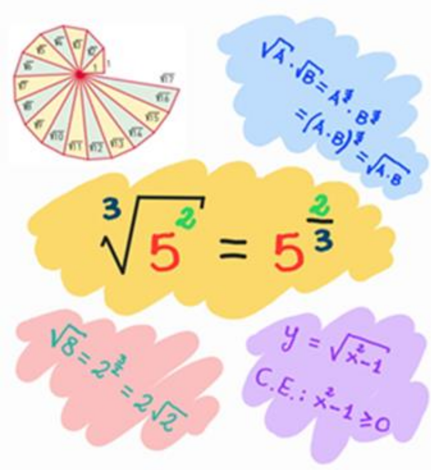


elementi salienti dell’approccio metodologico (1)

Si propone un percorso che permetta di introdurre i concetti e i metodi propri del calcolo con i radicali.

Gli elementi sono:

- ancorare le regole del calcolo con i radicali alle già note proprietà delle potenze;
- operare in maniera consapevole nei diversi insiemi **N**, **Z**, **Q**, **R** riconoscendo l’appartenenza dei risultati ottenuti ai diversi «ambienti» numerici
- ottimizzare i tempi necessari per lo svolgimento del modulo: anche attraverso un’accurata scelta degli esercizi assegnati evitando eccessivi virtuosismi;
- analizzare le regole del calcolo radicale riducendolo all’essenziale.



elementi salienti dell'approccio metodologico (2)

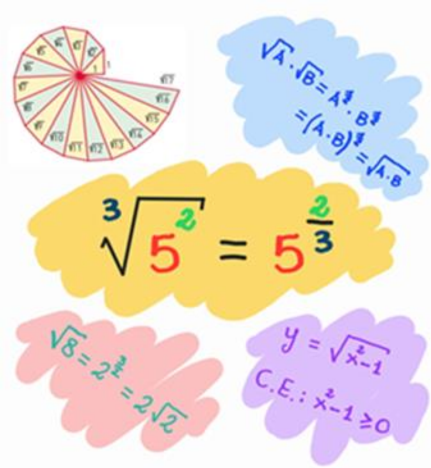
Il percorso ha occupato circa 30 ore ed è stato proposto con un approccio che coinvolgesse direttamente gli studenti e che stimolasse continuamente un'analisi critica degli argomenti affrontati.

Particolare attenzione è stata data all'introduzione del concetto di radicale come potenza a esponente razionale in modo da stabilire una continuità con il calcolo algebrico già noto.

Rilievo è stato dato anche all'analisi delle caratteristiche degli insiemi numerici e alla loro rappresentazione dal punto di vista geometrico evidenziando le differenze esistenti tra insieme discreto, insieme denso e insieme continuo.

Si è ritenuta importante un'attenta riflessione sul significato dell'estrazione di radice con particolare attenzione alla convenzione che impone di considerare solo la soluzione non negativa nel caso in cui l'indice della radice sia un numero pari.

Le operazioni tra radicali numerici sono risultate una naturale applicazione delle proprietà delle potenze, quelle tra radicali algebrici hanno richiesto maggiore attenzione riguardo al segno delle espressioni in essi contenute. Conseguentemente è stato analizzato il dominio delle funzioni irrazionali.



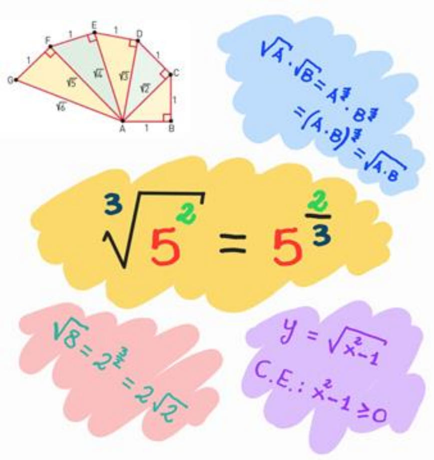
elementi salienti dell’approccio metodologico (3)

Si è agevolata la costruzione di grafici attraverso l’uso del software Geogebra, con il fine di sottolineare lo stretto legame esistente tra l’espressione algebrica di una funzione e la sua rappresentazione nel piano cartesiano.

Poniamo ancora l’attenzione sull’importanza di un’accurata scelta degli esercizi da parte dell’insegnante: per una corretta acquisizione e applicazione delle regole del calcolo radicale si sono scelti gli esercizi più significativi evitando eccessivi virtuosismi algebrici poco produttivi per quanto riguarda sia espressioni, equazioni, disequazioni e sistemi a coefficienti irrazionali sia equazioni, disequazioni e sistemi irrazionali.

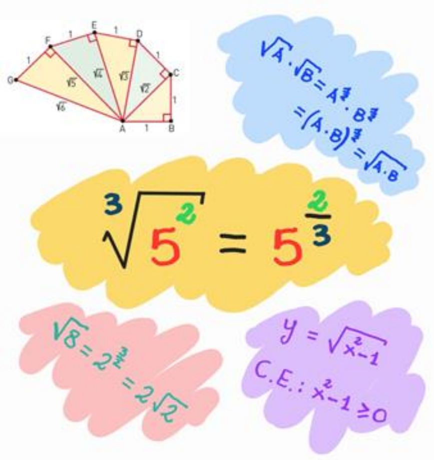
Gli argomenti sono quelli che tradizionalmente si affrontano durante lo studio dei radicali, ma diverso è l’approccio con il quale essi sono stati introdotti con gli obiettivi principali di creare continuità e ottimizzare i tempi di lavoro.

Assolutamente naturale è stato per gli studenti il passaggio dall’utilizzo delle proprietà delle potenze a quello delle regole del calcolo radicale una volta compresa consapevolmente la connessione tra le due forme di scrittura.



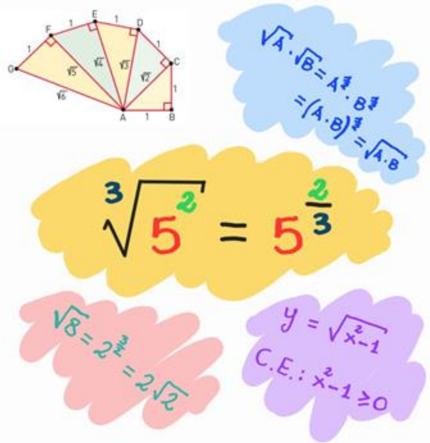
materiali, apparecchi e strumenti utilizzati

- Libro di testo: M. Bergamini, G. Barozzi, A Trifone "*MATEMATICA.BLU*" *Seconda edizione* Vol. 2 ed. Zanichelli
- Internet per la ricerca del materiale.
- Computer e LIM per l’utilizzo di software Geogebra e connessione internet.



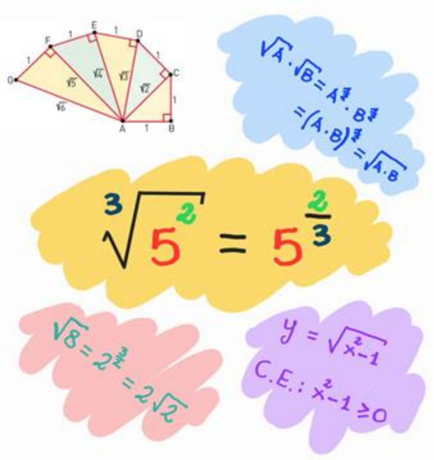
ambienti di lavoro in cui è stato sviluppato il percorso

- Aula
- A casa



tempi impiegati

- Per la messa a punto preliminare nel Gruppo LSS: 6 ore.
- Per la progettazione specifica e dettagliata nella classe: 8 ore.
- Tempo-scuola di sviluppo del percorso: 30 ore, comprensive delle verifiche scritte.
- Per documentazione: 40 ore

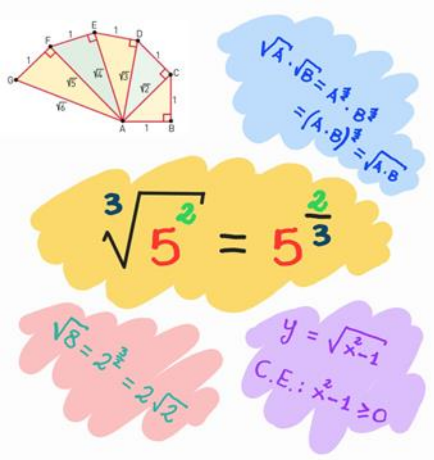


altre informazioni

- I vari argomenti sono stati generalmente introdotti favorendo la partecipazione attiva degli studenti che, sotto la guida dell'insegnante, hanno di volta in volta cercato di risolvere le questioni proposte attingendo dalle conoscenze, competenze e abilità già acquisite, adattandole al nuovo contesto in modo il più possibile autonomo.

- Sono state evidenziate in rosso le parti che sintetizzano i contenuti degli interventi degli studenti

- Di seguito viene riportata la parte più significativa del lavoro.



sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

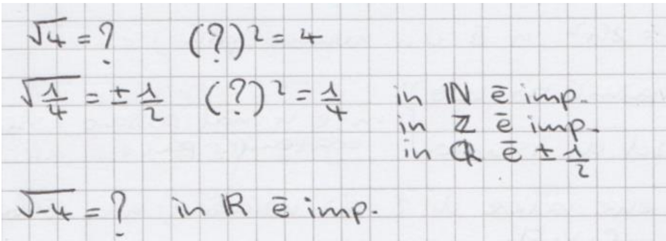
Nella lezione introduttiva l’insegnante ha proposto agli studenti di calcolare il valore delle seguenti radici quadrate:

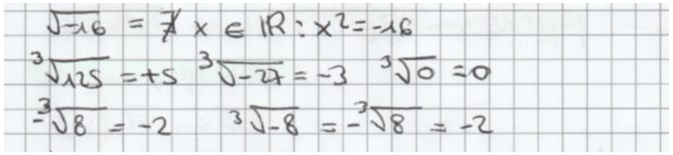
$$\sqrt{4} \qquad \sqrt{\frac{1}{4}} \qquad \sqrt{-4}$$

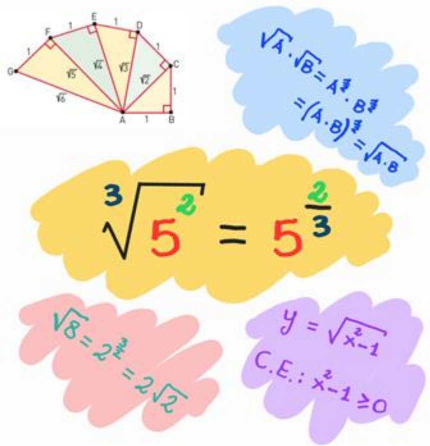
invitandoli a motivare la risposta.

La discussione ha portato:

- a definire la radice quadrata come «operazione inversa dell’elevamento a potenza con esponente 2» e ad estenderla alla radice cubica, quarta, ecc… ;
- a riflettere sull’insieme numerico a cui la soluzione appartiene.







sviluppo del percorso partecipato

Ecco alcune osservazioni dei ragazzi:

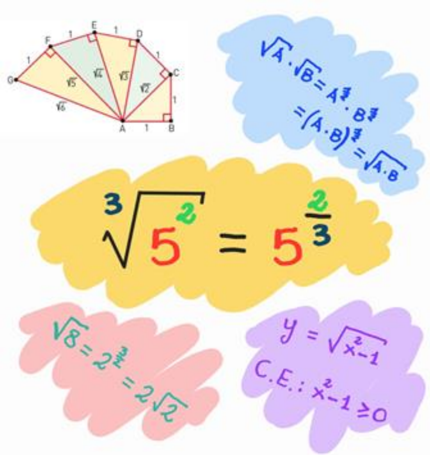
«La radice quadrata di 4 è rappresentata da quei numeri che elevati al quadrato danno come risultato 4: +2 e -2; appartengono a Z ».
«La radice quadrata di 1/4 è rappresentata da quei numeri che elevati al quadrato danno come risultato 1/4: +1/2 e -1/2; appartengono a Q ».
«La radice quadrata di -4 è impossibile in R perché non esiste un numero reale che elevato al quadrato ha come risultato -4».
«La radice cubica di (-27) è quel numero che elevato al cubo ha come risultato (-27): -3; appartiene a Z».
E così via…

L'insegnante ha invitato gli studenti a riflettere sul fatto che, pensando all'operazione di radice quadrata come a una funzione $y=\sqrt{x}$, per definizione è richiesto che questa abbia un unico valore.

Per questo nelle applicazioni che seguono, per $\sqrt{4}$ non prenderemo come risultato sia +2 che -2, ma solo +2.

Concludendo:

per convenzione, il risultato di una radice di indice pari è un numero non negativo.



sviluppo del percorso partecipato

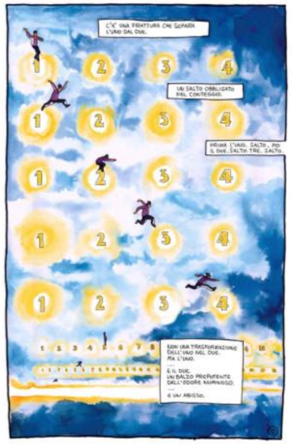
Gli studenti sono stati quindi invitati a indicare le caratteristiche degli insiemi numerici già affrontati lo scorso anno e a rappresentarli dal punto di vista geometrico.

Alcuni alunni hanno risposto:
«l'insieme **N** dei numeri naturali è costituito dai numeri 0, 1, 2, 3, ….»;
«i numeri naturali si possono rappresentare su una retta»;
«l'insieme **Z** è costituito dai numeri 0, +1, -1, +2, -2, +3, -3, … e anche questi si possono rappresentare sulla retta».

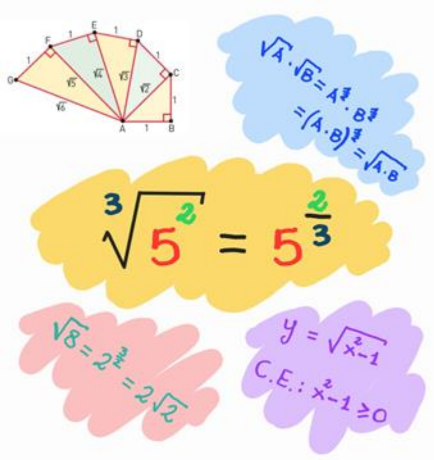
L'insegnante ha puntualizzato che i numeri naturali, come i numeri interi, sono rappresentati da punti isolati come mostrato nelle immagini a fianco e la rappresentazione corretta è come punti singoli, mentre la retta contiene anche altri numeri:

N e **Z** sono insiemi **DISCRETI**.

https://andreaplazzi.files.wordpress.com/2008/03/013gottinga.jpg



https://andreaplazzi.files.wordpress.com/2008/03/012gottinga.jpg



sviluppo del percorso partecipato

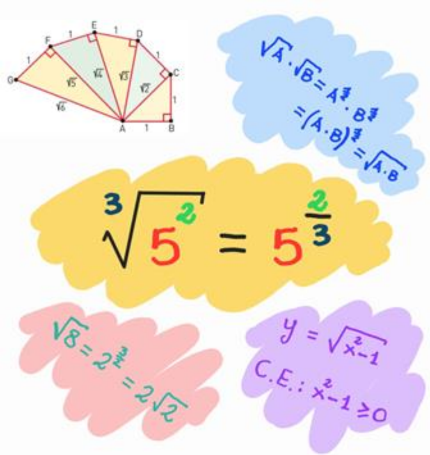
Riguardo all'insieme **Q** alcuni allievi sono intervenuti dicendo che:

«l'insieme **Q** è l'insieme dei numeri razionali, è costituito da tutte le frazioni»;
«per rappresentarli, dobbiamo suddividere l'unità di misura scelta sulla retta: per esempio per rappresentare 2/3 si divide l'unità in 3 parti e se ne prendono 2»;
«anche i numeri naturali e i numeri interi appartengono a Q».

L'insegnante ha ricordato una caratteristica importante di questo insieme:

Q è un insieme **DENSO**,

cioè fra due frazioni qualunque se ne può sempre trovare un'altra, ad esempio il loro valor medio.



sviluppo del percorso partecipato

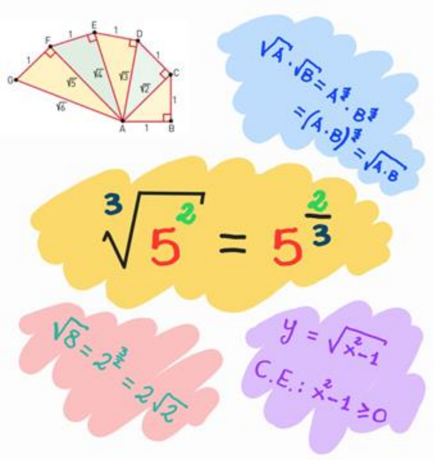
L’insegnante ha invitato gli studenti:

- a individuare alcune frazioni comprese tra 0 e 1;
- a riflettere su quante se ne possono trovare.

«Tra 0 e 1 si può trovare 1/2, tra 0 e 1/2, c’è 1/4 e così via…»;
«… tra 1/2 e 1 c’è 3/4 e così via…»;
«… tra 0 e 1 ce ne sono infinite…»;
«… ma anche tra 0 e 1/2 ce ne sono infinite…»;
«… lo stesso tra 1/2 e 1…».

