

REGIONE
TOSCANA



Un giro tra gli angoli

Grado scolastico: SS1

Area disciplinare: matematica

IC Galilei, Pieve a Nievole (PT)

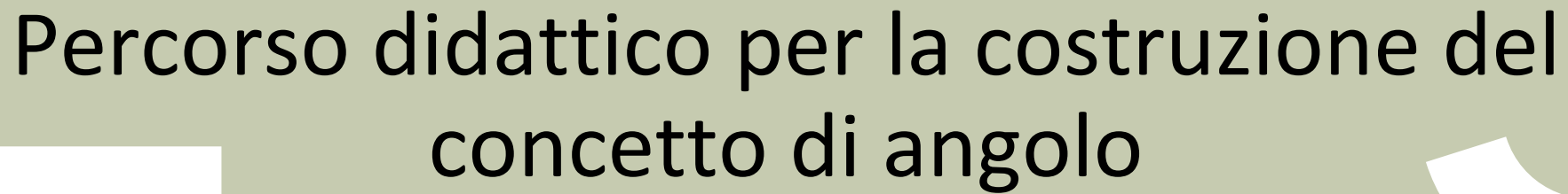
Docenti coinvolti: Eleonora Pellegrini

Realizzato con il contributo della Regione Toscana
nell'ambito del progetto

Rete Scuole LSS a.s. 2023/2024



Un *giro* tra gli angoli



Percorso didattico per la costruzione del
concetto di angolo

Classe prima, Scuola Secondaria di primo grado



Collocazione del percorso nel curricolo verticale

Il curricolo di geometria della classe prima prevede i seguenti percorsi:

- Gli enti geometrici di base: punto, retta, semiretta, segmento, spezzata, poligono
- **Angoli e rette nel piano**
- I triangoli

I concetti di angolo e di rette parallele e perpendicolari vengono poi ripresi anche in seconda, con lo studio dei quadrilateri e del teorema di Pitagora, e in terza, con lo studio dei poligoni regolari e della geometria solida.

Obiettivi

- Comprendere il significato del termine “angolo” in geometria e saperne dare una definizione e una rappresentazione corrette e coerenti
- Dare una stima dell’ampiezza di un angolo, almeno rispetto ad angoli di riferimento, e in particolare saperlo classificare (acuto, ottuso, ...)
- Misurare un angolo con il goniometro
- Conoscere i teoremi che legano rette e angoli
- Risolvere problemi riguardanti angoli e rette

Approccio metodologico

I ragazzi hanno lavorato individualmente oppure organizzati in piccoli gruppi.

Le attività didattiche si sono sviluppate su quattro fasi:

1. Sperimentazione-osservazione, in cui è stato dato largo spazio alla manipolazione di modelli concreti
2. Verbalizzazione scritta
3. Discussione collettiva
4. Affinamento della concettualizzazione

A queste fasi, tipiche della metodologia LSS, sono stati affiancati momenti di esercitazione volti al consolidamento delle abilità e allo sviluppo delle competenze di problem solving e argomentazione.

Materiali, apparecchi e strumenti impiegati

Materiali:

- Carta
- Spago
- Carta trasparente (o carta da forno)
- Nastro adesivo

Apparecchi e strumenti:

- LIM
- Software GeoGebra
- Goniometro per uso individuale
- Goniometro da lavagna

Ambiente

- Aula di matematica e scienze, con banchi disposti a isole per favorire il lavoro a gruppi come modalità di lavoro privilegiata
- Corridoio



Tempo impiegato

- Messa a punto preliminare nel gruppo LSS: 2 ore
- Progettazione specifica e dettagliata nella classe: 3 ore
- Tempo-scuola di sviluppo del percorso: 10 ore
- Per documentazione: 4 ore



Altre informazioni

La classe è poco numerosa ma molto disomogenea:

- 7 alunne e 1 alunno di livello avanzato
- 3 alunni e 1 alunna di livello medio-basso
- 4 alunni e 1 alunna con gravi difficoltà

Inoltre in classe non è presente l'insegnante di sostegno.

Per questi motivi, è stato necessario adattare i tempi alle esigenze degli alunni con maggiori difficoltà e differenziare, talvolta, le attività proposte, in modo da stimolare anche gli alunni più competenti.

Inoltre, la quasi totalità della classe presentava, all'inizio del percorso, misconcezioni «tipiche» (es. identificare l'angolo con i suoi lati o con il suo vertice), pertanto è stato necessario partire da queste per fare in modo che l'immagine mentale di angolo potesse gradualmente trasformarsi in quella coerente con la definizione formalmente corretta.

Prima parte del percorso

- L'angolo nella lingua corrente (30 min)
- *Preconcetti* e *misconcetti* (1 h 30)
- Verso una definizione di angolo (2 h)
- Costruiamo un angolo (1 h)
- Confronto di angoli (1 h)
- Angoli particolari con la carta: giro, piatto, retto (1 h)
- Il grado (1 h)
- Angoli particolari con la carta / 2 (1 h)

Lo sviluppo di questa prima parte, dedicata alla costruzione e consolidamento del concetto di angolo, ha richiesto circa un mese di tempo.

L'angolo nella lingua corrente

Per cominciare, chiedo agli alunni di scrivere 5 frasi con la parola "angolo", non necessariamente di ambito matematico.

Che cos'è un angolo
Scrivi 5 frasi con la parola "angolo"
Ci sono tanti tipi di angoli tra cui l'angolo acuto, retto, ottuso.
L'angolo può essere di diversi gradi ad esempio 90° 20°
Leo aveva battuto in angolo perfetto che si è spuntato al meglio con un colpo di testa magnifico.
Ho visto un cartone animato dove un personaggio veniva messo in fuorizone in un angolo della casa.
La mia classe ha 4 angoli
Conclusioni: la parola "angolo" in italiano ha molti significati.

CHE COS'È UN ANGOLO
1) Scrivi almeno 5 frasi con la parola ANGOLO
+ Il triangolo ha 3 angoli
2) Gli angoli corrispondono quasi sempre al numero dei lati.
3) Gli angoli possono essere acuti, retti o ottusi.
4) Gli angoli si misurano in gradi e con il goniometro
5) Gli angoli sono presenti in qualsiasi cosa con una forma geometrica
6) Jacopo ha spogliato l'angolo per andare a fare la spesa
CONCLUSIONI
La parola angolo in italiano ha molti significati

L'angolo nella lingua corrente

In alcuni casi emergono idee riguardanti l'angolo in senso matematico.

~~Ho~~ si misura con il goniometro

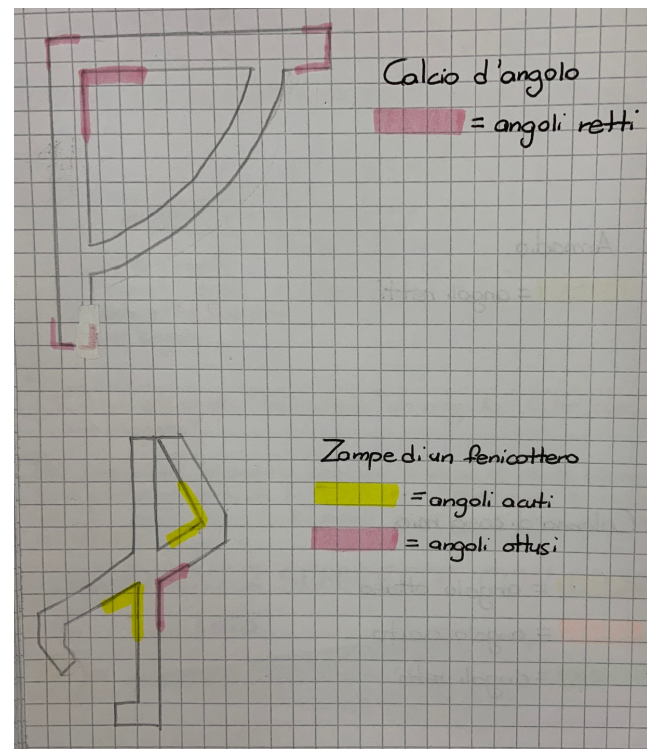
1. L'angolo è una parte di una forma geometrica
2. L'angolo è tipo una parte triangolare

Ci sono tanti tipi di angoli tra cui è angolo acuto, retto, ottuso.

2. Gli angoli corrispondono quasi sempre al numero di lati.

L'angolo nella lingua corrente

A casa gli alunni rappresentano la loro idea di angolo attraverso disegni e immagini fotografiche.



Preconcetti e misconcetti

Ora chiedo a ciascun alunno, individualmente, di:

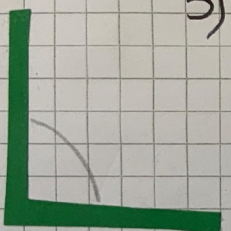
1. rispondere per scritto alla domanda “**Che cos'è per te un angolo?**”
2. disegnare un angolo sul cartoncino e poi ritagiarlo.

è in geometria?

2) Scrivi che cos'è un angolo in geometria

In geometria per me è quando 2 o più linee si incontrano e la parte dove si incontrano


3) Disegna e ritaglia un angolo

A hand-drawn right angle on grid paper. The angle is formed by two perpendicular lines meeting at a vertex. A small arc is drawn at the vertex to indicate the angle.

2) SCRIVI CHE COS'È UN ANGOLO IN GEOMETRIA

L'angolo in geometria è quella parte invisibile presente nelle figure chiuse, si misura con il goniometro e in gradi. È retto, ottuso, acuto, giro e piatto. Gli angoli corrispondono quasi sempre al numero dei lati.

3) DISEGNA E RITAGLIA UN ANGOLO USANDO IL PEZZO DI CARTONCINO

A hand-drawn acute angle on grid paper. The angle is formed by two lines meeting at a vertex, forming a sharp corner. The lines are drawn in a dark green color.