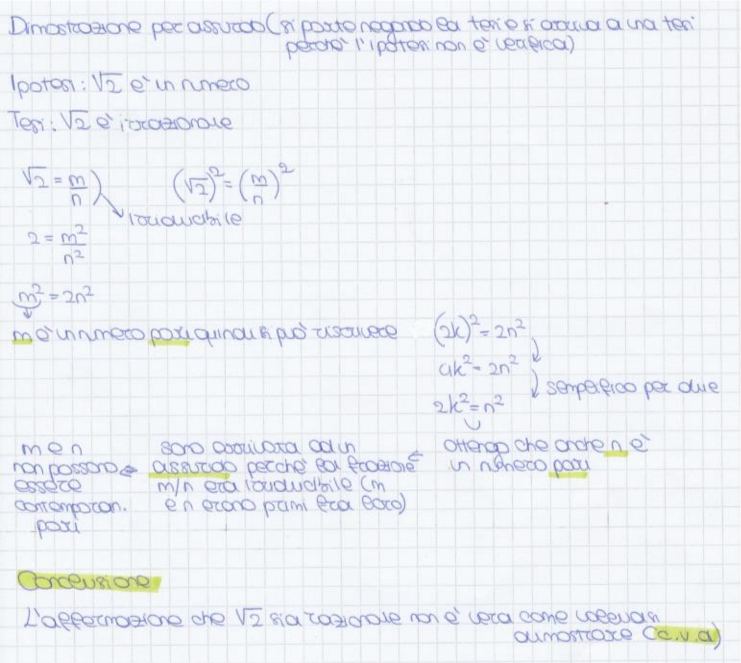
L’insegnante ha aggiunto che, procedendo in questo modo, i punti sulla retta che corrispondono ai numeri razionali sono infinitamente vicini. Ha chiesto allora se esistano dei punti della retta che non corrispondano a numeri razionali.
Alcuni studenti hanno risposto:

«$\sqrt{2}$ non è un numero razionale…», «… nemmeno $\sqrt{3}$…», «… neanche π».



sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

Proviamo allora a dimostrare che $\sqrt{2}$ non è un numero razionale:


Dimostrazione per assurdo (si parte negando la tesi e si arriva a una tesi perché l'ipotesi non è verifica)

Ipotesi: $\sqrt{2}$ e' un numero

Tesi: $\sqrt{2}$ e' irrazionale

$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ irriducibile $\quad (\sqrt{2})^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$

$2 = \frac{m^2}{n^2}$

$m^2 = 2n^2$

m e' un numero pari quindi si può riscrivere $(2k)^2 = 2n^2$

$4k^2 = 2n^2$ semplifico per due

$2k^2 = n^2$

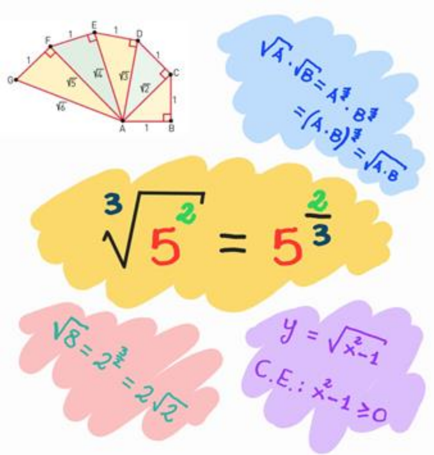
ottengo che anche n e' un numero pari

m e n non possono essere contemporan. pari ⇐ sono arrivata ad un assurdo perché la frazione m/n era irriducibile (m e n erano primi fra loro)

Conclusione

L'affermazione che $\sqrt{2}$ sia razionale non è vera come volevasi dimostrare (c.v.d.)

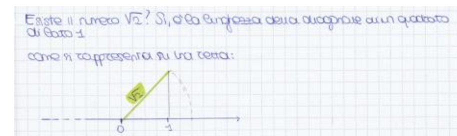
Alcuni studenti hanno poi chiesto, a proposito di numeri irrazionali, come si può determinare il valore di π e l'insegnante ha suggerito una ricerca in rete e un'attività sperimentale della misura del rapporto tra la misura di diverse circonferenze e il loro diametro.



sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

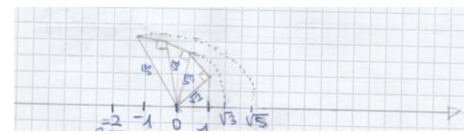
Poi l’insegnante ha chiesto:

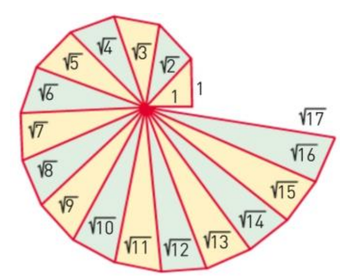
- se un numero come $\sqrt{2}$ sia concretamente rappresentabile sulla retta;
- e in caso affermativo come si possa procedere.

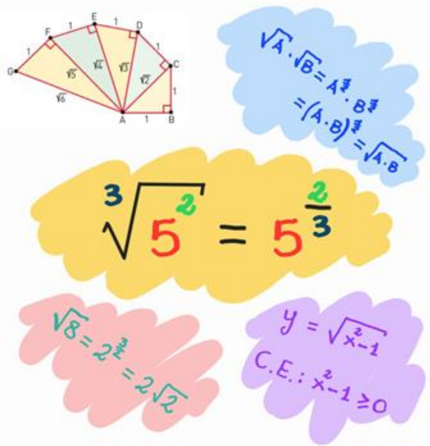


Per favorire le risposte l’insegnante ha poi suggerito agli studenti:

- di costruire la diagonale di un quadrato di lato 1 (quindi $\sqrt{2}$ esiste!);
- di disegnare l’ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele con un cateto corrispondente al segmento di estremi 0 e 1 sulla retta, riportando poi tale ipotenusa su di essa mediante l’uso del compasso (quindi $\sqrt{2}$ si può rappresentare);
- per la rappresentazione di $\sqrt{3}$, si può procedere in modo analogo costruendo un nuovo triangolo rettangolo avente per base il segmento di lunghezza $\sqrt{2}$ e altezza 1, riportando poi l’ipotenusa sulla retta. Analogamente per rappresentare altri numeri irrazionali.





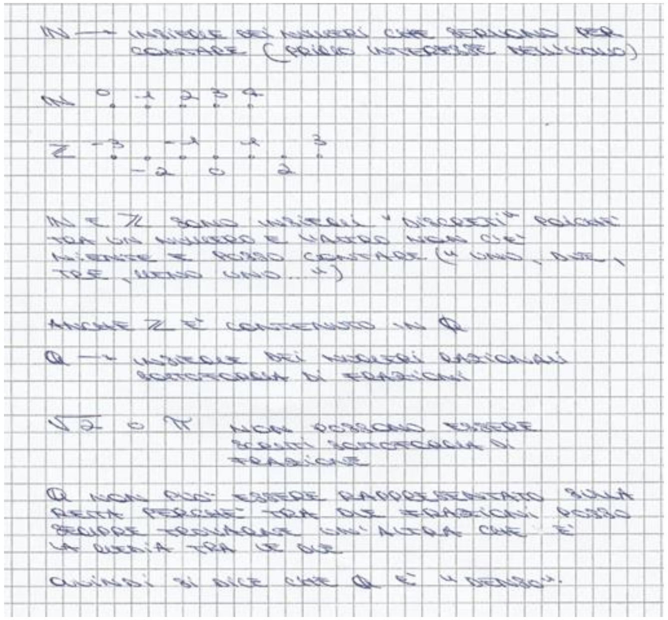


sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

Concludendo, se $\sqrt{2}$ non è razionale, non lo è nemmeno $2\cdot\sqrt{2}$ o $(1/2)\cdot\sqrt{2}$ e così via.

Nonostante i numeri razionali siano rappresentati da punti infinitamente vicini sulla retta, essa è piena di "buchi", infiniti "buchi", occupati dai numeri irrazionali. La retta quindi non è la rappresentazione corretta per l'insieme **Q**.

È l'insieme **R** dei numeri **reali**, unione dell'insieme dei numeri razionali e di quello degli irrazionali, a essere un insieme **continuo** in corrispondenza biunivoca con i punti della retta.


N → INSIEME DEI NUMERI CHE SERVONO PER CONTARE (PRIMO INTERESSE DELL'UOMO)

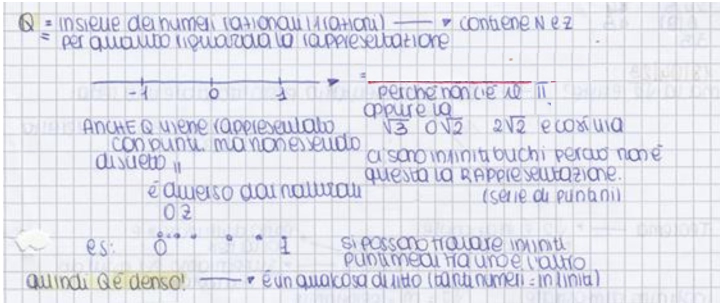
N 0 1 2 3 4

Z -3 -2 -1 0 1 2 3

ANCHE Z È CONTENUTO IN Q

$\sqrt{2}$ o π NON POSSONO ESSERE SCRITTI SOTTOFORMA DI FRAZIONE

QUINDI SI DICE CHE Q È "DENSO".


Q = insieme dei numeri rationali (rationi) → contiene N e Z
per quanto riguarda la rappresentazione

-1 0 1

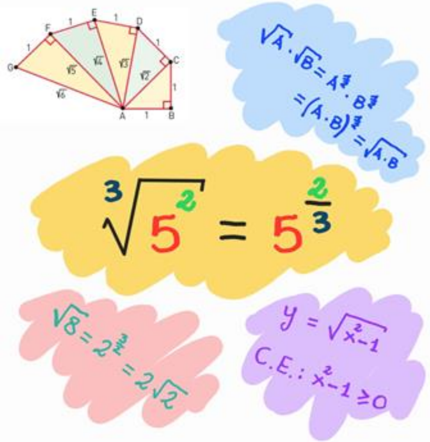
perché non c'è il π
oppure la $\sqrt{3}$ o $\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}$ e così via

Anche Q viene rappresentato con punti, ma non essendo discreto
è diverso dai naturali o Z

ci sono infiniti buchi perciò non è questa la rappresentazione.
(serie di puntini)

es: 0 1 si possono trovare infiniti punti medi tra uno e l'altro

quindi Q è denso! → è un qualcosa di fitto (tanti numeri = infinità)



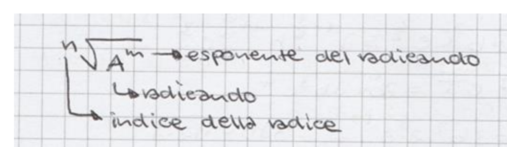
sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

Ritornando alla definizione di radice, l'insegnante ha esteso alla radice n-sima le considerazioni fatte per le radici quadrate e le radici cubiche:

la radice n-sima di un numero reale *A*, con un numero naturale $n\neq0$,

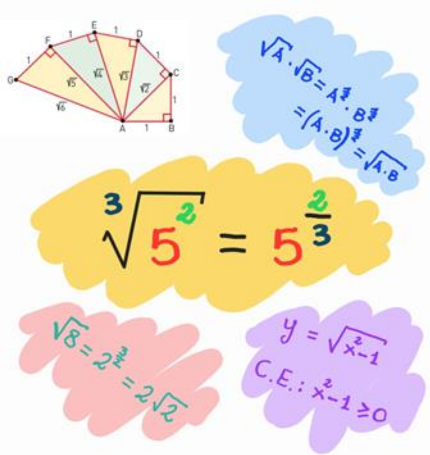
è il numero reale *B* per cui $\sqrt[n]{A}=B \quad \leftrightarrow \quad B^n=A$ distinguendo i casi

- se *n* è dispari, *B* ha lo stesso segno di *A*;
- se *n* è pari e $A\geq0$, per convenzione consideriamo solo la soluzione positiva, $B\geq0$;
- se *n* è pari e $A<0$, non esiste alcun numero reale *B*.



$\sqrt[n]{A}$ si dice *radicale*, *n* è detto *indice* e *A* si chiama *radicando*;

se il radicando è scritto sotto forma di potenza, $\sqrt[n]{A^m}$, *m* si chiama *esponente del radicando*.



sviluppo del percorso partecipato

L'insegnante ha proposto:
a) di calcolare le seguenti radici, se esistono, in **R**:

$\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{-32}$, $\sqrt[6]{-64}$;

b) di indicare quali condizioni di esistenza (C.E.) devono essere poste per le seguenti espressioni:

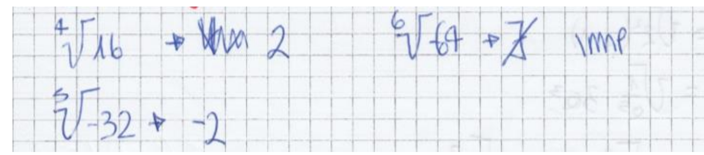
$\sqrt{\frac{x}{x-3}}$, $\sqrt[3]{\frac{x}{x-2}}$, $\sqrt{x}+\sqrt{x+3}$.

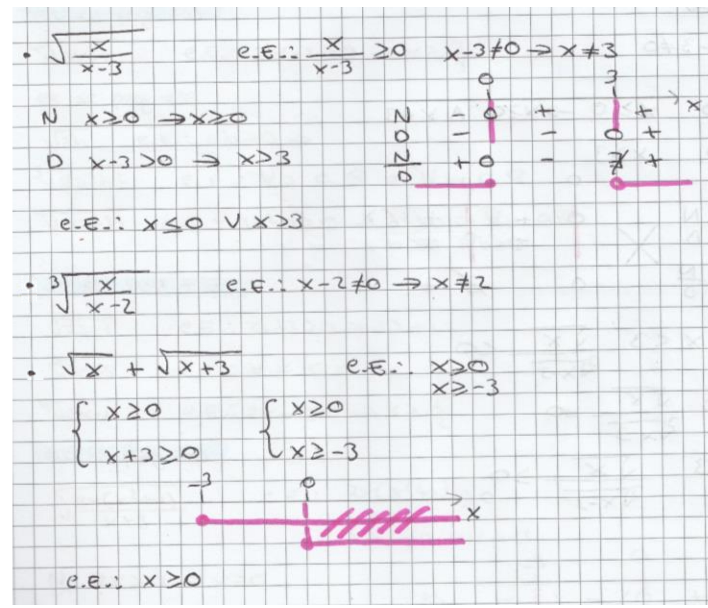
Gli interventi degli studenti possono essere così riassunti:

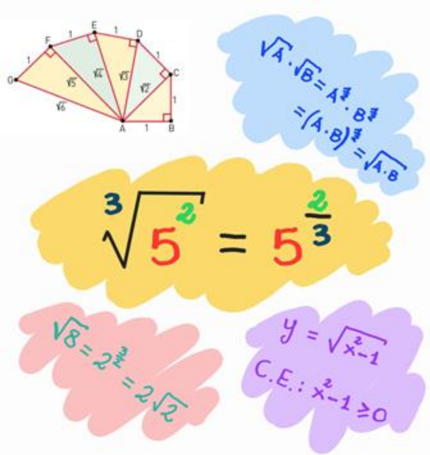
«se l'indice della radice è pari, il radicando deve essere posto maggiore o uguale a zero»;

«se l'indice della radice è dispari, il radicando può essere sia positivo che negativo»;

«se il radicando è una frazione algebrica, il denominatore deve essere posto diverso da zero».







sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

L'insegnante ha poi fatto notare che dalla definizione di radice nasce l'idea che ci sia una stretta relazione tra questa operazione e le potenze; possiamo quindi esprimere la radice in un'altra forma.

Ad esempio:

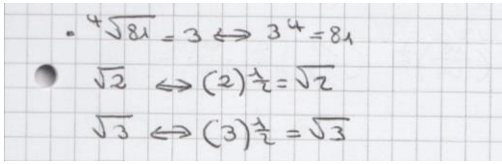
se $\sqrt[3]{27}=3,$ sostituendo $27=3^3$

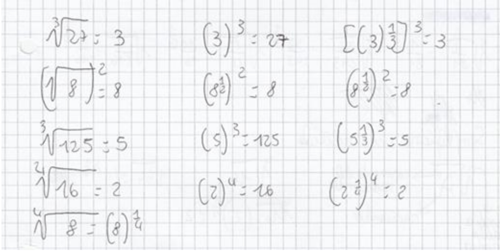
otteniamo $\left(3^3\right)^? = 3$

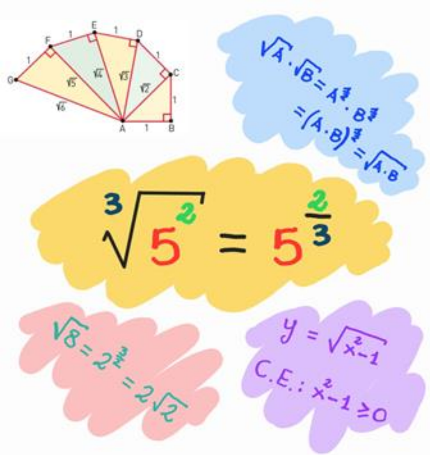
e per le proprietà delle potenze $\left(3^3\right)^{\frac{1}{3}}=3$,

quindi $\sqrt[3]{27}=\left(27\right)^{\frac{1}{3}}$

esprimendo così la radice come potenza a esponente razionale.







sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

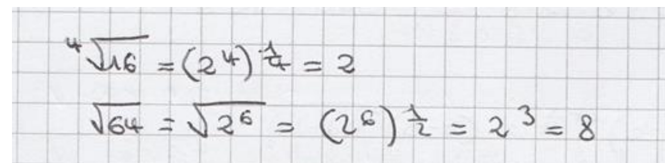
L’insegnante ha proposto alcuni esercizi in cui utilizzare questa diversa modalità di esprimere la radice per semplificare radicali numerici e letterali o per eseguire le operazioni con essi.