Preconcetti e misconcetti

Alla fine della condivisione, chiedo agli alunni di realizzare un altro modello di angolo, simile al precedente, a partire da un altro pezzo di cartoncino. Tutti i modelli della classe vengono raggruppati in categorie e incollati su un cartellone, che poi viene appeso sulla parete dell'aula.

NB: Le categorie "triangoli" e "quadrati" corrispondono alle immagini mentali di angolo esplicitate da alcuni alunni, che all'inizio del percorso identificavano l'angolo con una di queste altre due figure geometriche (o con parte di esse). Nel corso delle attività ho notato che queste immagini mentali erano molto radicate, tanto che in un caso non è stato possibile superarla.



Preconcetti e misconcetti

Alla fine della lezione organizzo le definizioni in una tabella come quella a fianco, in cui emergono 7 diverse modalità di definire l'angolo.

La stessa tabella viene fotocopiata e distribuita agli alunni, poi commentata insieme. Dall'analisi della tabella emerge la **necessità di stabilire una definizione condivisa da tutti.**

Si forma da delle linee	È una "punta"	È una figura	È parte di un'altra figura	Come si misura	Come può essere	Altre proprietà
Marta: è quando due o più linee combaciano	Aurora: è la punta di una figura	Lorenzo C: è una figura che rinchiede un'area	Gabriele: è una parte di una figura che è molto piccolo e si trova a destra o a sinistra, in alto o in basso in alcune figura	Viola: si misura con il goniometro e in gradi	Viola: è retto, ottuso, acuto, giro e piatto	Viola: gli angoli corrispondono quasi sempre al numero di lati
Andrea Q: si forma da due lati che si incontrano		Andrea M: è una forma triangolare	Jessica: è una parte di una misura geometrica ed è tipo una parte triangolare	Aurora: si misura in gradi con il goniometro	Lorenzo Me: può essere acuto, ottuso, retto, a giro, piatto	
Lorenzo Me: L'angolo si forma da due lati che si incontrano. La parte di incontro si chiama vertice.		Lorenzo MU: è una forma	Viola: È quella parte invisibile presente nelle figure chiuse	Giada: gli angoli possono misurare l'ampiezza degli oggetti, si misurano in gradi	Giada: in base alla loro ampiezza cambiano misura e automaticamente anche il nome	
Giada: è una figura con due semirette		Emanuele: è una figura	Emanuele: è una parte del poligono			
		Sofia: Può rappresentare una figura, oppure delle figure geometriche	Manvi: è una parte di un poligono che si trova all'interno di esso, nel punto dove si trova anche il vertice che nasce da due lati	Manvi: si misura in gradi		

Verso una definizione di angolo

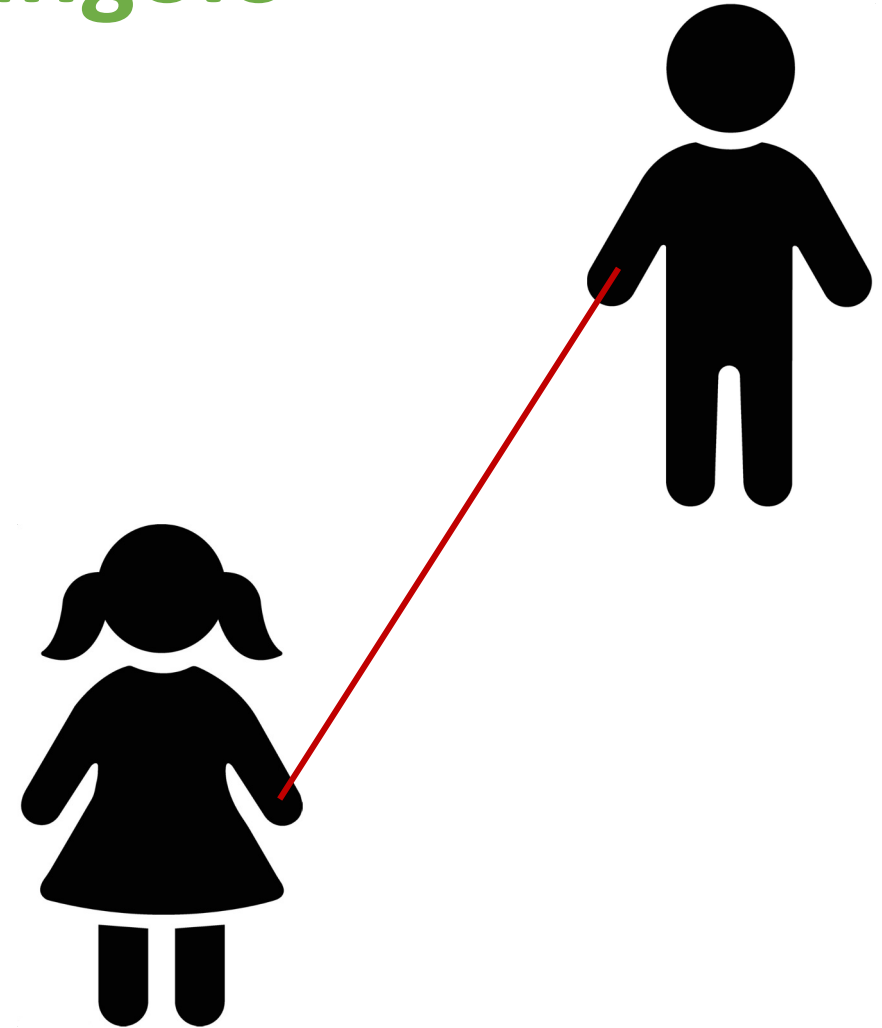
Nella lezione successiva utilizziamo uno spago come mediatore didattico.

Inizialmente lo spago viene teso tra due persone e allora chiedo:

Quale figura geometrica rappresenta?

Vengono date le seguenti risposte:

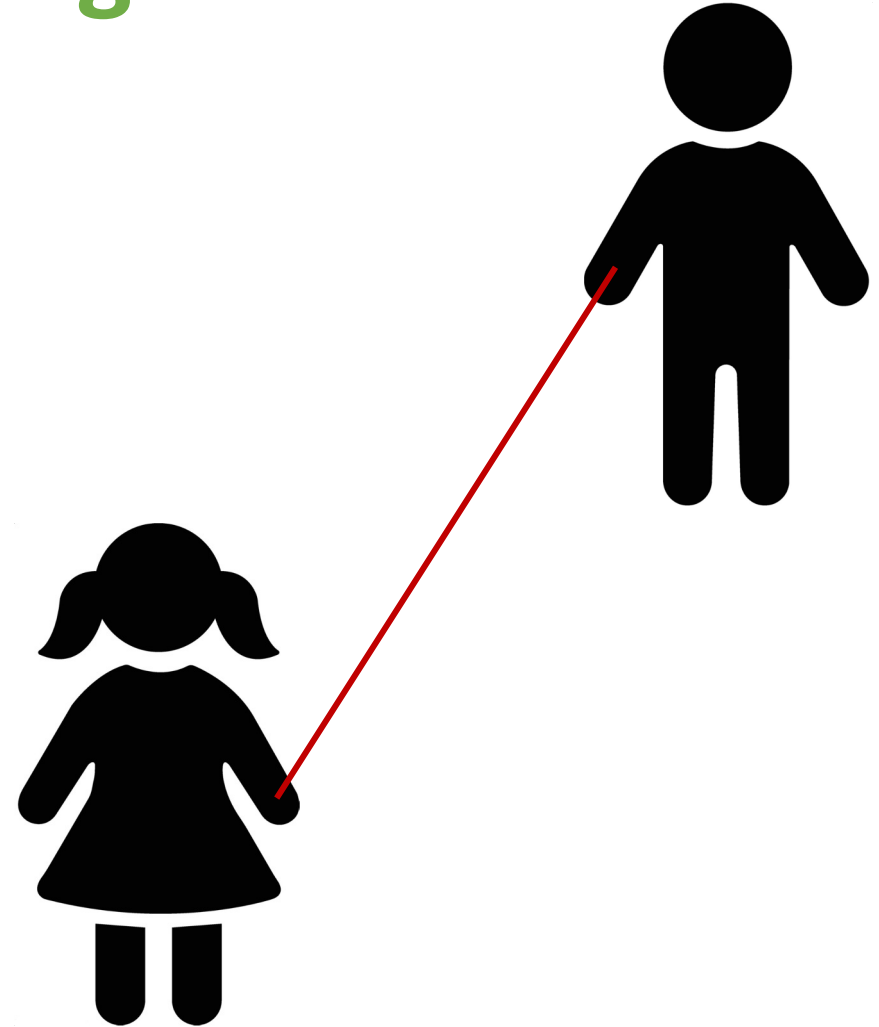
- Una linea
- Un segmento
- Una retta
- Una semiretta



Verso una definizione di angolo

Concordiamo sul fatto che, avendo un inizio e una fine, l'ente geometrico che più si avvicina al modello è un segmento.

Faccio notare che lo spago può essere considerato anche un modello di retta, purché lo si immagini illimitato in entrambi i versi, e che quindi definisce una **direzione**.

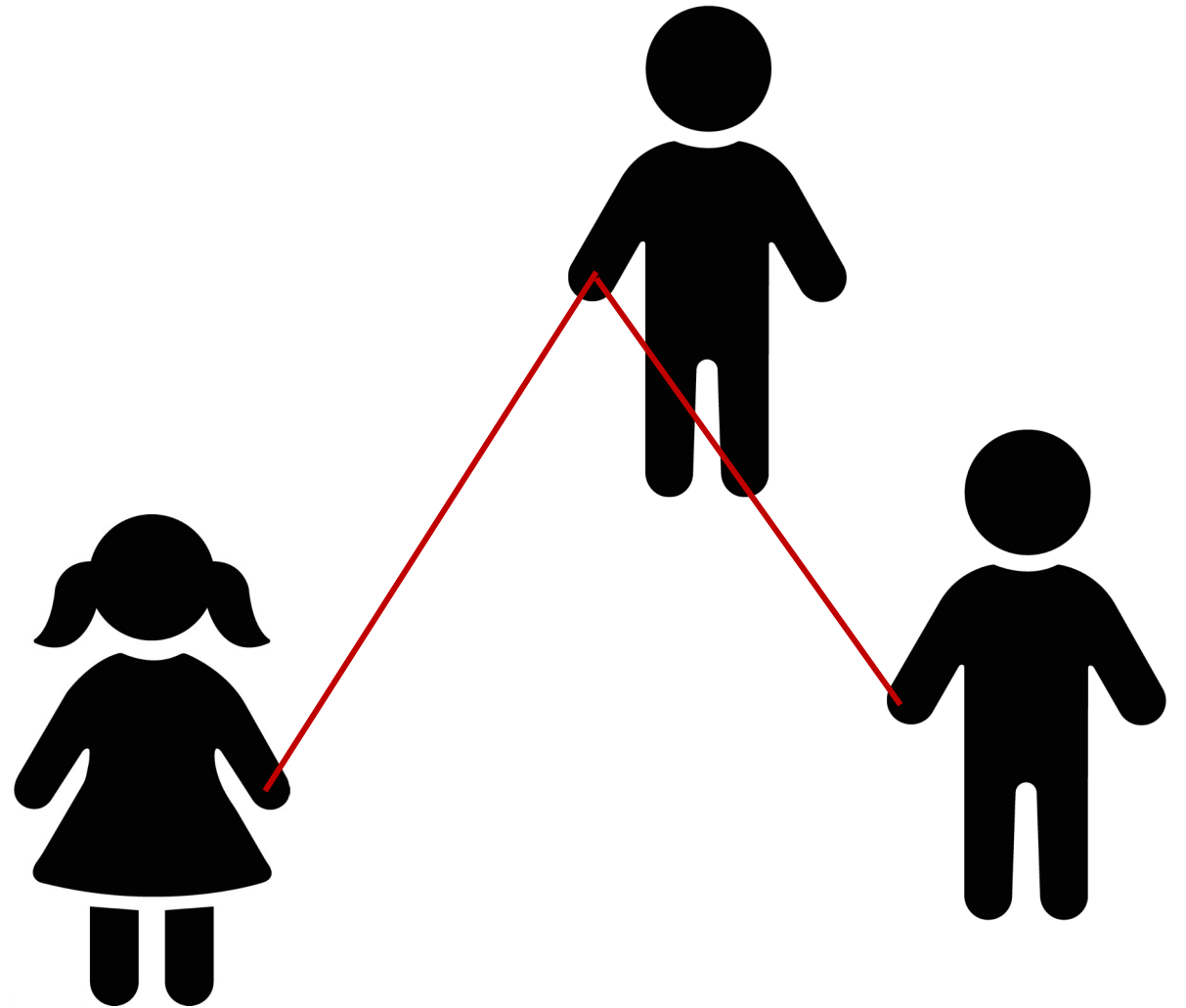


Verso una definizione di angolo

Ora lo spago viene teso tra tre alunni. Di nuovo chiedo:

Quale figura geometrica vedete adesso?

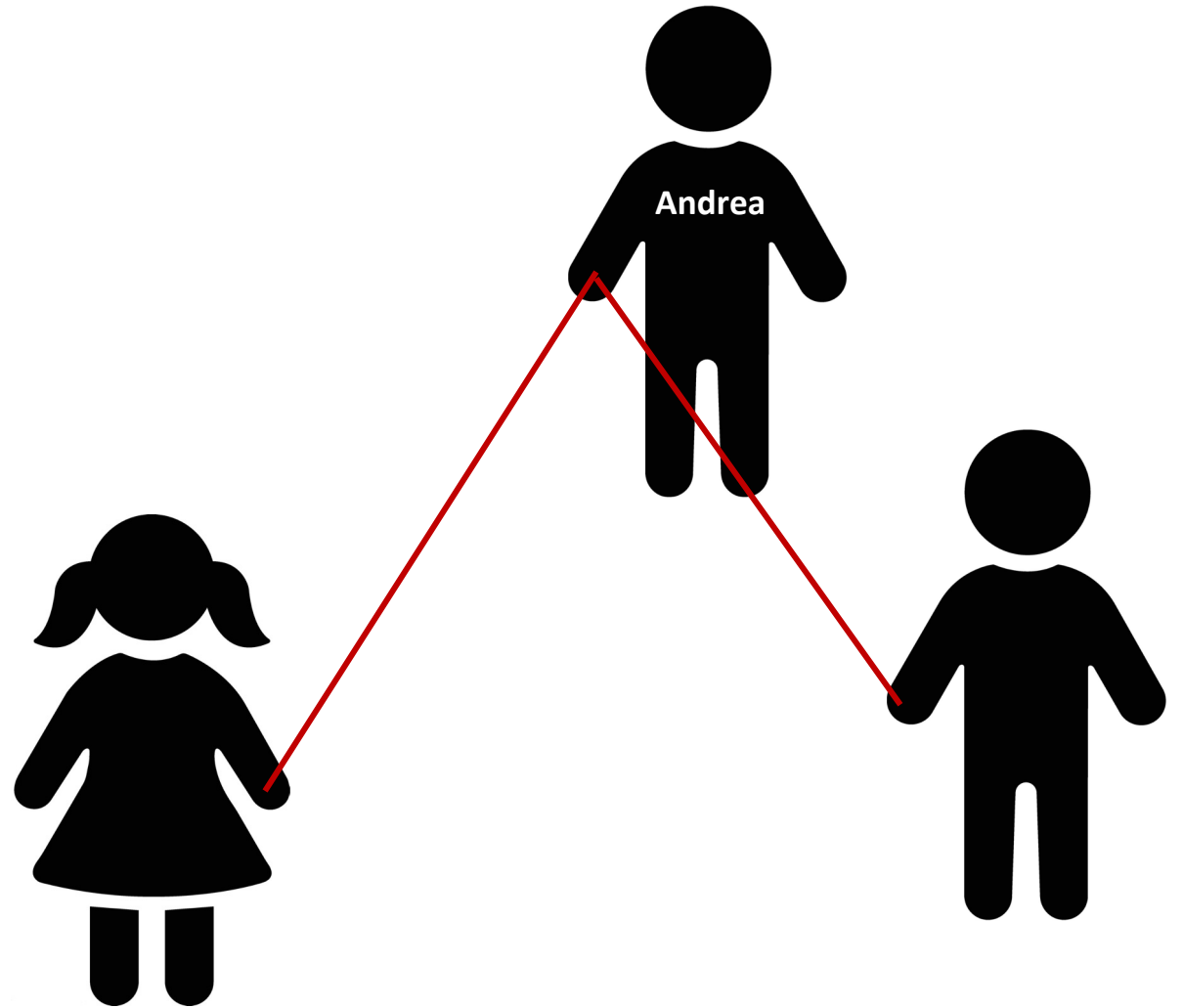
Tutti sono d'accordo nel dire che si tratta di un angolo.



Verso una definizione di angolo

Chiedo allora di descrivere l'angolo che vedono.

- Viola: è una spezzata
- Gaia: è la mano di **Andrea**
- Marta: è l'archetto tra le semirette, che indica la distanza tra le semirette
- Viola: è lo spazio compreso tra le due semirette.



Verso una definizione di angolo

Analizziamo insieme le proposte di ciascuno.

- **Proposta di Gaia: è la mano di Andrea**
- La prof: quindi l'angolo sta tutto in questo punto?

[qualcuno risponde di sì, altri non sono d'accordo]

Faccio osservare che se coincidesse con quel punto, allora muovendo lo spago attorno alla mano di Andrea (che sta fermo), si avrebbe sempre lo stesso angolo. Invece tutti concordano nel dire che un'apertura diversa corrisponde ad angoli diversi.

Verso una definizione di angolo

Analizziamo insieme le proposte di ciascuno.

- **Proposta di Lorenzo: sono le due semirette**
- La prof: siete d'accordo?