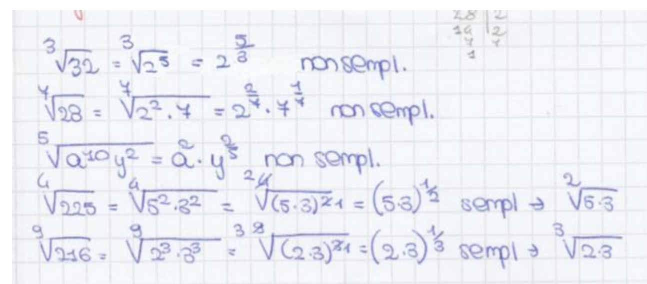
Ha suggerito per la **semplificazione** dei radicali:

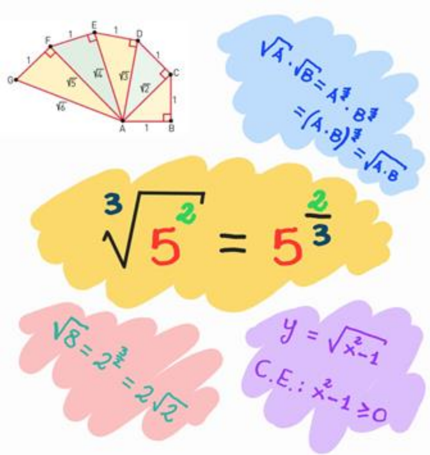
- di scomporre in fattori il radicando
- di scrivere il radicale come potenza a esponente razionale
- di semplificare, quando possibile, la frazione ottenuta all’esponente. Ad esempio:

$$\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=(2)^{\frac{2}{6}}=(2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}$$

$\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^3}=(2)^{\frac{3}{4}}$ *irriducibile*: non si può semplificare.







esercizi proposti

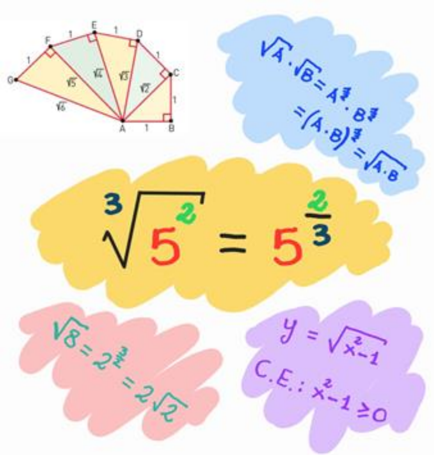
Semplifica, se possibile, i seguenti radicali supponendo non negativi i radicandi e i fattori letterali che vi compaiono:

$$\sqrt[10]{32a^5b^5} = (2^5a^5b^5)^{1/10} = [(2ab)^5]^{1/10} = \sqrt{2ab}$$

$$\sqrt[6]{a^2(a^2-4a+4)} = (a^2(a-2)^2)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[3]{a(a-2)}$$

$$\sqrt[4]{\frac{x^3-2x^2}{16x-32}} = \left(\frac{x^2\cancel{(x-2)}}{2^4\cancel{(x-2)}}\right)^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{x^2}{2^4}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$$

$$\sqrt[9]{\frac{8a^6}{a^3+3a^2+3a+1}} = \left(\frac{2^3a^6}{(a+1)^3}\right)^{\frac{1}{9}} = \frac{2^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}}{(a+1)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{2a^2}{a+1}}$$



sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

Nel caso di radicali letterali l'insegnante ha invitato gli studenti a fare attenzione, oltre che alle condizioni di esistenza, anche al segno dei radicali e li ha guidati nella risoluzione degli esercizi. Ha consigliato di controllare che il radicale iniziale e quello semplificato abbiano:

- le stesse condizioni di esistenza,
- lo stesso segno.

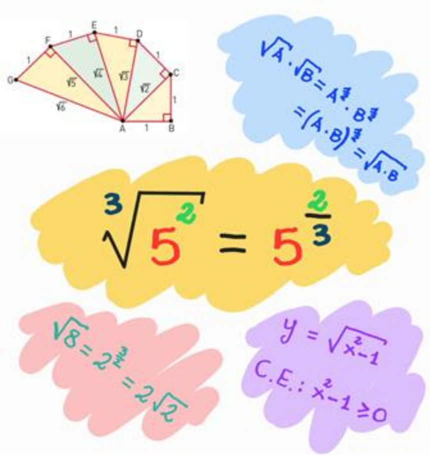
Ad esempio: a) $\sqrt[9]{a^6}=(a)^{\frac{6}{9}}=(a)^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}$

l'indice è dispari C.E.: $\forall a\in$ **R**, il segno dei due radicali è lo stesso.

b) $\sqrt[6]{a^3}=(a)^{\frac{3}{6}}=(a)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

C.E.(I): $a^3\geq 0\rightarrow a\geq 0$ C.E.(II): $a\geq 0\rightarrow a\geq 0$ entrambi i radicali esistono per $a\geq 0$.

Segno: non negativo per entrambi i radicali per $a\geq 0$.



sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

Altri esempi:

c) $\sqrt[4]{a^2}=(a)^{\frac{2}{4}}=(a)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}$

C.E.(I): $a^2\geq 0\rightarrow\forall a\in$ **R**, C.E.(II): $a\geq 0\rightarrow a\geq 0$ le condizioni di esistenza sono diverse.

Affinché il radicale semplificato esista $\forall a\in$**R**, utilizziamo il valore assoluto: $\sqrt[4]{a^2}=(a)^{\frac{2}{4}}=\left(|a|\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{|a|}$.

Entrambi i radicali sono non negativi.

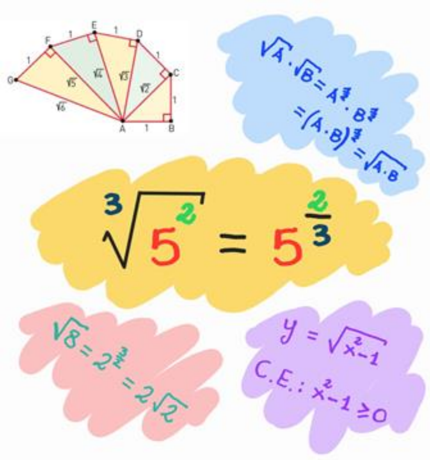
d) $\sqrt[6]{a^2}=(a)^{\frac{2}{6}}=(a)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}$

C.E.(I): $a^2\geq 0\rightarrow\forall a\in$**R**, C.E.(II): $\forall a\in$ **R**, entrambi i radicali esistono per $\forall a\in$ **R**,

Segno (I): non negativo per $\forall a\in$ **R**, Segno (II): non negativo per $a\geq 0$.

Affinché il radicale semplificato sia non negativo $\forall a\in$ **R**, utilizziamo il valore assoluto:

$$\sqrt[6]{a^2}=(a)^{\frac{2}{6}}=\left(|a|\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{|a|}.$$



esercizi proposti

Determina le condizioni di esistenza:

$\sqrt{-a}$ $\quad -a \geq 0 \to a \leq 0$ C.E.

$\sqrt{a^2}$ $\quad$ C.E.: $a^2 \geq 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{a^5}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\sqrt[4]{-2x^2}$ $\quad -2x^2 \geq 0$ impossibile

$$\sqrt[4]{\frac{a^2+a}{a-2}} = \sqrt[4]{\frac{a(a+1)}{a-2}}$$

C.E.: $a-2 \neq 0$

$a \neq 2$

	-1	0	2	
I $\quad a \geq 0$	$-$	$-$	$+$	$+$
II $\quad a+1 \geq 0 \to a \geq -1$	$-$	$+$	$+$	$+$
III $\quad a-2 > 0 \to a > 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
	$-$	$+$	$-$	$+$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 0 \wedge x > 2\}$

$$\sqrt[3]{\frac{x^3}{1-x^2}} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{(1-x)(1+x)}}$$

C.E.: $x \neq \pm 1$

Semplifica, se possibile, i seguenti radicali dopo aver indicato le condizioni di esistenza e introduci il valore assoluto quando necessario:

$\sqrt[4]{16(a-1)^2}$ $\quad$ C.E.: $\forall a \in \mathbb{R}$

$\sqrt[2]{4|(a-1)|}$

$\sqrt[6]{a^2(a+3)^4}$ $\quad$ C.E.: $\forall a \in \mathbb{R}$

$\sqrt[3]{|a|(a+3)^2}$

$\sqrt[6]{\frac{8a^3}{b^6}}$ $\quad$ C.E.: $a \geq 0 \quad b^6 \neq 0 \to b \neq 0$

$\sqrt[2]{\frac{2a}{b^2}}$

$\sqrt{x^2-6x+9}$ $\quad$ C.E.: $(x-3)(x-3) \geq 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$

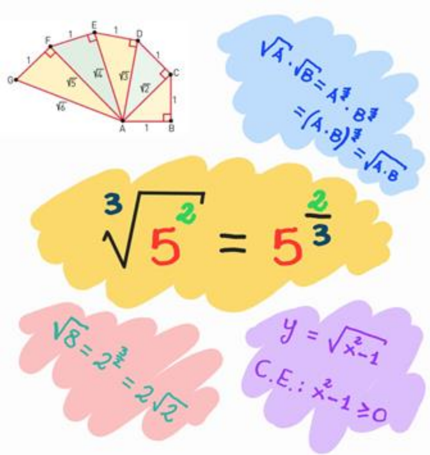
$\sqrt{(x-3)^2} \to |x-3|$

$\sqrt{a^4-8a^2+16}$ $\quad$ C.E.: $(a^2-4)^2 \geq 0 \to \forall a \in \mathbb{R}$

$\sqrt{(a^2-4)^2} \to |a^2-4|$

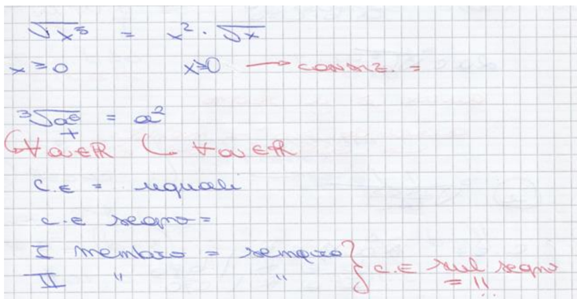
$\sqrt{4a^2x^2}$ $\quad$ C.E.: $4a^2x^2 \geq 0 \to \forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall a \in \mathbb{R}$

$2|ax|$



esercizi proposti

Semplifica, se possibile, i seguenti radicali dopo aver indicato le condizioni di esistenza e introduci il valore assoluto quando necessario:



$\sqrt{x^5} = x^2\cdot\sqrt{x}$

$x \geq 0$ $x \geq 0$ → coincidenti

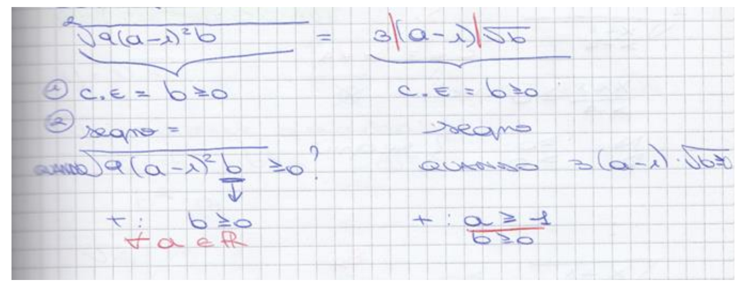
$\sqrt[3]{a^6} = a^2$

C ∀a∈R C ∀a∈R

C.E = uguali

C.E segno =

I membro = sempre
II " "
C.E nel segno = "



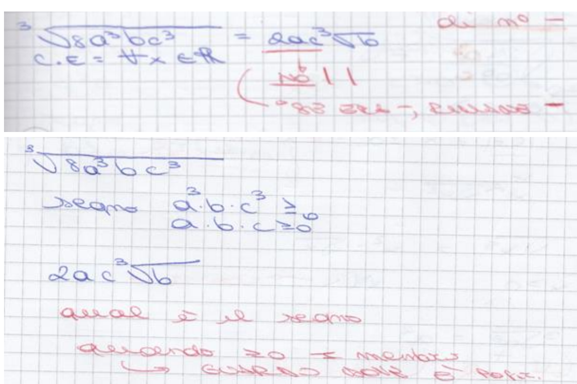
$\sqrt{9(a-1)^2 b} = 3|a-1|\sqrt{b}$

① C.E = $b \geq 0$ C.E = $b \geq 0$

② segno = segno

quando $\sqrt{9(a-1)^2 b} \geq 0$? quando $3(a-1)\cdot\sqrt{b} \geq 0$

+ : $b \geq 0$ ∀a∈R + : $a \geq 1$, $b \geq 0$



$\sqrt[3]{8a^3bc^3} = 2ac\sqrt[3]{b}$

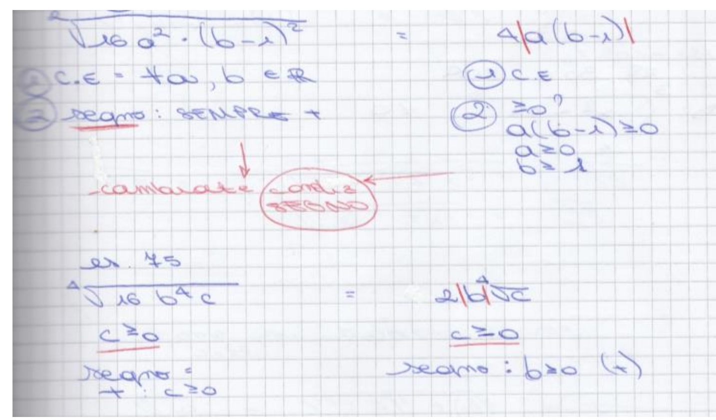
C.E = ∀x∈R

segno $a^3\cdot b\cdot c^3 \geq 0$
$a\cdot b\cdot c \geq 0$

$2ac\sqrt[3]{b}$

qual è il segno

quando ≥ 0 I membro



$\sqrt{16a^2\cdot(b-1)^2} = 4|a(b-1)|$

① C.E ∀a, b ∈R ① C.E

② segno: sempre + ② ≥0? $a(b-1) \geq 0$, $a \geq 0$, $b \geq 1$

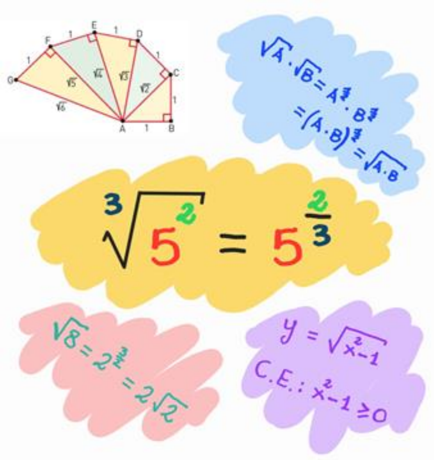
cambiate cond. e segno

es. 45

$\sqrt[4]{16b^4c} = 2|b|\sqrt[4]{c}$

$c \geq 0$ $c \geq 0$

segno: + : $c \geq 0$ segno: $b \geq 0$ (+)



sviluppo del percorso partecipato

A questo punto sono state affrontate le operazioni con i radicali ed è stato supposto che, nel caso di radicali letterali, le condizioni di esistenza fossero soddisfatte.

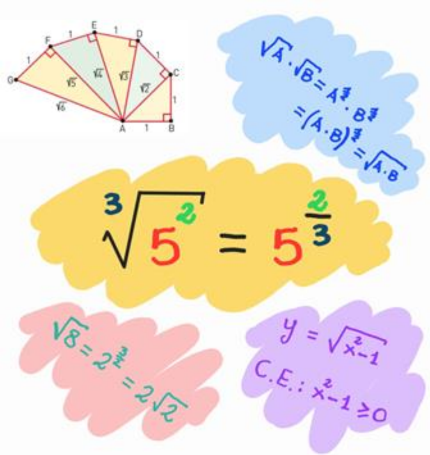
Di seguito è riportato come l'insegnante ha accompagnato gli studenti a ricavare ed eseguire le operazioni con i radicali.
L'insegnante ha invitato gli studenti a eseguire le seguenti **moltiplicazioni** con i radicali:

a) $\sqrt{\frac{10}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$ b) $\sqrt[6]{\frac{16}{27}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}$;

$$\sqrt{\frac{10}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\left(\frac{10}{3}\right)^{\frac12}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac12}=\left(\frac{\overset{5}{\cancel{10}}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\right)^{\frac12}=5^{\frac12}=\sqrt{5}$$

$$\sqrt[6]{\frac{16}{27}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=\left(\frac{16}{27}\right)^{\frac16}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac12\cdot\frac33}=\left(\frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\cancel{27}}\right)^{\frac16}\cdot\left(\frac{\cancel{3^3}}{\cancel{2^3}}\right)^{\frac16}=\sqrt[6]{2}$$

I ragazzi hanno osservato che:
«nella prima operazione, dopo aver trasformato i radicali in potenze a esponente razionale, basta applicare le proprietà delle potenze che hanno lo stesso esponente»;
«nella seconda, le potenze non hanno le stesse basi né gli stessi esponenti…»,
L'insegnate ha suggerito di portare l'esponente delle due potenze allo stesso denominatore…
«… possiamo moltiplicare per 3 il numeratore e il denominatore dell'esponente della seconda potenza»
… e di mettere fuori dalla parentesi l'esponente 1/6….
«… ora possiamo moltiplicare le basi».
L'insegnante ha poi chiesto se la moltiplicazione sia possibile qualunque siano gli indici delle radici e la risposta è stata:
«sì, basta calcolare il m.c.m. dei denominatori degli esponenti e quindi il m.c.m. degli indici».



sviluppo del percorso partecipato

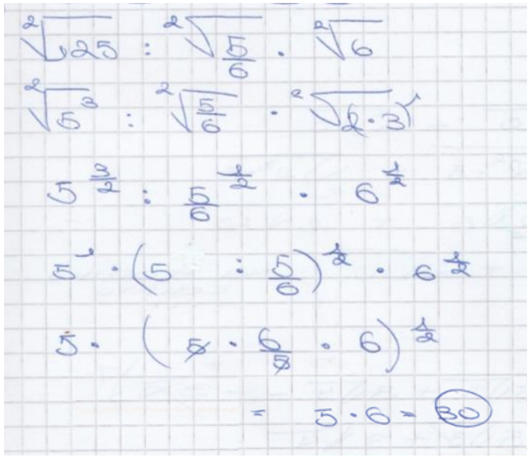
È stato poi chiesto come procedere nel caso della **divisione**…

«possiamo moltiplicare la prima potenza per il reciproco della seconda»:

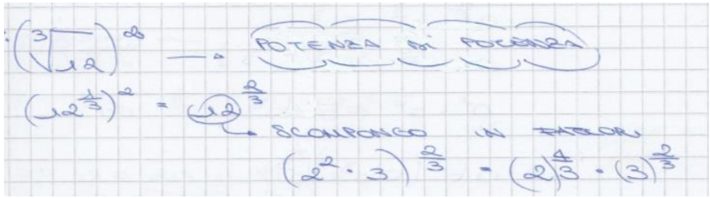
… e della **potenza** di un radicale…

«basta applicare la proprietà della potenza di potenza moltiplicando i due esponenti»

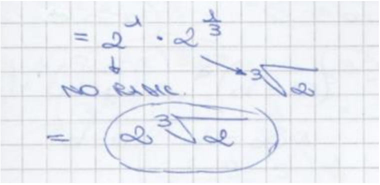
a) $\sqrt{125} : \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot \sqrt{6}$ b) $\left(\sqrt[3]{12}\right)^2$



… e nel risolvere il secondo esercizio…

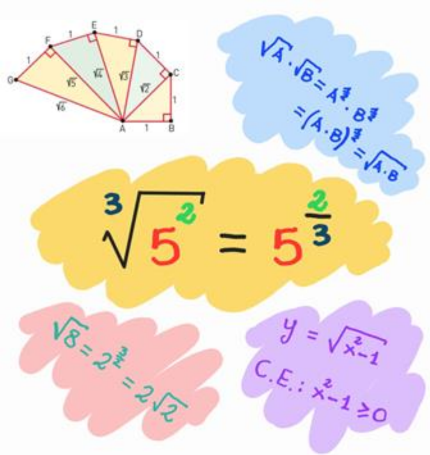


… l'insegnante ha fatto notare la presenza di una frazione impropria a esponente del 2 e ha chiesto agli studenti di riscriverla come somma di un numero intero e di una frazione propria…



e sostituendo si ottiene $\left(2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{2}{3}}\right) = 2 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot 3^2}$

… facendo notare che è stato possibile **trasportare un fattore fuori dalla radice**.



esercizi proposti

Esegui le seguenti moltiplicazioni e divisioni di radicali supponendo verificate le condizioni di esistenza

$(\sqrt{8}\cdot\sqrt{48}):(\sqrt{24}\cdot\sqrt{6})$

$[(2^3)^{\frac12}\cdot(2^4\cdot 3)^{\frac12}]:[(2^3\cdot 3)^{\frac12}\cdot(2\cdot 3)^{\frac12}]$

$(2^7\cdot 3)^{\frac12}:(2^4\cdot 3^2)^{\frac12}$

$(2^3)^{\frac12}:(3)^{\frac12}=\sqrt{\frac{8}{3}}$

es

$\sqrt{\frac{2a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{ab^2}{6}}\rightarrow\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac12\cdot\frac33}\cdot\left(\frac{ab^2}{6}\right)^{\frac13\cdot\frac22}\rightarrow\left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac36}\cdot\left(\frac{ab^2}{6}\right)^{\frac26}$

$\left(\frac{8a^3}{b^3}\right)^{\frac16}\cdot\left(\frac{a^2b^4}{36}\right)^{\frac16}\rightarrow\left(\frac{8a^5b^4}{36b^3}\right)^{\frac16}\rightarrow\left(\frac{2a^5b}{9}\right)^{\frac16}$

es

$\sqrt[3]{\frac53}\cdot\sqrt[3]{\frac{9}{25}}\cdot\sqrt[3]{\frac52}\rightarrow\left(\frac53\right)^{\frac13}\cdot\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac13}\cdot\left(\frac52\right)^{\frac13}$

$\left(\frac32\right)^{\frac13}$

$\sqrt[4]{4a^3b^2}\cdot\sqrt[3]{4a^2b}=(2^2a^3b^2)^{\frac14\cdot\frac33}(2^2a^2b)^{\frac13\cdot\frac44}$

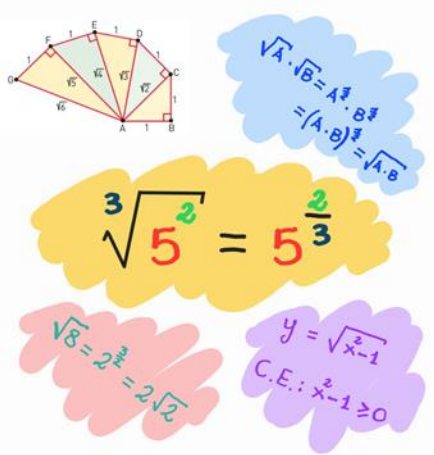
$=(2^6a^9b^6)^{\frac1{12}}(2^8a^8b^4)^{\frac1{12}}$

$=(2^{14}\cdot a^{17}b^{10})^{\frac1{12}}$

$2a\sqrt[12]{2^2a^5b^{10}}$

$\left(\sqrt[4]{\frac{x^5y}{2^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{x^4y}}\right)\cdot\sqrt[4]{\frac{2}{x}}=\left(\frac{x^5y}{2^2}\cdot\frac{2}{x^4y}\cdot\frac{2}{x}\right)^{\frac14}=1$

$\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2+x}}=\left[\frac{(x+1)^2\cdot x^2}{x(x+1)}\right]^{\frac13}=\sqrt[3]{x(x+1)}$

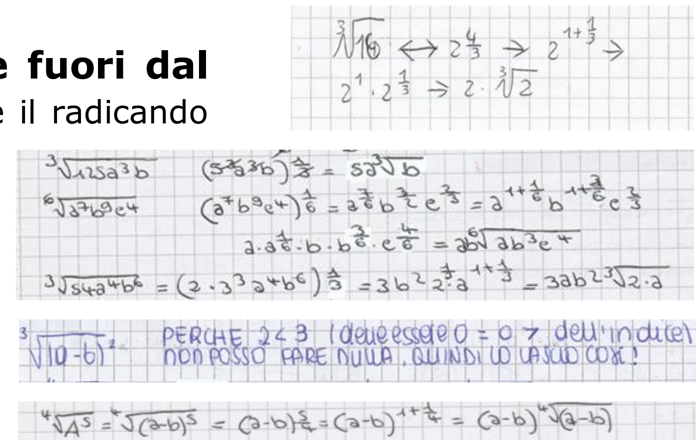


sviluppo del percorso partecipato

Sono stati proposti i seguenti esercizi in cui **trasportare fuori dal segno di radice** tutti i fattori possibili, supponendo che il radicando sia scomposto in fattori non negativi.

a) $\sqrt[3]{16}$ b) $\sqrt[3]{125a^3b}$ c) $\sqrt[6]{a^7b^9c^4}$

d) $\sqrt[3]{54a^4b^6}$ e) $\sqrt[3]{(a-b)^2}$ f) $\sqrt[4]{(a-b)^5}$

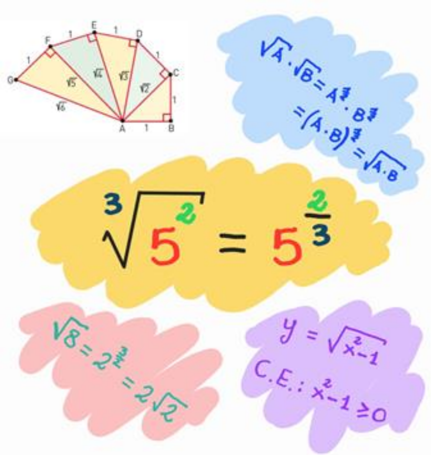


Gli studenti sono stati invitati a riflettere su quali siano le condizioni per trasportare un fattore fuori dal segno di radice e a riassumere il procedimento eseguito, registrando i seguenti interventi:

«quando l'esponente è una frazione impropria e si può riscrivere come somma di un numero intero e una frazione propria…»,
«… anche quando la frazione è apparente, basta semplificare la frazione…»,
«… e quando la frazione è impropria?»

L'insegnante ha suggerito di trovare il quoziente q e il resto r della divisione m/n dove

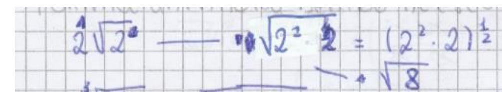
$$m = q\cdot n + r \qquad \text{e} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{q\cdot n+r}{n}} = a^q\cdot a^{\frac{r}{n}} = a^q\cdot\sqrt[n]{a^r}.$$

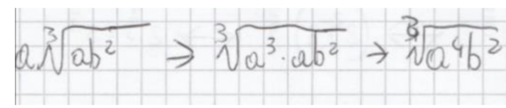


sviluppo del percorso partecipato

È stato poi chiesto come procedere per **trasportare un fattore dentro al segno di radice**…

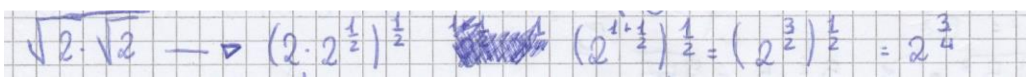
a) $2\sqrt{2}$ b) a $\cdot \sqrt[3]{ab^2}$ c) $\sqrt{2\sqrt{2}}$





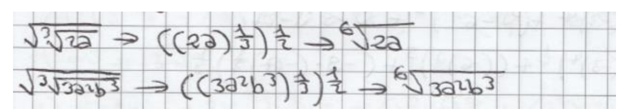
«dopo aver trasformato la radice come potenza a esponente razionale possiamo moltiplicare i due fattori applicando le proprietà delle potenze»

… e, in particolare, nel caso c):

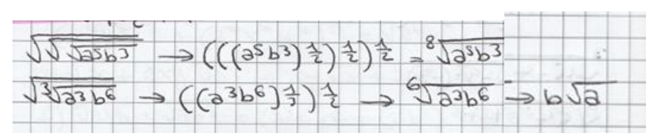


$= \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$.

Per calcolare **la radice di un radicale** sono stati proposti:

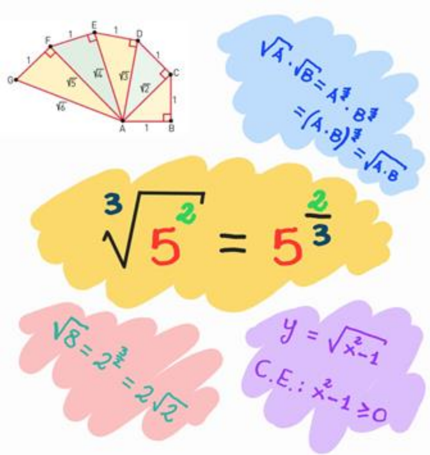


a) $\sqrt{\sqrt[3]{2a}}$ b) $\sqrt{\sqrt[3]{3a^2b^3}}$ c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^5b^3}}}$ d) $\sqrt{\sqrt[3]{a^3b^6}}$



«dopo aver trasformato le radici come potenza a esponente razionale possiamo moltiplicare gli esponenti applicando le proprietà delle potenze…»,

«… ma allora basta fare la moltiplicazione degli indici delle radici iniziali!»



esercizi proposti

Trasporta fuori dal segno di radice tutti i fattori possibili supponendoli non negativi

$\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 3^2}=2^{1/2}\cdot 3^{2\cdot 1/2}\Rightarrow 3\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt{12}=2^{2\cdot\frac{1}{2}}\cdot 3^{1/2}\Rightarrow 2\cdot\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{2\cdot 3^3}=2^{1/3}\cdot 3^{3\cdot 1/3}\Rightarrow 3\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{2^3\cdot 5}=(2^3\cdot 5)^{1/3}\Rightarrow 2\sqrt[3]{5}$

$\sqrt{16b^4c}=\sqrt{2^4b^4c}=2^{4\cdot\frac{1}{2}}\cdot b^{4\cdot 1/2}\cdot c^{1/2}\Rightarrow 4b^2\sqrt{c}$

$\sqrt[3]{27a^2b^{12}x^6}=\sqrt[3]{3^3a^2b^{12}x^6}=3^{3\cdot 1/3}\,a^{2/3}\cdot b^{12\cdot 1/3}\,x^{6\cdot 1/3}\Rightarrow 3b^4x^2\sqrt[3]{a^2}$

$\sqrt[3]{12x^3y^2}=\sqrt[3]{2^2\cdot 3\,x^3y^2}=2^{2\cdot\frac{1}{3}}\cdot 3^{1/3}\,x^{3\cdot 1/3}\,y^{2/3}\Rightarrow x\sqrt[3]{12y^2}$

$\sqrt{5a^8bc^2}=(5a^8bc^2)^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}}a^4b^{\frac{1}{2}}c=a^4c\sqrt{5b}$

$\sqrt[3]{6ab^3c^6}=(6ab^3c^6)^{\frac{1}{3}}=6^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}bc^2=bc^2\sqrt[3]{6a}$

$\sqrt[3]{a^3+3a^2+3a+1}=\sqrt[3]{(a+1)^3}=a+1$

$\sqrt[3]{a^6(x-y)^3}=a^2(x-y)$

$\sqrt{(9-x^2)(3-x)}=\sqrt{(3-x)^2(3+x)}$

$(3-x)\sqrt{3+x}$

Trasporta i fattori dentro al segno di radice supponendoli non negativi

$\sqrt[3]{2x\sqrt{x}}=(2x(x)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}=(2x)^{\frac{1}{3}}\cdot(x)^{\frac{1}{6}}=(4x^2)^{\frac{1}{6}}\cdot(x)^{\frac{1}{6}}=$

$\sqrt[6]{4x^3}$

$\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\sqrt{\frac{2}{9}}}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\left[\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2}:(\sqrt{2})^3\right]^3$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot(2)^{\frac{1}{4}}\cdot\left[(3)^{\frac{1}{3}}\cdot(2)^{\frac{1}{2}}:(2^3)^{\frac{1}{2}}\right]^3$

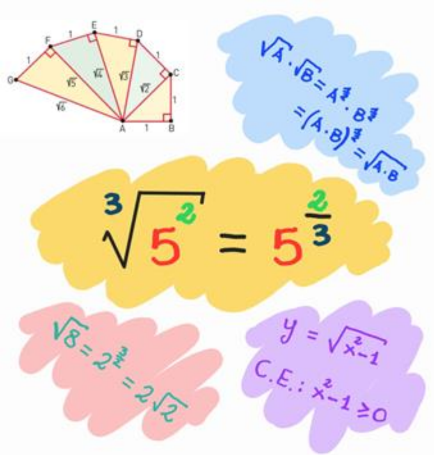
$\left(\frac{2^2}{3^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2}{3^2}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot(2)^{\frac{1}{4}}\cdot\left[(3^2)^{\frac{1}{6}}\cdot(2^3)^{\frac{1}{6}}:(2^9)^{\frac{1}{6}}\right]^3$

$\left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left[(3^2)^{\frac{1}{6}}\cdot(2^3)^{\frac{1}{6}}\cdot\frac{1}{(2^9)^{\frac{1}{6}}}\right]^3$

$\left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left[\left(\frac{3^2}{2^6}\right)^{\frac{1}{6}}\right]^3$

$\left(\frac{2^4}{3^4}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{3^6}{2^{18}}\right)^{\frac{1}{6}}$

$\sqrt[4]{\frac{2^4}{3^4}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3^6}{2^{18}}}=\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{2^{\cancel{3}2}}=\frac{1}{4}$



sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

Per **l'addizione e la sottrazione** di radicali l'insegnante ha sottolineato che queste operazioni sono possibili se radicali irriducibili hanno lo stesso indice, lo stesso radicando e differiscono solo per un diverso fattore che li moltiplica, detto coefficiente del radicale;
tali radicali si dicono **simili**.
Ad esempio,
le coppie $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$ oppure $\sqrt[4]{5}$ e $\sqrt[3]{5}$ non sono simili,

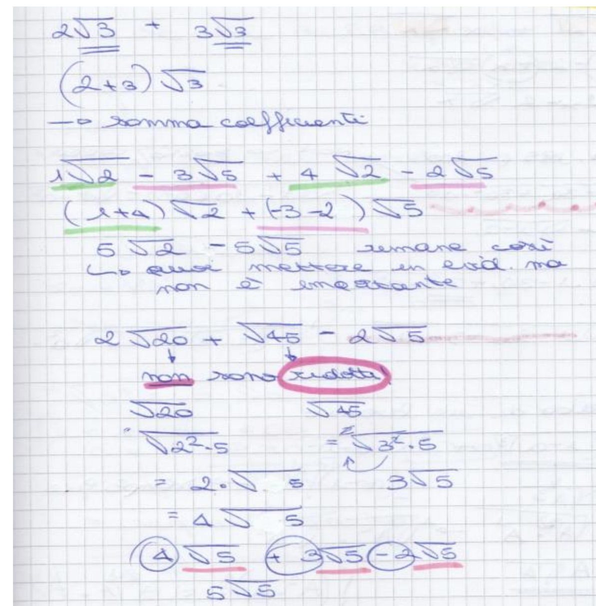
mentre sono simili: $\sqrt[3]{4}$ e $5\sqrt[3]{4}$ oppure $3\sqrt[5]{2}$ e $6\sqrt[5]{2}$;

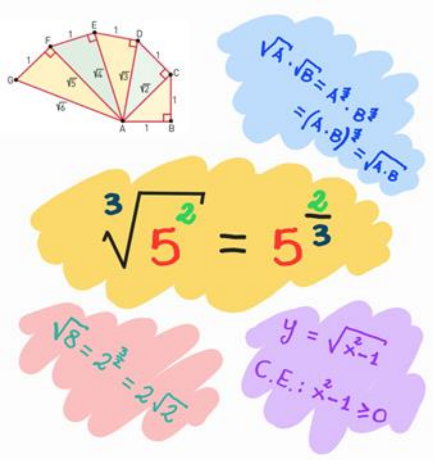
possono essere trasformati in radicali simili anche
$\sqrt{3}$ e $\sqrt{12}$ se si riscrive $\sqrt{12}$ come

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 3} = (2^2 3)^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$$

portando fuori dalla radice alcuni fattori.