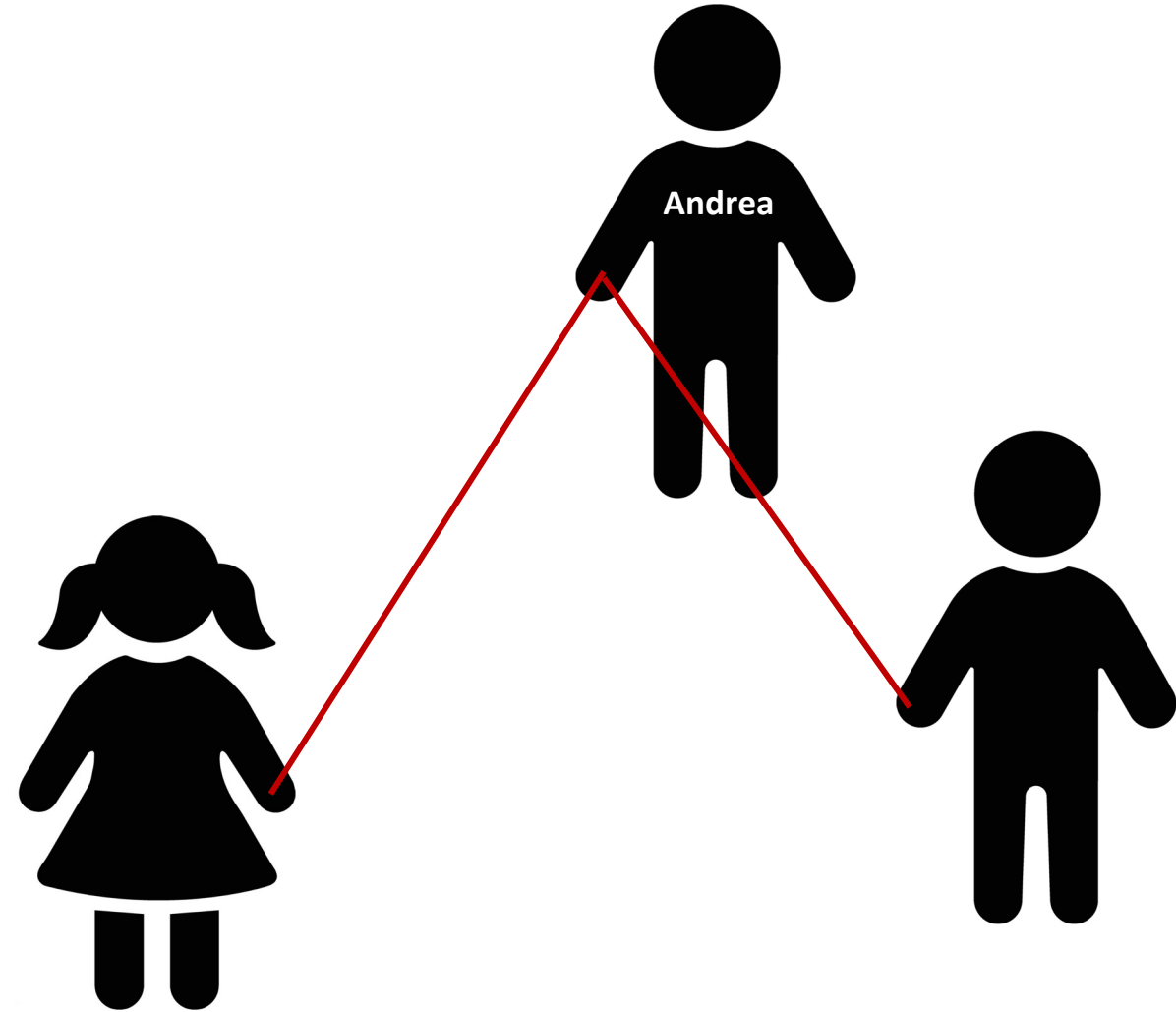
[qualcuno risponde di sì, altri non sono d'accordo]

Chiedo a chi non è d'accordo di dirmi perché non lo è.

Viola: perché le semirette sono infinite, invece quando misuro l'angolo mi viene un numero come 20° , 90° , 180° , quindi vuol dire che devo considerare la sua ampiezza.

Verso una definizione di angolo

- La prof: **Ma allora l'angolo è un numero?**
- Marta: No, l'angolo corrisponde all'archetto, che mi dice qual è la distanza tra le semirette.
- La prof: Noi però possiamo individuare molti archetti che "congiungono" le semirette, in tante posizioni diverse, alcuni più corti, altri più lunghi, perciò se così fosse non saprei esattamente dove sta l'angolo.



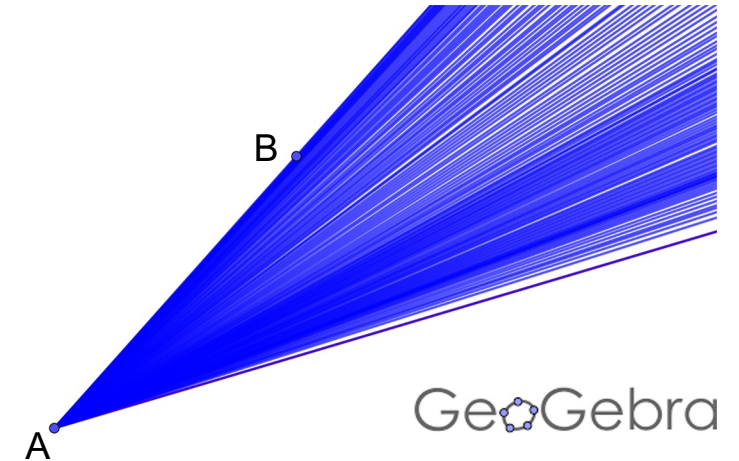
Verso una definizione di angolo

Arrivati a questo punto i ragazzi appaiono disorientati perché nessuna delle loro proposte sembra funzionare...



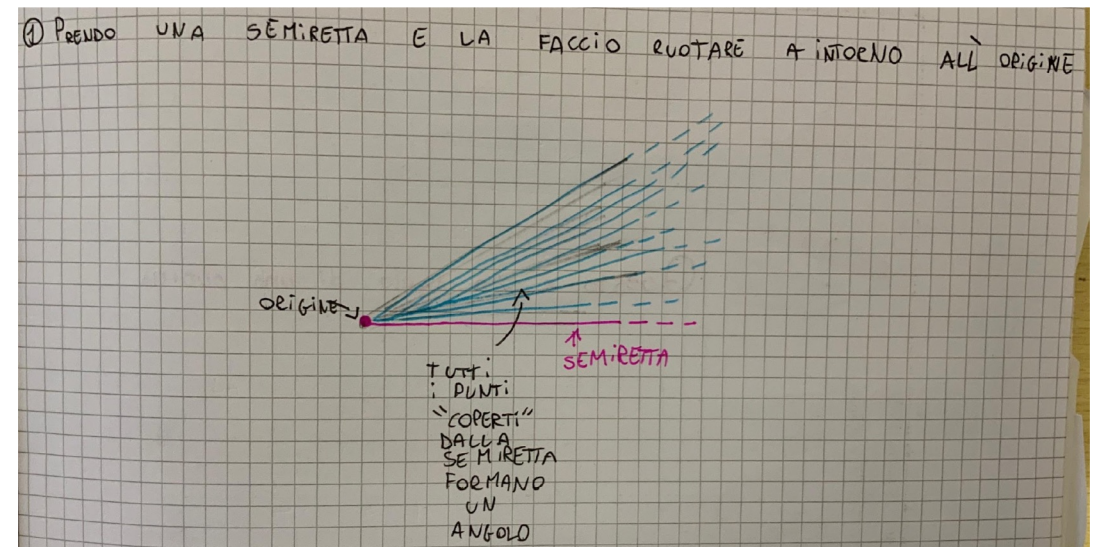
Verso una definizione di angolo

Per sbloccare la situazione apro GeoGebra alla LIM e costruisco una semiretta AB, con traccia attiva, poi muovo il punto B.



Chiedo ai ragazzi se quello che vedono è un angolo. Tutti sono d'accordo, perciò riportiamo la costruzione sul quaderno.

La rappresentazione della semiretta con le estremità tratteggiate, concordata nel precedente percorso didattico, permette di riflettere sul fatto che **l'angolo è una figura illimitata**.



Verso una definizione di angolo

Questa nuova rappresentazione dell'angolo viene confrontata con le definizioni contenute nelle prime quattro colonne della tabella con le proposte della classe. Notiamo che:

- Le proposte della prima colonna sono corrette, ma non bastano per definire l'angolo.
- Le proposte della seconda e quarta colonna non sono coerenti con il fatto che l'angolo è illimitato, quindi non sono utili per darne una definizione.
- Le proposte della terza colonna sono troppo generiche per poter identificare l'angolo, quindi devono essere dettagliate meglio.

Si forma da delle linee	È una "punta"	È una figura	È parte di un'altra figura
Marta: è quando due o più linee combaciano	Aurora: è la punta di una figura	Lorenzo C: è una figura che rinchiude un'area	Gabriele: è una parte di una figura che è molto piccolo e si trova a destra o a sinistra, in alto o in basso in alcune figura
Andrea Q: si forma da due lati che si incontrano		Andrea M: è una forma triangolare	Jessica: è una parte di una misura geometrica ed è tipo una parte triangolare
Lorenzo Me: L'angolo si forma da due lati che si incontrano. La parte di incontro si chiama vertice.		Lorenzo MU: è una forma	Viola: È quella parte invisibile presente nelle figure chiuse
Giada: è una figura con due semirette		Emanuele: è una figura	Emanuele: è una parte del poligono
		Sofia: Può rappresentare una figura, oppure delle figure geometriche	Manvi: è una parte di un poligono che si trova all'interno di esso, nel punto dove si trova anche il vertice che nasce da due lati

Verso una definizione di angolo

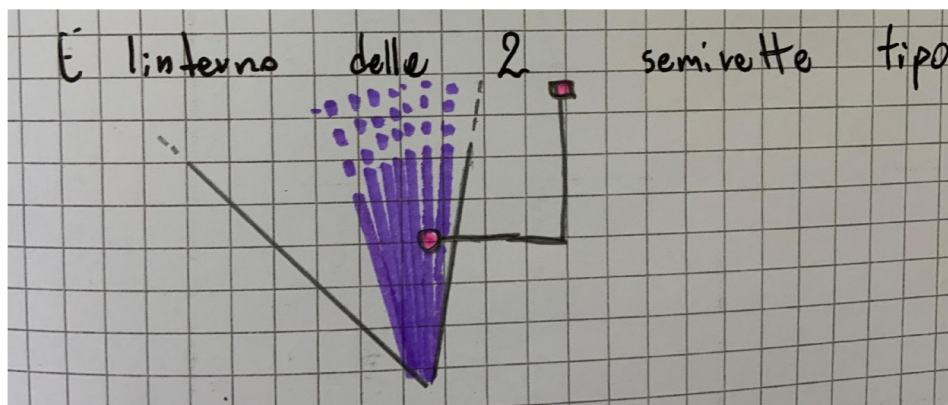
A questo punto chiedo di rispondere di nuovo alla domanda:

“Che cos'è un angolo?”.

SE DISEGNI 2 SEMIRETTE CHE SI INCONTRANO
ATTRAVERSO UN VERTICE OSSIA IL PUNTO D'INCONTRO
SULLA PARTE ~~DENTRO~~ LE 2 SEMIRETTE SI
CHAMA ANGOLO

L'angolo è l'insieme di 2 semirette e del vertice. L'angolo
si trova all'interno tra le due semirette con
origine in comune

③ CHE COS'È UN ANGOLO?
L'ANGOLO È LO SPAZIO TRA LE DUE SEMIRETTE

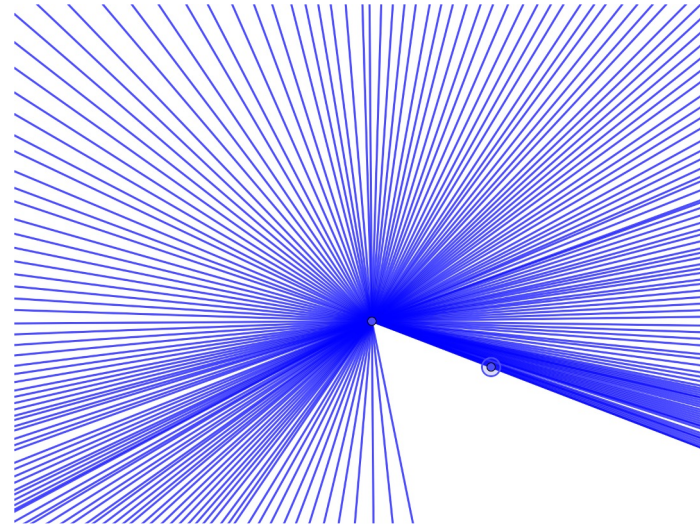


L'angolo è tutta la parte compresa tra le due
semirette che lo delimitano ^{con l'origine in comune} ai lati (sopra, avanti)
è invisibile si può immedesimare in tante piccole
semirette.

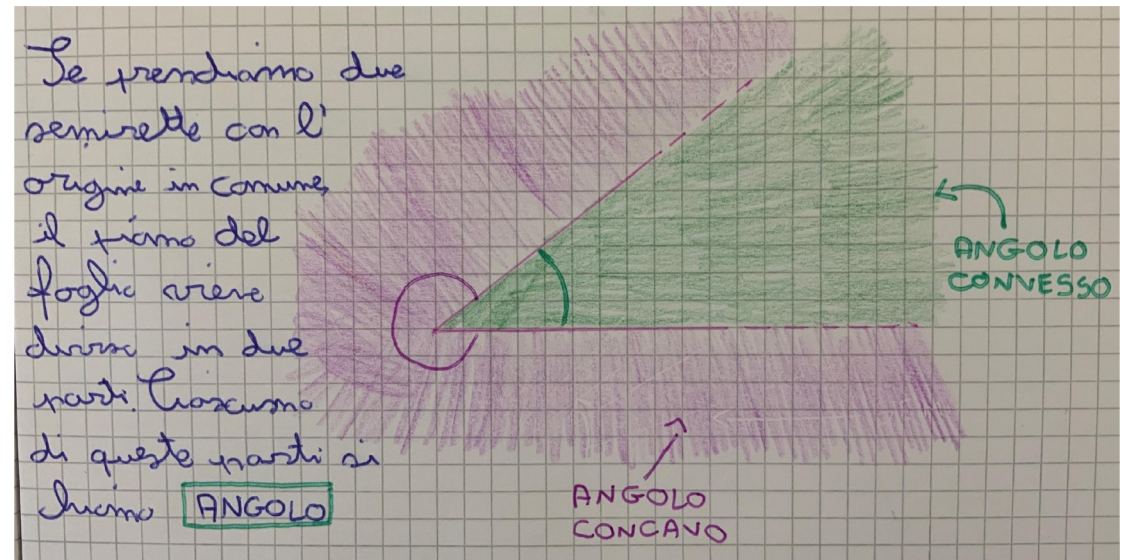
Com'è normale che sia, gli alunni sono stati in grado di «vedere» soltanto uno dei due angoli individuati dalle due semirette.

Verso una definizione di angolo

Sempre con l'aiuto di GeoGebra, faccio vedere che l'angolo può anche "andare oltre" l'angolo piatto e in questo modo diventa evidente che le due semirette individuano due angoli.



Arriviamo così alla definizione "completa" di angolo, che i ragazzi annotano sul quaderno. Possiamo anche fissare i concetti di **angolo concavo** e **angolo convesso**.



Verso una definizione di angolo

Concludiamo il lavoro sulla definizione facendo di nuovo riferimento alla tabella e osservando che le ultime tre colonne contengono informazioni aggiuntive sull'angolo che non sono necessarie per definirlo.

Come si misura	Come può essere	Altre proprietà
Viola: si misura con il goniometro e in gradi	Viola: è retto, ottuso, acuto, giro e piatto	Viola: gli angoli corrispondono quasi sempre al numero di lati
Aurora: si misura in gradi con il goniometro	Lorenzo Me: può essere acuto, ottuso, retto, a giro, piatto	
Giada: gli angoli possono misurare l'ampiezza degli oggetti, si misurano in gradi	Giada: in base alla loro ampiezza cambiano misura e automaticamente anche il nome	
Manvi: si misura in gradi		

Momento di riflessione didattica

Il modello “con lo spago” è incompleto rispetto al significato geometrico di angolo (coincide con i soli lati) e perciò formalmente scorretto MA è didatticamente utile perché permette di far emergere eventuali misconcezioni e di rimuoverle attraverso controesempi.

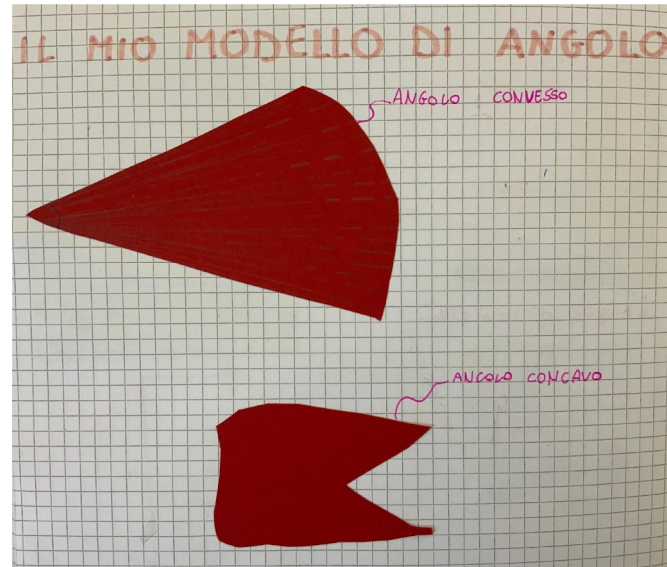
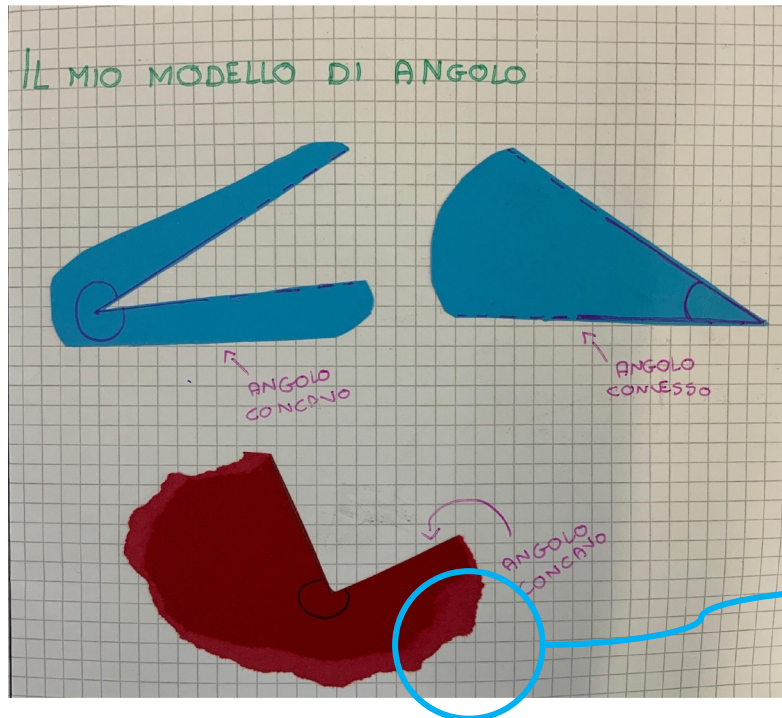
- L’angolo non è il punto perché... se apro e chiudo lo spago l’angolo cambia, il punto no
- L’angolo non coincide con le semirette perché... le semirette da sole non permettono di *misurare* l’apertura
- L’angolo non è l’archetto perché... per uno stesso angolo posso tracciare archetti più “stretti” o più “larghi”

Il modello “incompleto” deve essere però prontamente superato e sostituito da un altro che permetta di giungere a una definizione chiara e condivisa (anche per permettere alla classe di risolvere l’impasse e superare il senso di momentanea frustrazione).

GeoGebra permette di costruire in poco tempo un modello versatile e dinamico che rende evidente la natura dell’angolo.