Esercizi proposti in classe:





esercizi proposti

Semplifica le seguenti espressioni supponendo verificate le condizioni di esistenza

$\sqrt{12}-\sqrt{27}=-\sqrt{15}$ No, perché $\sqrt{a}-\sqrt{b}\neq-\sqrt{b-a}$

$\sqrt{12}-\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 2^2}-\sqrt{3^3}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=-1\sqrt{3}$

e) $\sqrt{x^3y^2}+2x\sqrt[4]{x^2y^4}=(x^3y^2)^{\frac{1}{2}}+(2^4x^6y^4)^{\frac{1}{4}}=$

$(x^6y^4)^{\frac{1}{4}}+(2^4x^6y^4)^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{2^4x}$

$xy\sqrt{x}+2xy\sqrt[4]{x^2}=xy\sqrt{x}+2xy\sqrt{x}=3xy\sqrt{x}$

f) $\sqrt[4]{a^3b}:\sqrt{ab^2}=(a^3b)^{\frac{1}{4}}:(ab^2)^{\frac{1}{2}}=(a^3b)^{\frac{1}{4}}:(a^2b^4)^{\frac{1}{4}}=$

$\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}}$

$\sqrt{a^5}-3a^2\sqrt{a}+2a^2\sqrt{a}$

$(a^5)^{\frac{1}{2}}-3a^2\cdot(a)^{\frac{1}{2}}+2a^2\cdot(a)^{\frac{1}{2}}$

$a^2(a)^{\frac{1}{2}}-3a^2(a)^{\frac{1}{2}}+2a^2(a)^{\frac{1}{2}}\longrightarrow[a^2-3a^2+2a^2]\cdot(a)^{\frac{1}{2}}$

$=0\sqrt{a}=$ zero

$\frac{5}{4}\sqrt{a}-\frac{1}{2}\sqrt{b}+\frac{3}{4}\sqrt{b}-\frac{2}{8}\sqrt{a}\longrightarrow\left[\frac{5}{4}-\frac{2}{8}\right](a)^{\frac{1}{2}}+\left[-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right](b)^{\frac{1}{2}}$

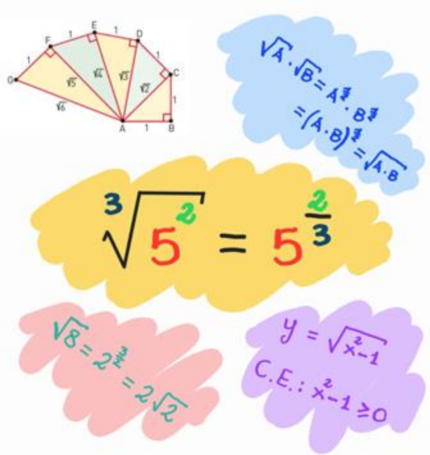
$\frac{8}{8}(a)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}(b)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}+\frac{1}{4}\sqrt{b}$

) $\sqrt[3]{9}:\sqrt{27}=(9)^{\frac{1}{3}}:(27)^{\frac{1}{2}}=(9)^{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}}:(27)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}}$

$=(9^2)^{\frac{1}{6}}:(27^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{3^4}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{3^9}}=\frac{1}{\sqrt[6]{3^5}}$

) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}=\left(2\left(2(2)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(2\left(2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{8}}$

$(2^4)^{\frac{1}{8}}\cdot(2^2)^{\frac{1}{8}}\cdot(2)^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{2^7}$



sviluppo del percorso partecipato

Talvolta può essere utile **razionalizzare il denominatore di una frazione**, cioè trasformare la frazione in una equivalente in cui non compaiono radicali a denominatore.

L'insegnante ha proposto di razionalizzare il denominatore di: a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

«potremmo moltiplicare e dividere la prima frazione per $\sqrt{2}$: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ …»

«… e la seconda frazione per $\sqrt[3]{2}$… »,
«… ma a denominatore rimane $\sqrt[3]{4}$ …»

$$\frac{2x}{\sqrt{xy}} = \frac{2x}{(xy)^{1/2}} \cdot \frac{(xy)^{1/2}}{(xy)^{1/2}} = \frac{2\cancel{x}}{xy}(xy)^{1/2} = \frac{2\sqrt{xy}}{y}$$

L'insegnante ha suggerito di scrivere il denominatore come potenza a esponente razionale:

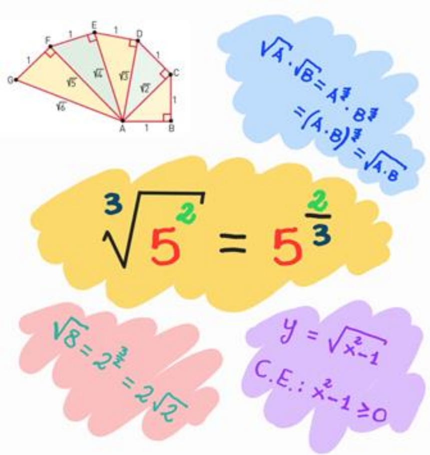
$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{2^{\frac{?}{3}}}{2^{\frac{?}{3}}} = \frac{2^{\frac{?}{3}}}{2}$. Cosa deve essere sostituito a ?, affinché l'uguaglianza sia verificata?

«… 2, così la somma di $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ ha come risultato 1».

L'insegnante ha invitato a riflettere su come possa essere razionalizzata la frazione $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$ e alla fine ha suggerito la relazione:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} \cdot \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{a^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{a^{\frac{n-m}{n}}}{a} = \frac{\sqrt[n]{a^{n-m}}}{a}.$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4}{(2^2)^{1/3}} = \frac{4}{(2^2)^{1/3}} \cdot \frac{2^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}} = \frac{4 \cdot 2^{1/3}}{(2^2 \cdot 2)^{1/3}} = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\sqrt[3]{2}}{\cancel{2}_1} = 2\sqrt[3]{2}$$



sviluppo del percorso partecipato

L'insegnante ha proposto di razionalizzare il denominatore di: $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

«Potremmo moltiplicare e dividere la frazione per $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ …»

«$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2}$ … ma a denominatore rimane un radicale nel doppio prodotto»,

L'insegnante ha suggerito di pensare a un prodotto notevole che abbia come risultato solo termini al quadrato…

«la somma per la differenza di due monomi, possiamo allora moltiplicare e dividere la prima frazione per $\sqrt{2}-\sqrt{3}$»,

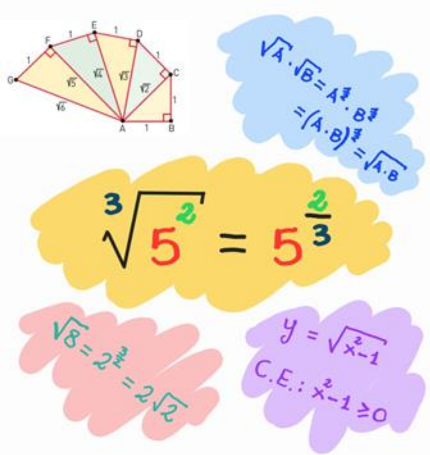
… e ha scritto alla lavagna quanto indicato dagli studenti, sia per l'esercizio proposto… :

«$\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = -\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$ ».

$$\frac{a-ab^2}{\sqrt{a}-2b} = \frac{a-ab^2}{[(a)^{1/2}-2b]} \cdot \frac{(a)^{1/2}+2b}{(a)^{1/2}+2b} = \frac{\cancel{(a-ab^2)}}{\cancel{(a-ab^2)}} \cdot (\sqrt{a}+2b)$$

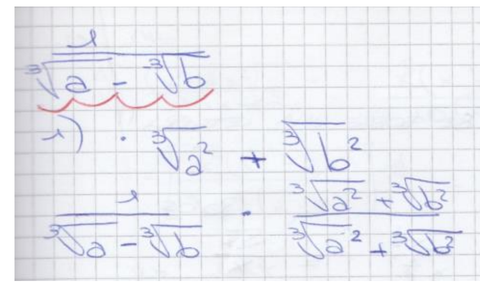
... che per la relazione generale, :

$$\frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}\pm\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}\mp\sqrt{b}}{a-b}\ .$$



sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

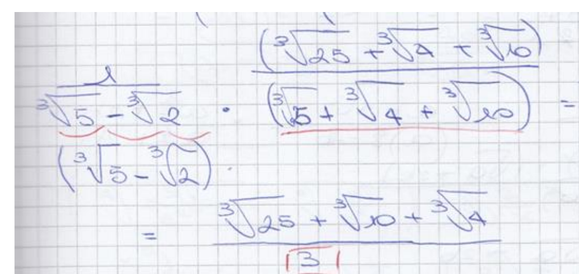
L'insegnante ha proposto di razionalizzare il denominatore di $\frac{1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}$ …

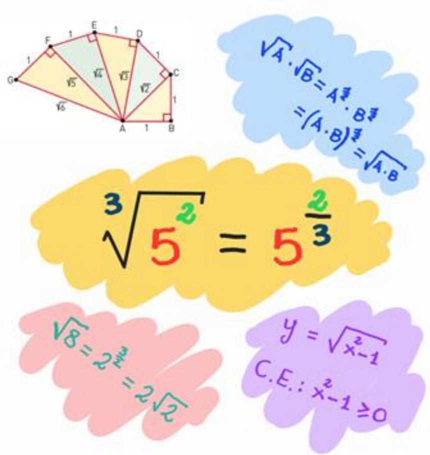


«Potremmo moltiplicare e dividere la frazione per $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}$ …»,
«… no, a denominatore rimangono radicali…»

… e ha suggerito di sfruttare i prodotti notevoli, in modo analogo al caso precedente; ha poi guidato gli allievi a determinare la relazione generale, utilizzando la somma e la differenza di cubi:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}}\cdot\frac{(\sqrt[3]{a})^2\mp\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}{(\sqrt[3]{a})^2\mp\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}=\frac{(\sqrt[3]{a})^2\mp\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+\left(\sqrt[3]{b}\right)^2}{a\pm b}$$





esercizi proposti

A questo punto l'insegnante ha proposto i seguenti esercizi in cui si richiedeva di utilizzare le conoscenze e competenze acquisite per risolvere
equazioni a coefficienti irrazionali…

Equazioni intere

$\sqrt{5}\,x = 2 - x$

$\sqrt{5}\,x + x = 2$

$x(\sqrt{5}+1) = 2$

$x = \frac{2}{\sqrt{5}+1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}-1} = \frac{2(\sqrt{5}-1)}{5-1} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{5}-1)}{\cancel{4}\,2}$

$(\sqrt{3}x-1)^2 + (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 4x^2$

$\cancel{3x^2} - 2\sqrt{3}\,x + 1 \cancel{+x^2} - 3 = \cancel{4x^2}$

$-2\sqrt{3}\,x = 2$

$x = \frac{2}{-2\sqrt{3}}$ $\quad x = \frac{2}{-2(3)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{-2\sqrt{3}}{-2(3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{-\cancel{4}\sqrt{3}}{\cancel{4}\cdot 3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Equazione fratta

$\frac{2}{\sqrt{2}x-1} + \frac{\sqrt{2}+1}{2x^2-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}x+1}$

$2x^2-1 = (\sqrt{2}x-1)(\sqrt{2}x+1)$

C.E.: $\sqrt{2}x-1 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{1}{\sqrt{2}}$
$\sqrt{2}x+1 \neq 0 \rightarrow x \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

m.c.m. $= 2x^2-1$

$\frac{2\sqrt{2}x+2+\sqrt{2}+1}{\cancel{2x^2-1}} = \frac{\sqrt{2}^2x-\sqrt{2}+\sqrt{2}x-1}{\cancel{2x^2-1}}$

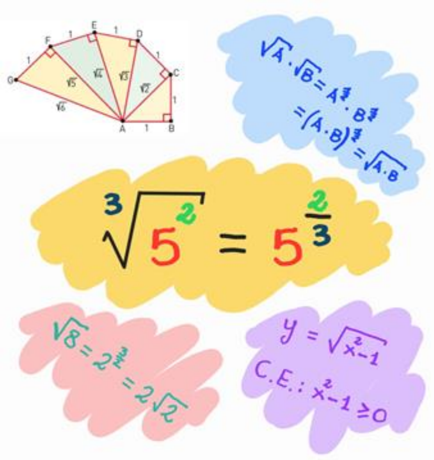
$2\sqrt{2}x - 2x - \sqrt{2}x = -2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 2$

$\sqrt{2}x - 2x = -4 - 2\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}-2)\,x = -4 - 2\sqrt{2}$

$x = \frac{-4-2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}\cdot\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+2} = \frac{-4\sqrt{2}-8-4-4\sqrt{2}}{2-4} = \frac{-8\sqrt{2}-12}{-2} =$

$\frac{\cancel{-2}(4\sqrt{2}+6)}{\cancel{-2}} = 4\sqrt{2}+6$



esercizi proposti

… e **disequazioni** e **sistemi a coefficienti irrazionali**.

Disequazioni

$$x \le \sqrt{2}\,x + \sqrt{3}$$
$$x - \sqrt{2}\,x \le \sqrt{3}$$
$$(1-\sqrt{2})\,x \le \sqrt{3}$$
$$x \ge \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{1-2} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{-1} \qquad (A)$$

L'insegnante ha ricordato di fare attenzione al segno del coefficiente dell'incognita e, nel caso sia negativo, …

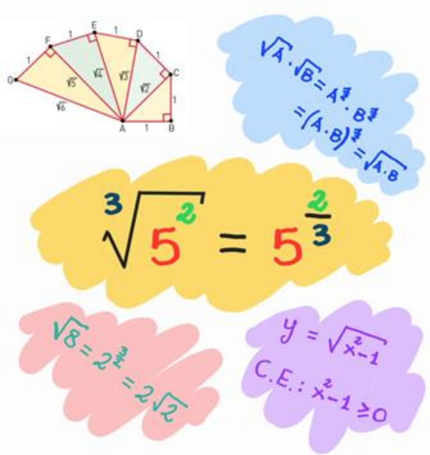
$$-\sqrt{3}\,x + x < \sqrt{3}+1$$
$$(-\sqrt{3}+1)\,x < \sqrt{3}+1$$
$$x > \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{1-3} = -\frac{3+2\sqrt{3}+1}{2} =$$
$$= -\frac{4+2\sqrt{3}}{2} = -\frac{\cancel{2}(2+\sqrt{3})}{\cancel{2}} = -2-\sqrt{3}$$

Sistemi lineari

$$\begin{cases}\sqrt{3}\,x - 2y = \sqrt{6}\\ 3x - \sqrt{3}\,y = \sqrt{2}\end{cases} \quad \sqrt{3}\cdot\begin{cases}\sqrt{3}\,x - 2y = \sqrt{6}\\ 3x - \sqrt{3}\,y = \sqrt{2}\end{cases} \quad \ominus \begin{cases}3x - 2\sqrt{3}\,y = 3\sqrt{2}\\ 3x - \sqrt{3}\,y = \sqrt{2}\\ \hline // \quad -\sqrt{3}\,y = 2\sqrt{2}\end{cases}$$

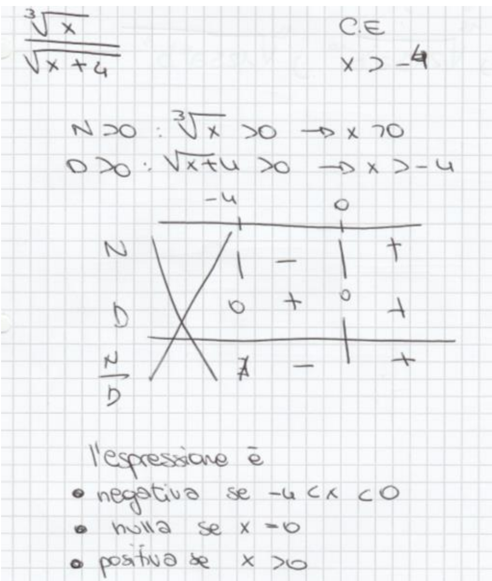
$$\begin{cases}-\sqrt{3}\,y = 2\sqrt{2}\\ 3x - \sqrt{3}\,y = \sqrt{2}\end{cases} \quad \begin{cases}y = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ 3x - \sqrt{3}\,y = \sqrt{2}\end{cases} \quad \begin{cases}y = -\frac{2\sqrt{6}}{3}\\ 3x + 2\sqrt{2} = \sqrt{2}\end{cases}$$

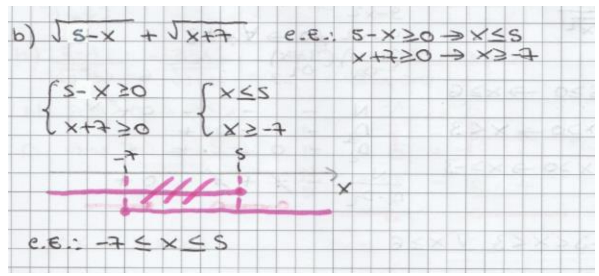
$$\begin{cases}y = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ 3x = -2\sqrt{2} + \sqrt{2}\end{cases} \quad \begin{cases}y = -\frac{2\sqrt{6}}{3}\\ x = -\frac{\sqrt{2}}{3}\end{cases}$$



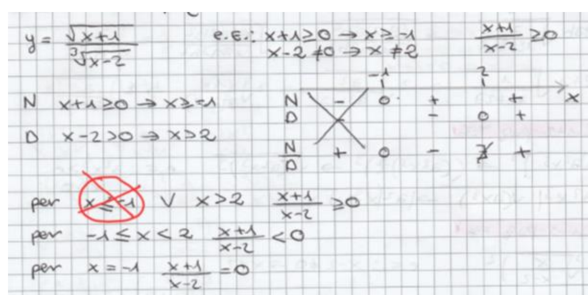
esercizi proposti

Sono stati proposti anche esercizi in cui determinare le **condizioni di esistenza** e il **segno** di espressioni con i radicali