Costruiamo un angolo

Chiedo allora di disegnare e ritagliare un angolo convesso e un angolo concavo sul cartoncino, in modo che **il modello sia coerente con la definizione.**



Un'alunna senza forbici si arrangia strappando i bordi dell'angolo e così ci accorgiamo che in questo modo risulta ancora più chiaro che l'angolo è illimitato

GLI ANGOLI della 1A

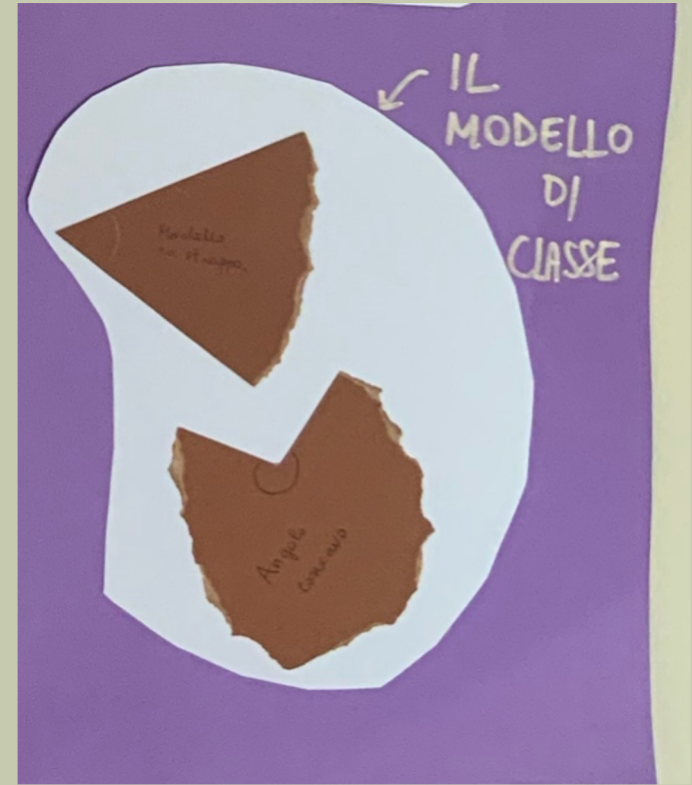
..... prima.....



..... e dopo.....



Riportiamo i "nuovi" modelli sullo stesso cartellone, di fianco ai "vecchi", in modo che sia evidente il percorso concettuale effettuato dalla classe. Eleggiamo come modello di classe quello con i bordi strappati, perché permette di rafforzare l'idea che l'angolo è illimitato.

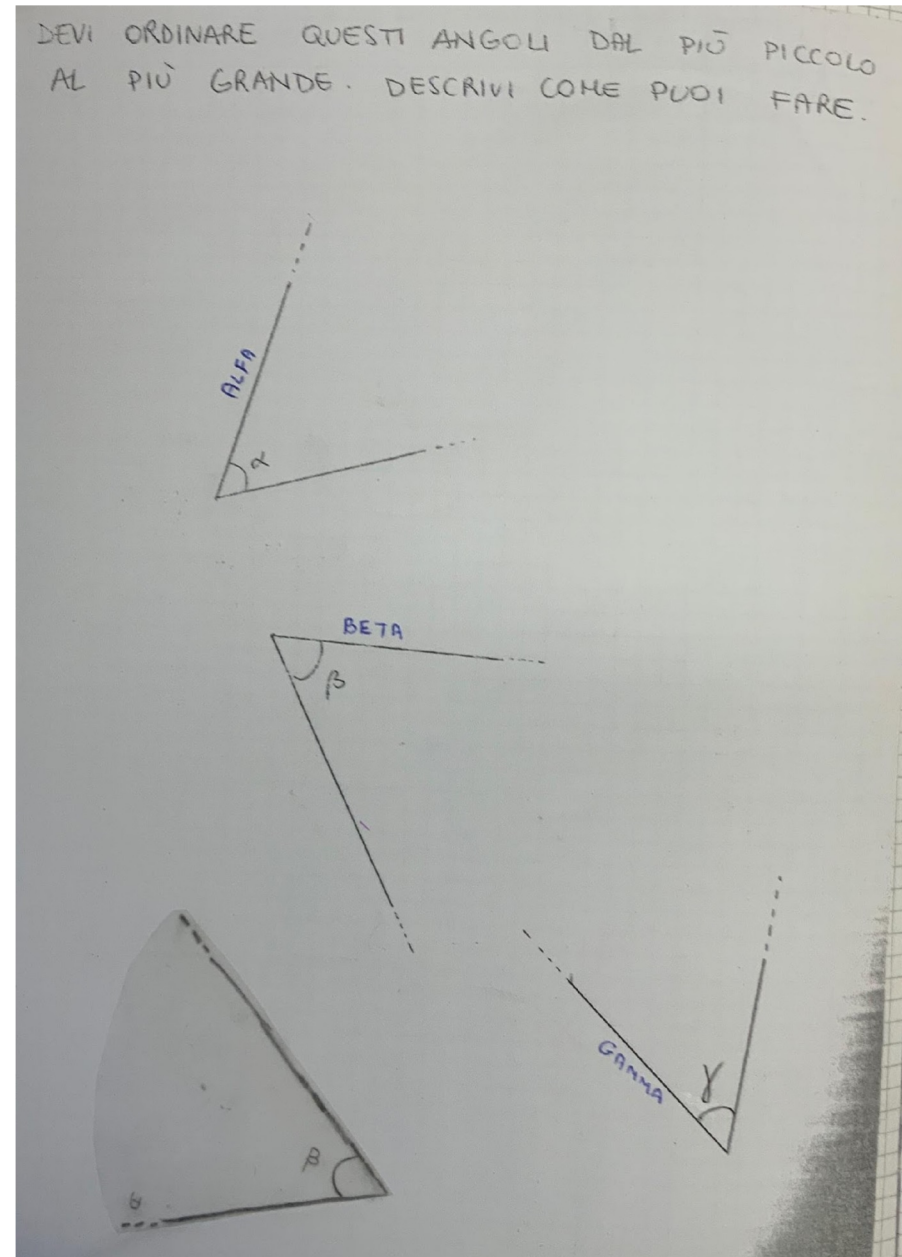


Confronto di angoli

Agli alunni, disposti in piccoli gruppi, viene distribuita una scheda in cui sono rappresentati tre angoli di ampiezza simile, con la seguente consegna.

Devi ordinare questi angoli dal più piccolo al più grande. Descrivi come puoi fare.

Ogni alunno ha a disposizione un pezzo di carta trasparente.

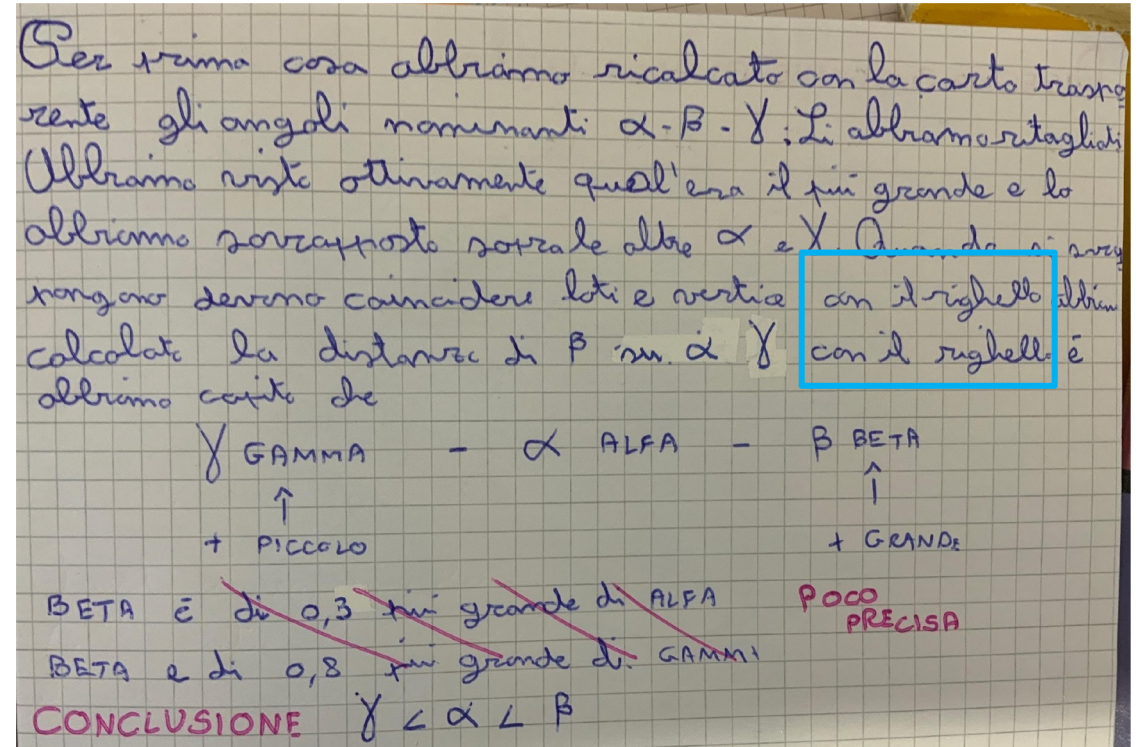


Confronto di angoli

I gruppi confrontano i metodi utilizzati da ciascuno. **Qualcuno prova a usare il righello per «misurare» la distanza tra i lati: questa è un'occasione per mostrare a tutti che questo metodo non fornisce una misura univoca.**

Arriviamo alla conclusione che conviene ricalcare gli angoli sulla carta trasparente, per poi **sovrapporli**.

Segue un momento di esercitazione sul confronto di angoli.