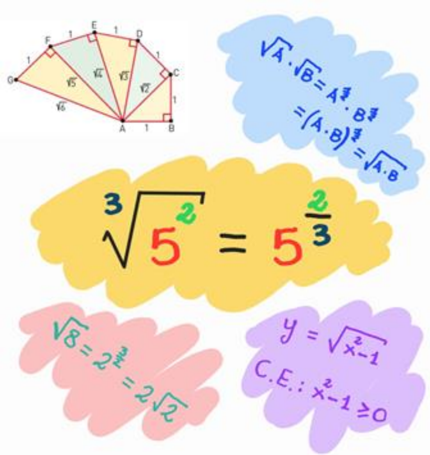


e il **dominio** e il **segno** di **funzioni irrazionali**



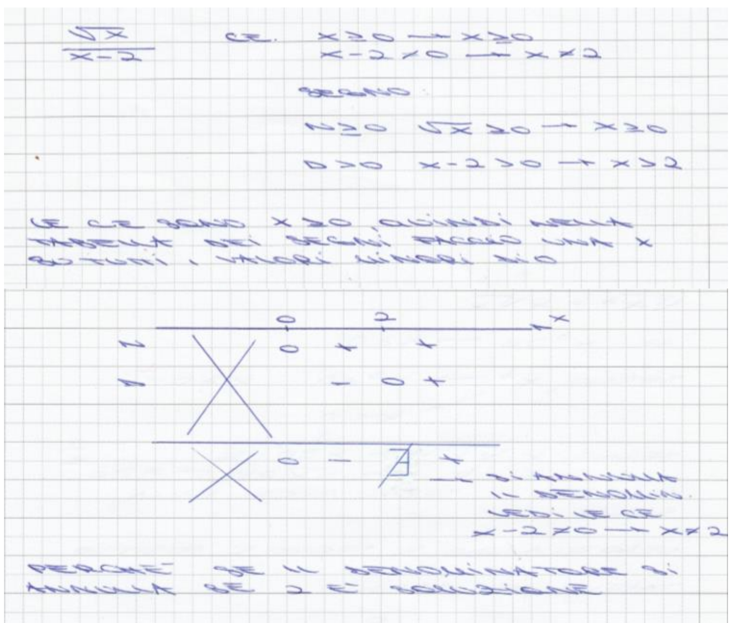
La funzione ha come dominio D=$\{x \in R: x \geq -1\}$

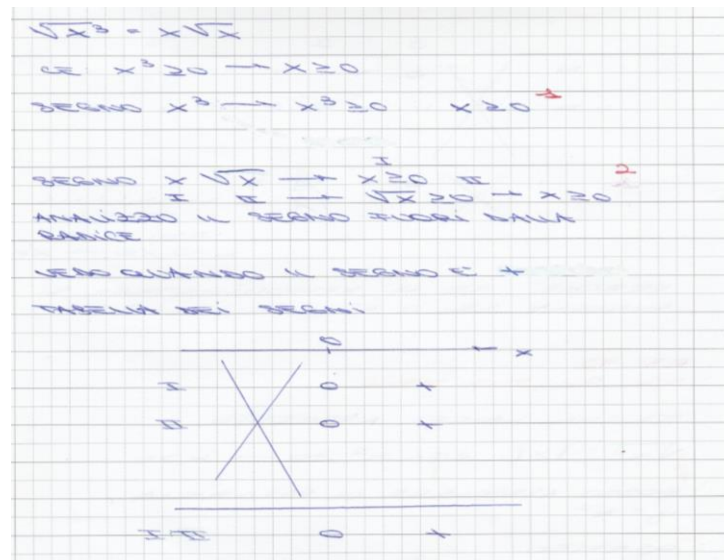
è positiva per $x > 2$:
l'intervallo $x \leq -1 \notin$ D

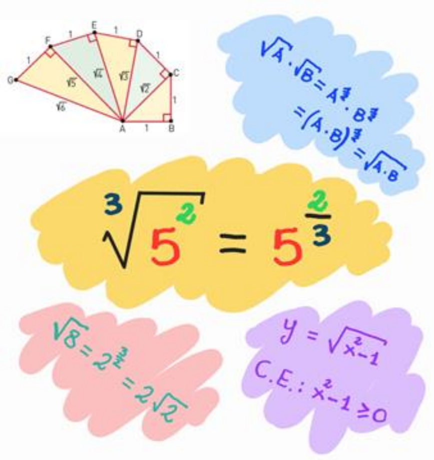


esercizi proposti

Determina le condizioni di esistenza delle seguenti espressioni e studia il loro segno:







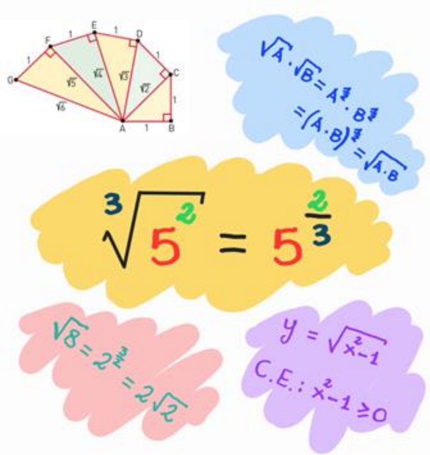
argomenti proposti

Sono state affrontate anche le **equazioni** e le **disequazioni irrazionali** ed è stata proposta, oltre a quella algebrica, anche una risoluzione grafica utilizzando Geogebra.

L'utilizzo del software ha permesso di rappresentare graficamente tutte le funzioni presenti nelle varie equazioni e disequazioni, nonostante gli studenti del secondo anno non possedessero le competenze necessarie per una rappresentazione con carta e penna.

In questo modo è stato possibile analizzare graficamente anche le **disequazioni in due variabili**.

Trattandosi di rappresentazioni eseguite al computer, omettiamo gli esempi e le esercitazioni formative proposti agli alunni e riportiamo soltanto gli svolgimenti delle verifiche sommative, in particolare quello della seconda verifica effettuata in classe e riportata nelle slide successive.



Verifica 1
eseguita in classe dagli studenti

Verifica di Matematica

A. Risolvi i seguenti esercizi dopo aver scritto i radicali che vi compaiono come potenze ad esponente razionale; scrivi poi il risultato sotto forma di radicale. Supponi che tutti i fattori dei radicandi rappresentino numeri positivi.

1. Semplifica i seguenti radicali:

   a) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}$; b) $\sqrt[10]{x^5y^{10}}$; c) $\sqrt[6]{\frac{4x^2+12x+9}{x^{12}}}$.

2. Esegui la moltiplicazione e la divisione e trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili:

   a) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^3}$; b) $\sqrt{\frac{9x^5}{2y^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3y^5}{2x^2}}$ c) $\sqrt[4]{\frac{(x+2)^3}{4x^2}}:\sqrt{\frac{x^2+2x}{x}}$

3. Trasporta i fattori dentro il segno di radice.

   a) $\sqrt[4]{9\cdot\sqrt[6]{3}}$; b) $\frac{x+1}{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$.

4. Calcola le seguenti somme algebriche di radicali:

   a) $2\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+3\sqrt{75}-\sqrt{108}$; b) $\sqrt{(b+2)^3}-\sqrt{4b+8}-\sqrt{9b+18}$.

5. Razionalizza i denominatori delle seguenti frazioni:

   a) $\frac{5}{\sqrt{10}}$; b) $\frac{xy}{\sqrt[3]{yz}}$; c) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$.

B. Risolvi i seguenti esercizi:

1. Rappresenta sulla retta orientata i seguenti numeri:

   a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt[3]{-8}$

2. Determina per quali valori reali di x sono verificate le seguenti uguaglianze:

   a) $\sqrt{x^2}=x$; b) $\left(\sqrt{x}\right)^4=x^2$; c) $\sqrt{x^2}=|x|$.

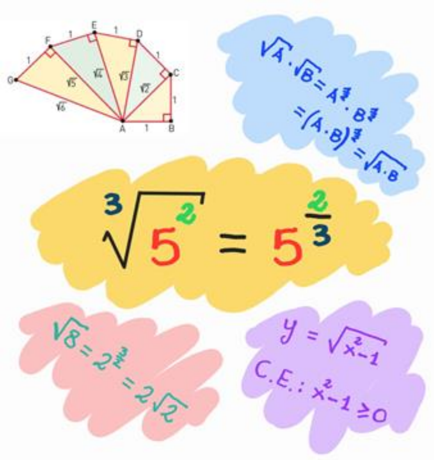
3. Determina il dominio delle seguenti funzioni:

   a) $y=\frac{\sqrt{3-x}}{x^2-16}$; b) $y=\sqrt[3]{\frac{3x-2}{x^2}}$.

   Studia, poi, il segno delle funzioni.

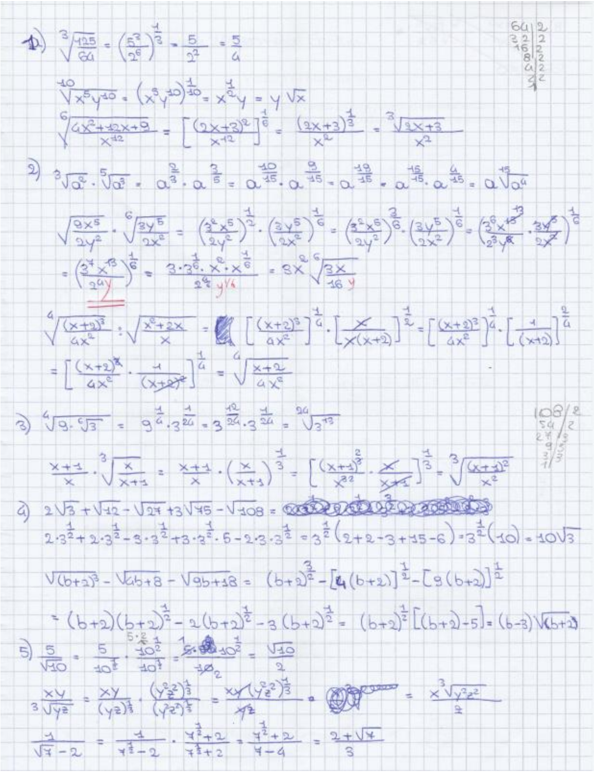
4. Determina le condizioni di esistenza e, dopo aver eseguito la moltiplicazione, trasporta fuori dal segno di radice i fattori possibili mettendo il valore assoluto dove necessario.

   $$\sqrt[3]{\frac{27x^4}{2y}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3y^5}{5x}} .$$



compito 1 (1)
svolgimento della verifica 1

Parte A



1) $\sqrt[3]{\frac{125}{64}}=\left(\frac{5^3}{2^6}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{5}{2^2}=\frac{5}{4}$

$\sqrt[10]{x^5y^{10}}=(x^5y^{10})^{\frac{1}{10}}=x^{\frac{1}{2}}y=y\sqrt{x}$

$\sqrt[6]{\frac{4x^2+12x+9}{x^{12}}}=\left[\frac{(2x+3)^2}{x^{12}}\right]^{\frac{1}{6}}=\frac{(2x+3)^{\frac{1}{3}}}{x^2}=\frac{\sqrt[3]{2x+3}}{x^2}$

2) $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[5]{a^3}=a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{3}{5}}=a^{\frac{10}{15}}\cdot a^{\frac{9}{15}}=a^{\frac{19}{15}}=a^{\frac{15}{15}}\cdot a^{\frac{4}{15}}=a\sqrt[15]{a^4}$

$\sqrt{\frac{9x^5}{2y^2}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3y^5}{2x^2}}=\left(\frac{3^2x^5}{2y^2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3y^5}{2x^2}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{3^2x^5}{2y^2}\right)^{\frac{3}{6}}\cdot\left(\frac{3y^5}{2x^2}\right)^{\frac{1}{6}}=\left(\frac{3^6x^{13}}{2^3y^6}\cdot\frac{3y^5}{2x^2}\right)^{\frac{1}{6}}$

$=\left(\frac{3^7x^{13}}{2^4y}\right)^{\frac{1}{6}}=\frac{3\cdot3^{\frac{1}{6}}\cdot x^2\cdot x^{\frac{1}{6}}}{2^{\frac{4}{6}}y^{1/6}}=3x^2\sqrt[6]{\frac{3x}{16y}}$

$\sqrt[4]{\frac{(x+2)^3}{4x^2}}:\sqrt{\frac{x^2+2x}{x}}=\left[\frac{(x+2)^3}{4x^2}\right]^{\frac{1}{4}}\cdot\left[\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{(x+2)^3}{4x^2}\right]^{\frac{1}{4}}\cdot\left[\frac{1}{(x+2)}\right]^{\frac{2}{4}}$

$=\left[\frac{(x+2)^{\cancel{3}}}{4x^2}\cdot\frac{1}{\cancel{(x+2)^2}}\right]^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{\frac{x+2}{4x^2}}$

3) $\sqrt[4]{9\cdot\sqrt[6]{3}}=9^{\frac{1}{4}}\cdot3^{\frac{1}{24}}=3^{\frac{12}{24}}\cdot3^{\frac{1}{24}}=\sqrt[24]{3^{13}}$

$\frac{x+1}{x}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}=\frac{x+1}{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{3}}=\left[\frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{x^{32}}\cdot\frac{\cancel{x}}{\cancel{x+1}}\right]^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x^2}}$

4) $2\sqrt{3}+\sqrt{12}-\sqrt{27}+3\sqrt{75}-\sqrt{108}=$

$2\cdot3^{\frac{1}{2}}+2\cdot3^{\frac{1}{2}}-3\cdot3^{\frac{1}{2}}+3\cdot3^{\frac{1}{2}}\cdot5-2\cdot3\cdot3^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{1}{2}}(2+2-3+15-6)=3^{\frac{1}{2}}(10)=10\sqrt{3}$

$\sqrt{(b+2)^3}-\sqrt{4b+8}-\sqrt{9b+18}=(b+2)^{\frac{3}{2}}-[4(b+2)]^{\frac{1}{2}}-[9(b+2)]^{\frac{1}{2}}$

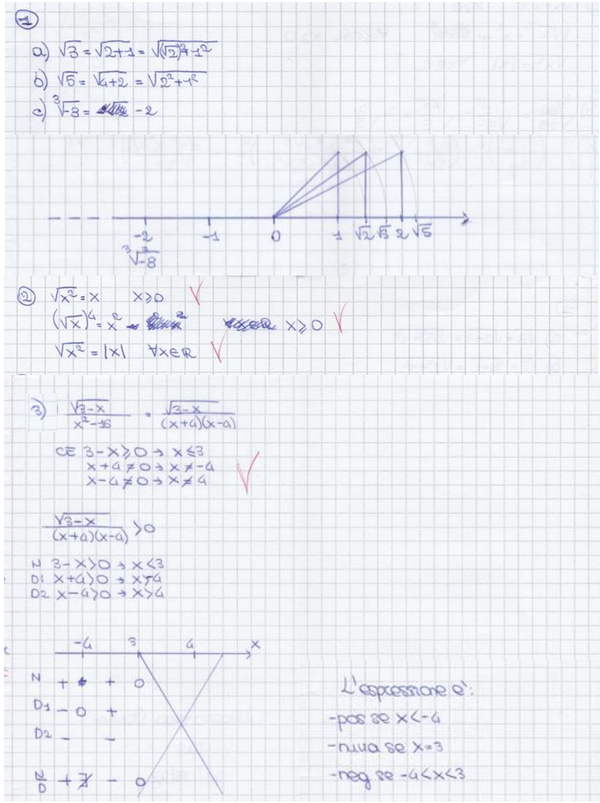
$=(b+2)(b+2)^{\frac{1}{2}}-2(b+2)^{\frac{1}{2}}-3(b+2)^{\frac{1}{2}}=(b+2)^{\frac{1}{2}}[(b+2)-5]=(b-3)\sqrt{(b+2)}$

5) $\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5}{10^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{10^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{1}{2}}}=\frac{\cancel{5}\cdot10^{\frac{1}{2}}}{\cancel{10}_2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{xy}{\sqrt[3]{yz}}=\frac{xy}{(yz)^{\frac{1}{3}}}\cdot\frac{(y^2z^2)^{\frac{1}{3}}}{(y^2z^2)^{\frac{1}{3}}}=\frac{x\cancel{y}(y^2z^2)^{\frac{1}{3}}}{\cancel{y}z}=\frac{x\sqrt[3]{y^2z^2}}{z}$

$\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{1}{7^{\frac{1}{2}}-2}\cdot\frac{7^{\frac{1}{2}}+2}{7^{\frac{1}{2}}+2}=\frac{7^{\frac{1}{2}}+2}{7-4}=\frac{2+\sqrt{7}}{3}$

Parte B



1)

a) $\sqrt{3}=\sqrt{2+1}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}$

b) $\sqrt{5}=\sqrt{4+1}=\sqrt{2^2+1^2}$

c) $\sqrt[3]{-8}=-2$

2) $\sqrt{x^2}=x \quad x\geq0$ ✓

$(\sqrt{x})^4=x^2 \quad x\geq0$ ✓

$\sqrt{x^2}=|x| \quad \forall x\in\mathbb{R}$ ✓

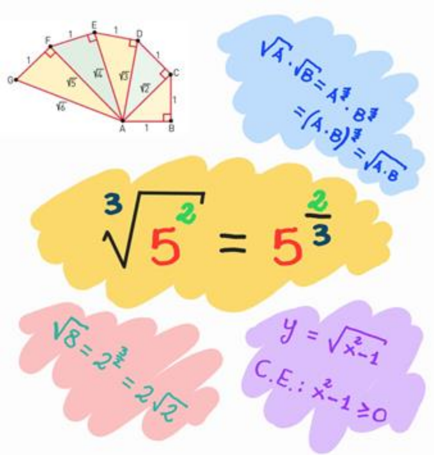
3) $\frac{\sqrt{3-x}}{x^2-16}=\frac{\sqrt{3-x}}{(x+4)(x-4)}$

CE $3-x\geq0\rightarrow x\leq3$
$x+4\neq0\rightarrow x\neq-4$
$x-4\neq0\rightarrow x\neq4$ ✓

$\frac{\sqrt{3-x}}{(x+4)(x-4)}>0$

N $3-x>0\rightarrow x<3$
D1 $x+4>0\rightarrow x>-4$
D2 $x-4>0\rightarrow x>4$

L'espressione e':
- pos se $x<-4$
- nulla se $x=3$
- neg se $-4<x<3$



compito 1 (2)
svolgimento della verifica 1

Continua Parte B

$$\sqrt[3]{\frac{3x-2}{x^2}}$$

CE $x \neq 0$

$$\sqrt[3]{\frac{3x-2}{x^2}} > 0$$

N $3x-2>0 \rightarrow x>\frac{2}{3}$

D1 $x>0$

D2 $x>0$

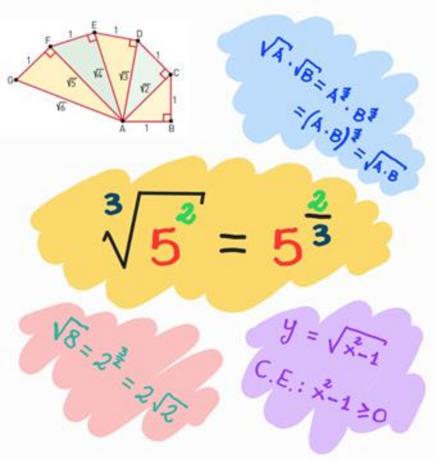
		0		$\frac{2}{3}$	
N	$-$		$-$	0	$+$
D1	$-$	0	$+$		$+$
D2	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{N}{D}$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$

l'espressione è:

- pos se $x>\frac{2}{3}$
- nulla se $x=\frac{2}{3}$
- negativa se $x<0 \vee 0<x<\frac{2}{3}$

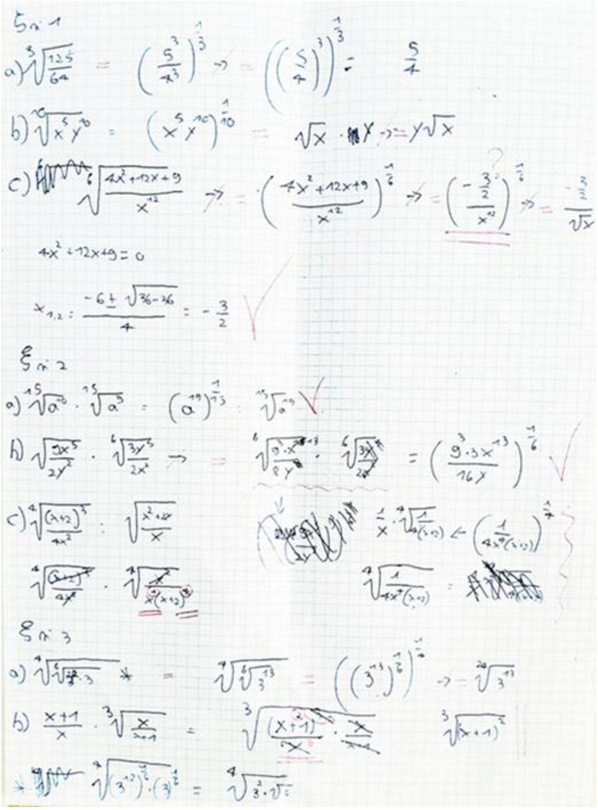
c) $\sqrt[3]{\frac{27x^4}{2y}}\cdot\sqrt[6]{\frac{3y^5}{5x}} = \left(\frac{3^3\cdot x^4}{2y}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(\frac{3y^5}{5x}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3^3\cdot x^4}{2y}\right)^{\frac{2}{6}}\cdot\left(\frac{3y^5}{5x}\right)^{\frac{1}{6}} =$

$\left(\frac{3^3\cdot x^4}{2y}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\frac{3^3\cdot x^4}{2y}\right)^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\frac{3y^5}{5x}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3^7\cdot x^7\cdot y^3}{4\cancel{y^2}\cdot 5\cancel{x}}\right)^{\frac{1}{6}} = \left(\frac{3^7\cdot x^7\cdot y^3}{20}\right)^{\frac{1}{6}}$

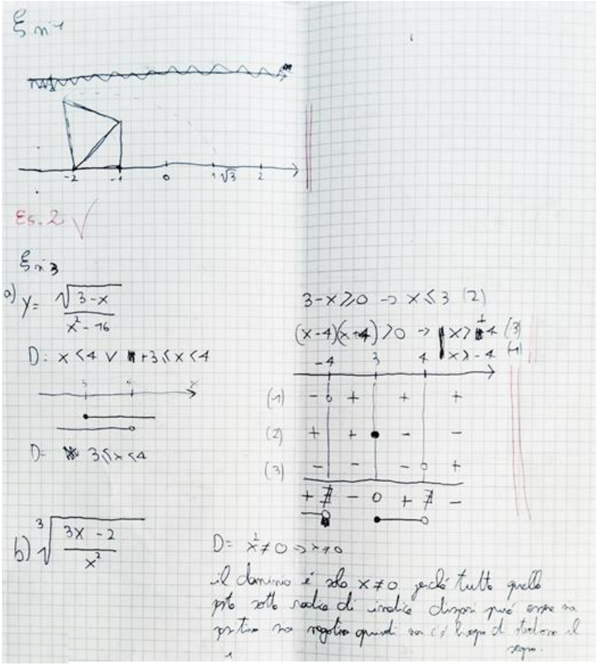


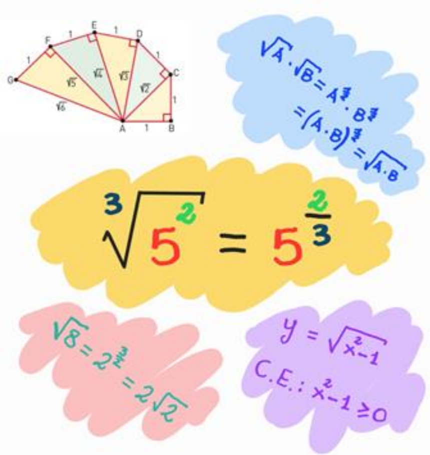
compito 2 (1)
svolgimento della verifica 1
non sempre la soluzione è corretta

Parte A



Parte B

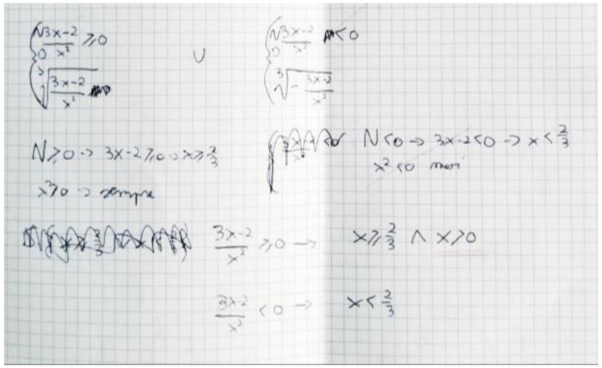




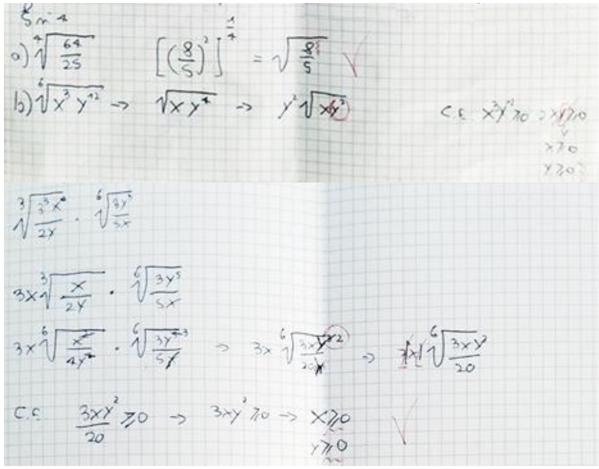
compito 2 (2)
svolgimento della verifica 1
non sempre la soluzione è corretta

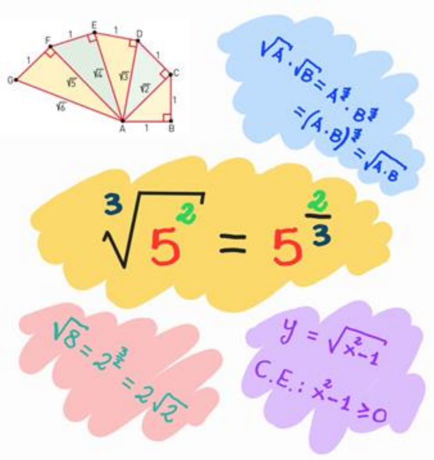
Continua Parte B

Esercizio 3b (segno della funzione)



Esercizio 4





Verifica 2
eseguita in classe dagli studenti

Verifica di Matematica

1. Traccia con Geogebra i grafici delle funzioni $y = \sqrt{x^2}$ e $y = \left(\sqrt{x}\right)^2$.

   Confronta i due grafici e giustifica perché sono diversi.

2. Traccia con Geogebra i grafici delle tre funzioni $y = |x|, y = x, y = \sqrt{x^2}$.

   Confronta i tre grafici. Ci sono grafici che coincidono? Spiega perché alcuni di essi coincidono.

3. Risolvi sia algebricamente che geometricamente (Geogebra) le seguenti equazioni o disequazioni:

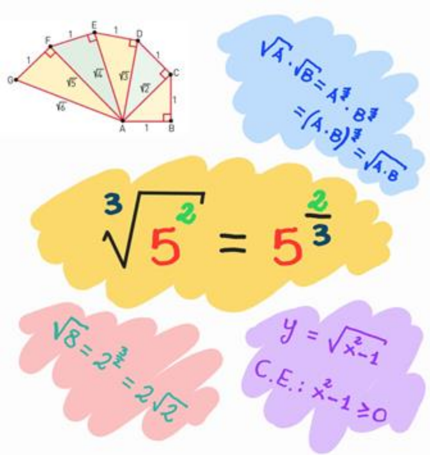
   a. $\sqrt{3x-1} = 3x - 3$;

   b. $\sqrt{16 - x^2} \leq x + 4$;

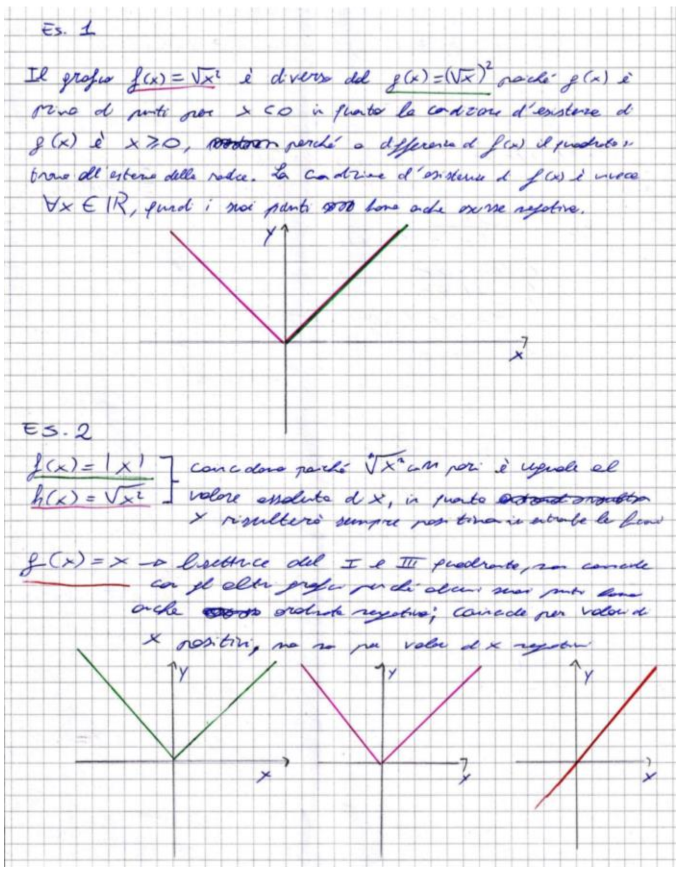
   c. $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x^2 + y^2 = 2x - 2y \end{cases}$;

   d. $2x^4 + 9x^3 + 14x^2 + 9x + 2 > 0$;

   e. $y - 2x^2 + 4x > 0$.



compito 1 (1)
svolgimento della verifica 2



Es. 1

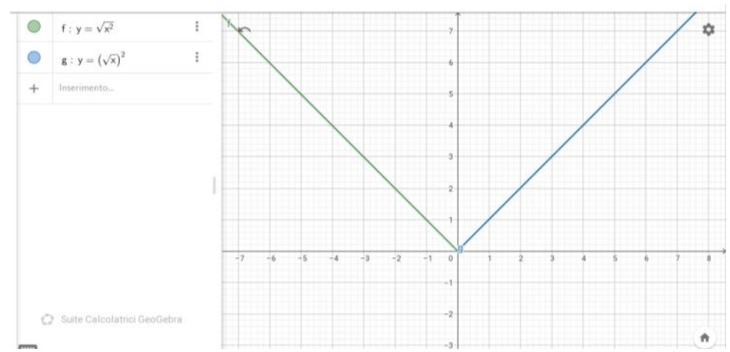
Il grafico $f(x)=\sqrt{x^2}$ è diverso dal $g(x)=(\sqrt{x})^2$ perché $g(x)$ è privo di punti per $x<0$ in quanto la condizione d'esistenza di $g(x)$ è $x\geq 0$, ~~[illegible]~~ perché a differenza di $f(x)$ il quadrato si trova all'esterno della radice. La condizione d'esistenza di $f(x)$ è invece $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi i suoi punti ~~[illegible]~~ hanno anche ascisse negative.

Es. 2

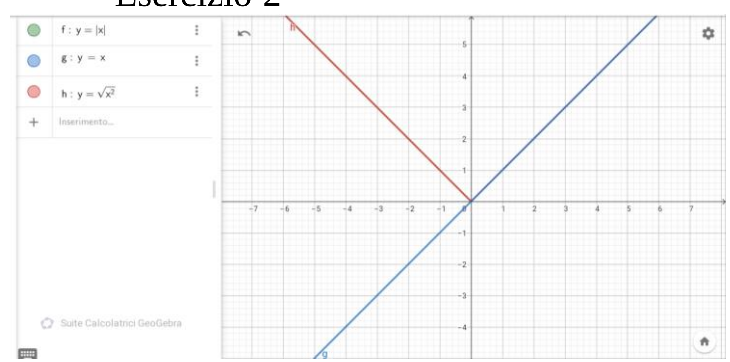
$f(x)=|x|$
$h(x)=\sqrt{x^2}$
coincidono perché $\sqrt{x^2}$ con pari è uguale al valore assoluto di x, in quanto ~~[illegible]~~ y risulterà sempre positiva in entrambe le funzioni

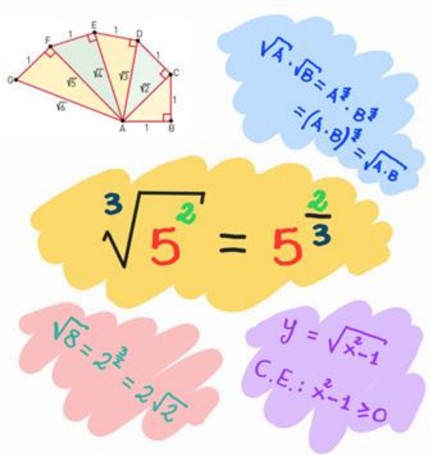
$g(x)=x \rightarrow$ bisettrice del I e III quadrante, non coincide con gli altri grafici perché alcuni suoi punti hanno anche ~~[illegible]~~ ordinate negative; coincide per valori di x positivi, ma no per valori di x negativi

Esercizio 1

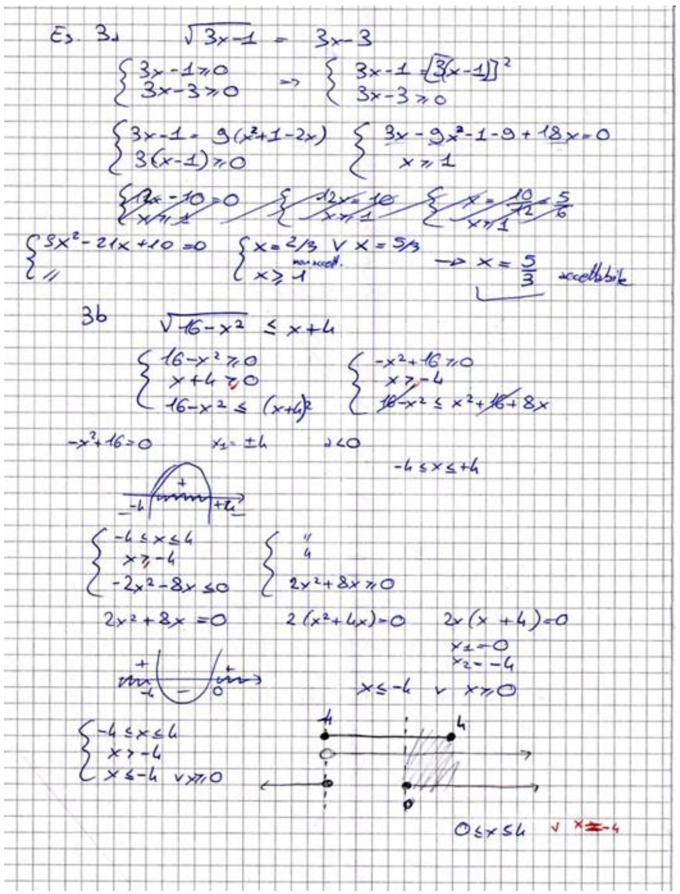


Esercizio 2





compito 1 (2)
svolgimento della verifica 2



Es. 3a $\sqrt{3x-1}=3x-3$

$\begin{cases}3x-1\geq 0\\3x-3\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x-1=[3(x-1)]^2\\3x-3\geq 0\end{cases}$

$\begin{cases}3x-1=9(x^2+1-2x)\\3(x-1)\geq 0\end{cases}$ $\begin{cases}3x-9x^2-1-9+18x=0\\x\geq 1\end{cases}$

$\cancel{\begin{cases}12x-10=0\\x\geq 1\end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases}12x=10\\x\geq 1\end{cases}}$ $\cancel{\begin{cases}x=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}\\x\geq 1\end{cases}}$