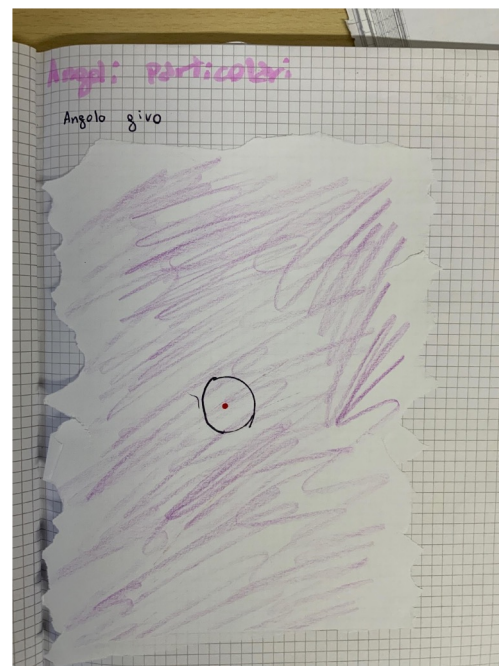


Conclusione condivisa: per confrontare due angoli bisogna sovrapporli in modo che i vertici e un lato coincidano o per di che si guarda chi è più grande e chi è più piccolo o se sono uguali

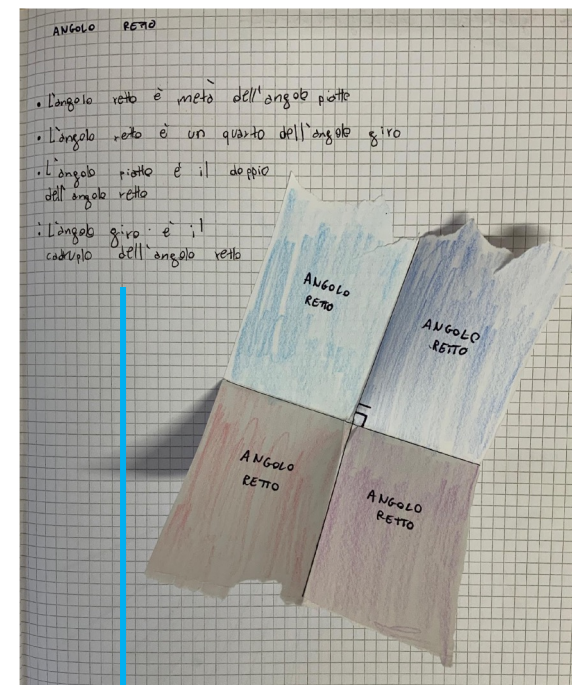
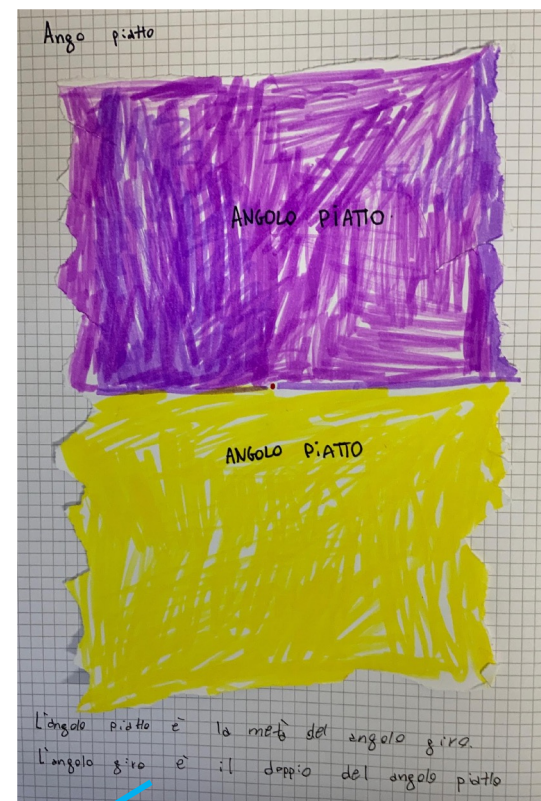
Angoli particolari con la carta / 1

Utilizzando la piegatura della carta, realizziamo modelli di angoli particolari: giro, piatto e retto.

Chiedo agli alunni di definirli e descriverli attraverso parole-relazione (doppio, metà, ...)



L'angolo piatto è la metà dell'angolo giro.
L'angolo giro è il doppio dell'angolo piatto.

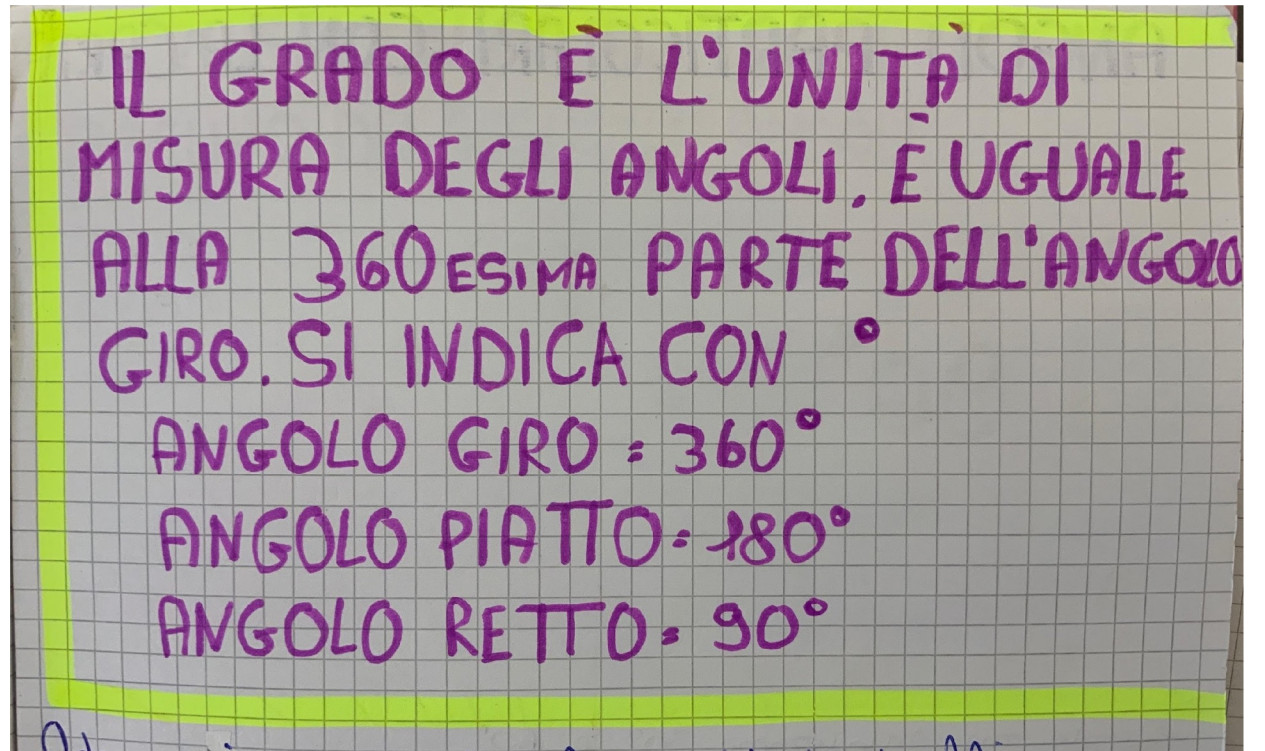


L'angolo retto è metà dell'angolo piatto.
L'angolo retto è un quarto dell'angolo giro.
L'angolo piatto è il doppio dell'angolo retto.
L'angolo giro è il quadruplo dell'angolo retto.

Il grado angolare

A questo punto introduco il concetto di **grado**, stabilendo che l'angolo giro misura 360° .

Gli alunni capiscono che allora l'angolo piatto deve misurare la metà, cioè 180° e l'angolo retto $180 : 2 = 90^\circ$.