$\begin{cases}9x^2-21x+10=0\\ //\end{cases}$ $\begin{cases}x=2/3 \vee x=5/3\\x\geq 1\end{cases}$ non accett. $\rightarrow x=\frac{5}{3}$ accettabile

3b $\sqrt{16-x^2}\leq x+4$

$\begin{cases}16-x^2\geq 0\\x+4\geq 0\\16-x^2\leq (x+4)^2\end{cases}$ $\begin{cases}-x^2+16\geq 0\\x\geq -4\\\cancel{16}-x^2\leq x^2+\cancel{16}+8x\end{cases}$

$-x^2+16=0$ $x_1=\pm 4$ $a<0$

$-4\leq x\leq +4$

$\begin{cases}-4\leq x\leq 4\\x\geq -4\\-2x^2-8x\leq 0\end{cases}$ $\begin{cases}//\\ //\\2x^2+8x\geq 0\end{cases}$

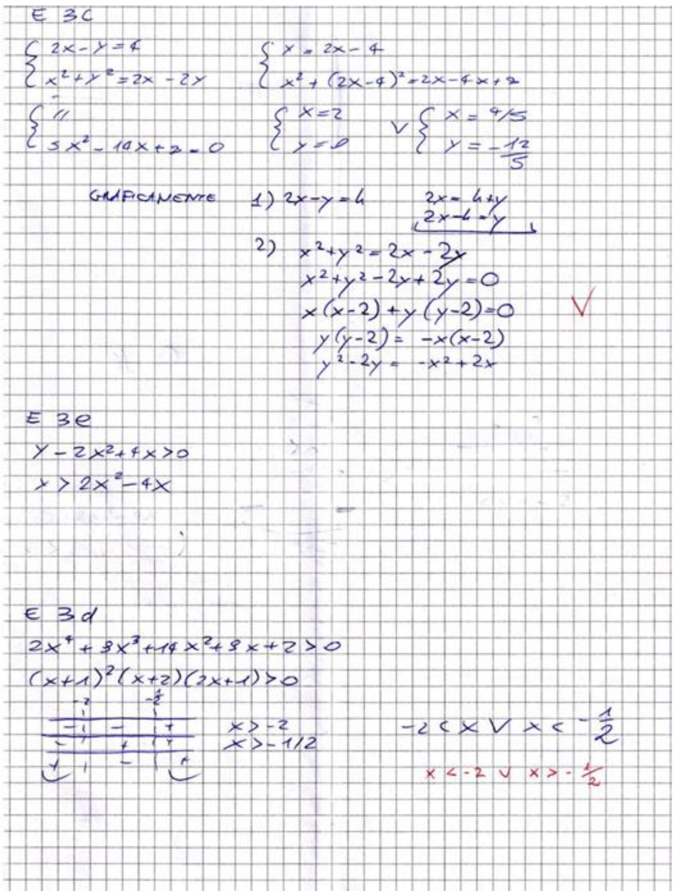
$2x^2+8x=0$ $2(x^2+4x)=0$ $2x(x+4)=0$

$x_1=0$
$x_2=-4$

$x\leq -4 \vee x\geq 0$

$\begin{cases}-4\leq x\leq 4\\x>-4\\x\leq -4 \vee x\geq 0\end{cases}$

$0\leq x\leq 4$ $\vee$ $x=-4$



E 3c

$\begin{cases}2x-y=4\\x^2+y^2=2x-2y\end{cases}$ $\begin{cases}y=2x-4\\x^2+(2x-4)^2=2x-4x+8\end{cases}$

$\begin{cases}//\\5x^2-14x+8=0\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases} \vee \begin{cases}x=4/5\\y=-\frac{12}{5}\end{cases}$

GRAFICAMENTE 1) $2x-y=4$ $2x=4+y$ $2x-4=y$

2) $x^2+y^2=2x-2y$
$x^2+y^2-2x+2y=0$
$x(x-2)+y(y-2)=0$
$y(y-2)=-x(x-2)$
$y^2-2y=-x^2+2x$

√

E 3e

$y-2x^2+4x>0$
$y>2x^2-4x$

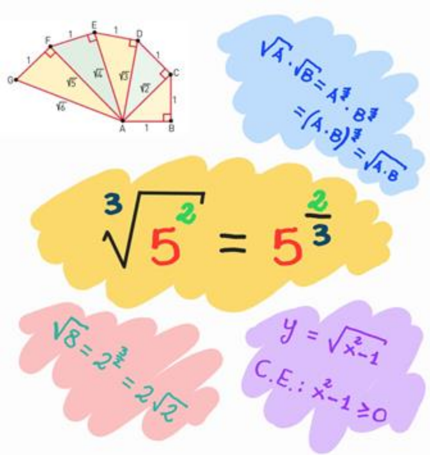
E 3d

$2x^4+3x^3+14x^2+9x+2>0$
$(x+1)^2(x+2)(2x+1)>0$

$x>-2$
$x>-1/2$

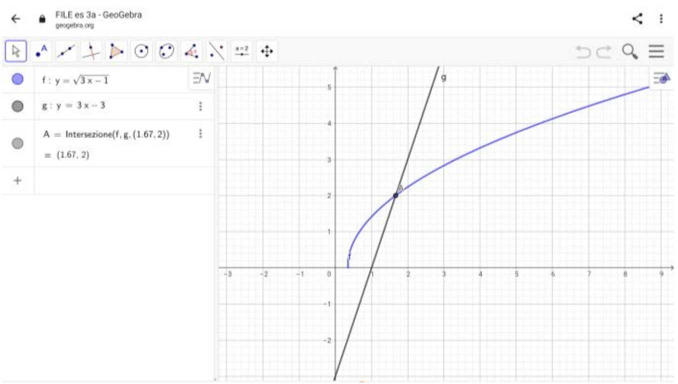
$-2<x \vee x<-\frac{1}{2}$

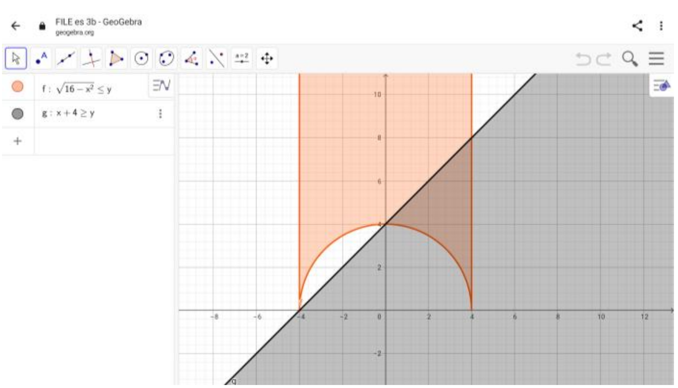
$x<-2 \vee x>-\frac{1}{2}$

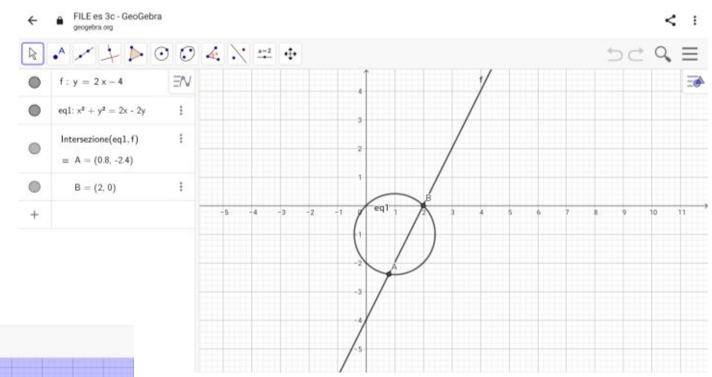


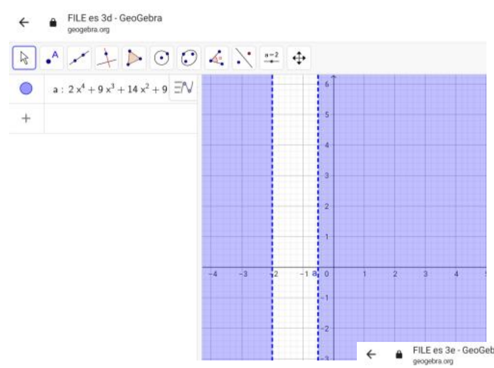
compito 1 (3)
svolgimento della verifica 2

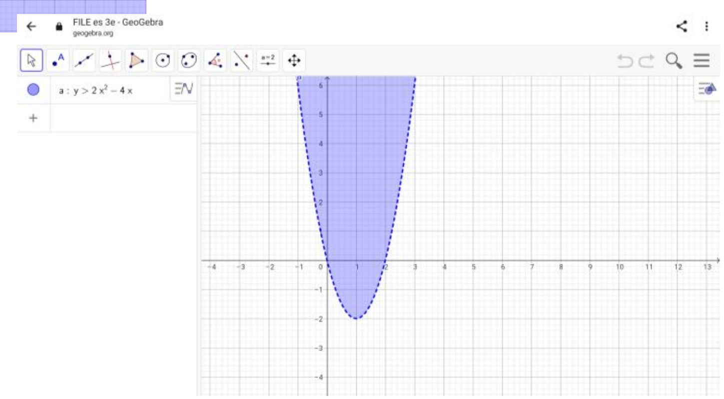
Esercizio 3

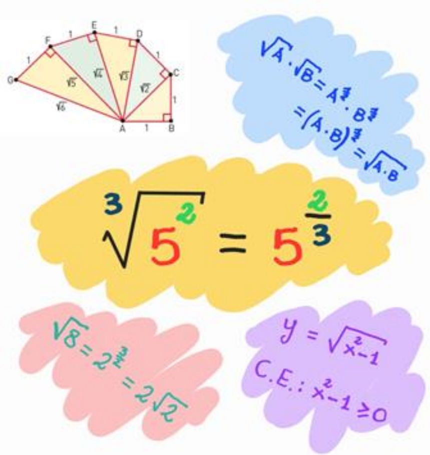












compito 2 (1)
svolgimento della verifica 2
non sempre la soluzione è corretta

esercizio 1

$g(x) = y = \sqrt{x^2}$

$g(x) = (\sqrt{x})^2$

- queste due funzioni si somigliano, la differenza sostanziale è che il dominio di $g(x)$ comprende tutto $\mathbb{R}$, mentre quello di $g(x)$ comprende solamente $\mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}$ positivo) $\mathbb{R}^+_0$

questo perché ~~retta~~ la funzione $g(x)$ è elevata al quadrato e perciò non potrà mai essere negativa

inoltre le rette che rappresentavano i due grafici avevano lo stesso coefficiente angolare

esercizio 2

$g(x)$: $y = |x|$

$g(x)$: $y = x$

$h(x)$: $\sqrt{x^2}$

- notiamo che i grafici $g(x)$ e $h(x)$ corrispondono questo perché se proviamo di ~~se~~ semplificare $h(x)$ troviamo che $y = |x|$ poiché ~~la radice~~ quando si risolve una radice di un'incognita bisogna considerarne il valore assoluto

- invece notiamo che $g(x)$ corrisponde a $g(x)$ e $h(x)$ soltanto quando il suo dominio comprende soltanto $\mathbb{R}^+$

- la ~~fun~~ funzione $g(x)$ corrisponde alla bisettrice del 1° e 3° quadrante

esercizio 3

a) $\sqrt{3x-1} = 3x-3$

$3x-1 = 9x^2+9-18x$

$9x^2-21x+10=0$

$\Delta = 441-360 = 81$

$x_{1,2} = \dfrac{21\pm 9}{18}$ $\begin{cases} x_1 = \dfrac{30}{18} = \dfrac{5}{3} \\ x_2 = \dfrac{12}{18} = \dfrac{2}{3} \to \text{n.a.} \end{cases}$

CE

$3x-3 \geq 0$

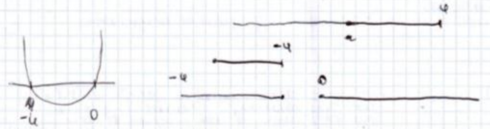
$x \geq 1$

esatta la procedura con proprietà

$\sqrt{16-x^2} \leq x+4$

$\begin{cases} 16-x^2 \geq 0 \\ x+4 \geq 0 \\ 16-x^2 \leq (x+4)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 \leq 16 \\ x \geq -4 \\ 16-x^2 \leq x^2+16+8x \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq \pm 4 \\ x \geq -4 \\ 2x^2+8x \geq 0 \end{cases}$ no

$\begin{cases} \\ \\ x(2x+8) \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq \pm 4 \\ x \geq -4 \\ x \leq -4 \wedge x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ ~~x=0 \wedge x=-4~~ \end{cases}$



es 3 (c)

$\begin{cases} 2x-y=4 \\ x^2+y^2 = 2x-2y \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x-4 \\ x^2+(2x-4)^2 = 2x-2(2x-4) \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x-4 \\ x^2+4x^2+16-16x = 2x-4x+8 \end{cases}$

$\begin{cases} // \\ 5x^2-14x+8=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 = 2 \quad y_1 = 0 \\ x_2 = \dfrac{4}{5} \quad y_2 = -\dfrac{12}{5} \end{cases}$

$\Delta = 196-160 = 36$

$x_{1,2} = \dfrac{14\pm 6}{10}$ $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} \end{cases}$ $y_1 = 0$ $y_2 = \dfrac{8}{5} - 4 = -\dfrac{12}{5}$

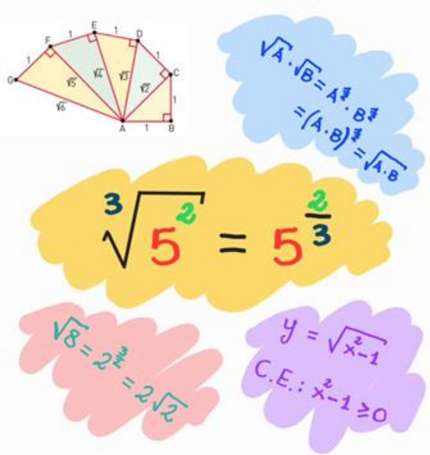
~~es 4~~ es d

$2x^4+9x^3+14x^2+9x+2 \geq 0$

$(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 2 & 9 & 14 & 9 & 2 \\ & & -2 & & & -2 \\ \hline -1 & 2 & 7 & 7 & 2 & 0 \end{array}$$

$(2x^3+7x^2+7x+2)(x+1)$



compito 2 (2)
svolgimento della verifica 2
non sempre la soluzione è corretta

$(2x^3+7x^2+7x+2)(x+1)$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 2 & 7 & 7 & 2 \\ -1 & & -2 & -5 & -2 \\ \hline & 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}$$

$2x^3+7x^2+7x+2=(x+1)(2x^2+5x+2)$

$(x+1)^2(2x^2+5x+2)$

$\downarrow$

$(x+2)(2x+1)$

$$\begin{array}{r|rr|r} & 2 & 5 & 2 \\ -2 & & -4 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$(x+1)^2(x+2)(2x+1)>0$

$\downarrow$

$x>-2$

$x>-\frac{1}{2}$

grafico dei segni

es d e

$y-2x^2+4x>0$

$\cancel{-2x^2+4x>-y}$

$2x^2-4x<y$

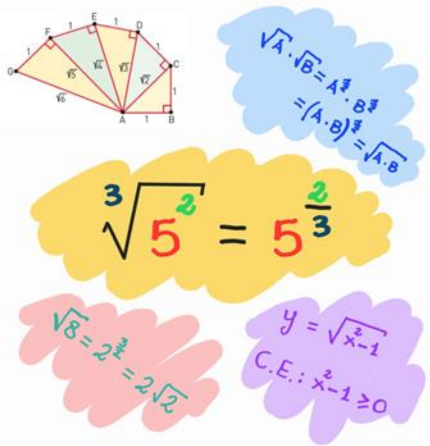
$2x(x-4)<y$

$\downarrow$

il valore di x varia in base al valore di y
per esempio se $y=1$ allora

$\downarrow$ proprio per questo motivo su geogebra appare lo slider

$\downarrow$ $x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{24}}{4}$

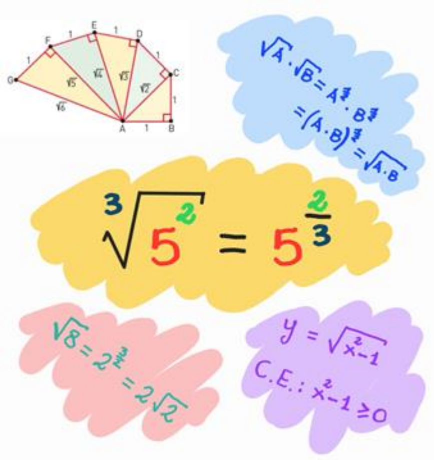


risultati ottenuti

Nella classe, 9 studenti su 19 hanno documentabilmente raggiunto un livello alto o medio alto di conoscenza e autonomia operativa sugli argomenti proposti, sviluppati e costruiti in modo partecipato, due allievi non hanno raggiunto la sufficienza, mentre i rimanenti hanno conseguito risultati pienamente sufficienti.

Al termine del percorso gli studenti, pur se con livelli differenti:

- utilizzano correttamente le regole del calcolo algebrico con particolare attenzione alla consapevolezza del significato dell'operazione di estrazione di radice;
- risolvono correttamente espressioni contenenti radicali ed equazioni, disequazioni e sistemi a coefficienti irrazionali;
- comprendono l'importanza delle funzioni irrazionali e delle loro condizioni di esistenza anche in merito all'utilizzo del valore assoluto.



valutazione dell’efficacia del percorso didattico sperimentato

- L’approccio utilizzato ha consentito agli studenti:
  - di partecipare attivamente allo sviluppo delle conoscenze, conducendo a una riflessione più consapevole sull’utilizzo dei radicali;
  - di applicare correttamente i concetti appresi;
  - di comprendere meglio la sinergia esistente tra vari «ambienti» algebrici.

- Introdurre le operazioni tra radicali a partire dalle proprietà delle potenze (contrariamente all’ordine generalmente seguito dai manuali) ha permesso:
  - di avere una visione unitaria nella trattazione degli argomenti;
  - di economizzare i tempi di lavoro.