IL GRADO È L'UNITÀ DI MISURA DEGLI ANGOLI, È UGUALE ALLA 360ESIMA PARTE DELL'ANGOLO GIRO. SI INDICA CON °

ANGOLO GIRO = 360°
ANGOLO PIATTO = 180°
ANGOLO RETTO = 90°

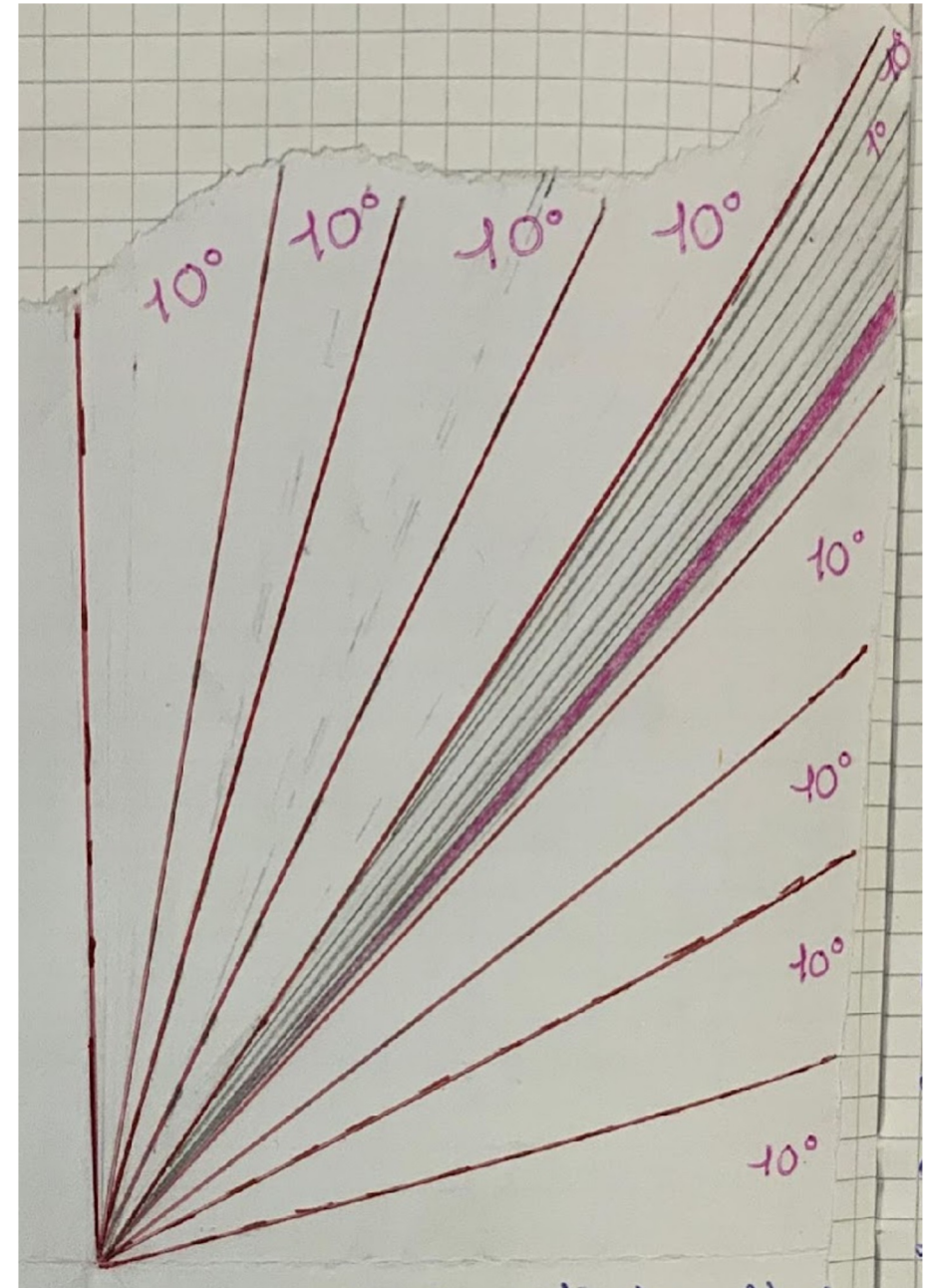
Il grado angolare

Per capire meglio che cos'è il **grado** chiedo agli alunni di realizzare con la piegatura della carta un modello di angolo retto.

Poi chiedo loro di dividerlo "a occhio" in 9 parti uguali (ogni parte = 10°), poi di suddividere ciascuno di questi angoli in 10 parti uguali (ogni parte = 1°).

L'attività permette agli alunni di capire che la suddivisione va effettuata in senso radiale e non lineare (qualcuno prova a usare il righello, ma si accorge che le parti risultanti non sono tutte uguali).

Inoltre permette di "allenare l'occhio" (e la mano) a effettuare stime di angoli.



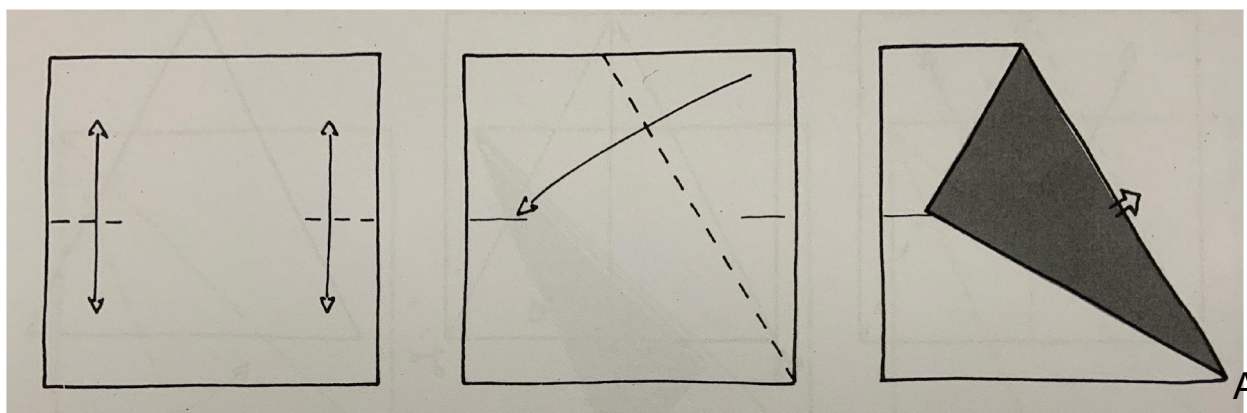
Il grado angolare

Con l'uso del goniometro da lavagna tracciamo un angolo di un grado sul pavimento del corridoio ed entriamo tutti dentro l'angolo.



Angoli particolari con la carta / 2

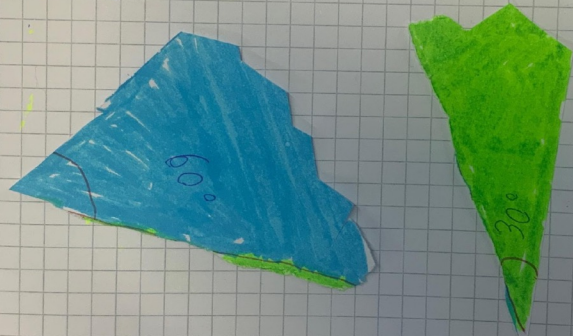
A partire da un nuovo foglio di carta, effettuiamo insieme la seguente piegatura.



Chiedo poi agli alunni, in piccoli gruppi, di ricavare la misura dei due angoli con vertice in A che si sono formati e di spiegare il ragionamento che hanno fatto per rispondere.

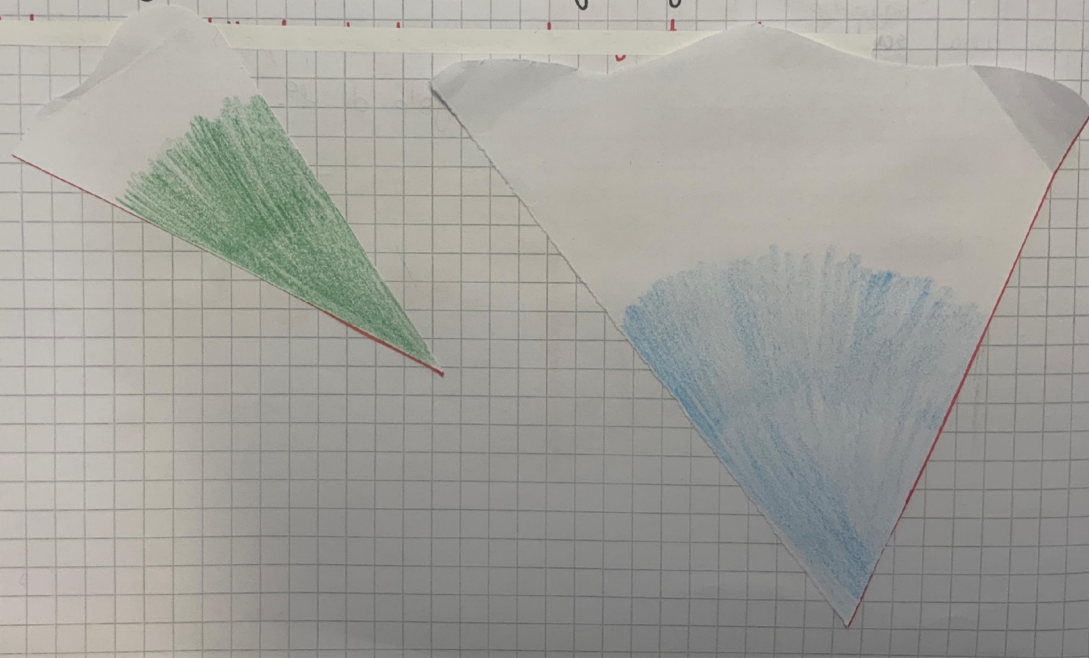
Angoli particolari con la carta / 2

PER TROVARE QUANTI GRADI MISURANO GLI ANGOLI ABBIAMO: PER TROVARE QUELLO PIÙ PICCOLO L'ABBIAMO MISURATO MESSO IN CONFRONTO A QUELLO RETTO E CI SIAMO RESI CONTO CHE ERA UN TERZO DELL'ANGOLO RETTO, $90 : 3 = 30^\circ$. CI SIAMO ANCHE RESI CONTO CHE QUELLO PIÙ GRANDE È IL DOPIO DI QUELLO PIÙ PICCOLO, $30 \times 2 = 60^\circ$.



SAPPIAMO CHE I DUE ANGOLI SOMMATI INSIEME FORMANO UN ANGOLO RETTO. L'ANGOLO PIÙ PICCOLO È LA METÀ DELL'ANGOLO MEZZANO, ~~SEMPRE~~ DA QUESTE INFORMAZIONI POSSIAMO RICAVARE CHE L'ANGOLO RETTO È IL TRIPLO DELL'ANGOLO PIÙ PICCOLO, E SICCOME L'ANGOLO RETTO MISURA 90° DOBBIAMO FARE $90 : 3$ PER TROVARE LA MISURA DELL'ANGOLO PIÙ PICCOLO (30). PER TROVARE INVECE LA MISURA DELL'ANGOLO MEZZANO BASTA FARE $90 - 30 = 60$.

Ho visto che i due angoli insieme formano un angolo retto. Poi abbiamo visto che l'angolo Ottavio, quello verde, è la metà dell'angolo Guglielmo, quello blu. Visto che l'angolo retto misura 90° , abbiamo fatto $90 : 3 = 30$, poi abbiamo fatto $30 \cdot 2 = 60$. Quindi: l'angolo Ottavio misura 30° e l'angolo Guglielmo misura 60° .



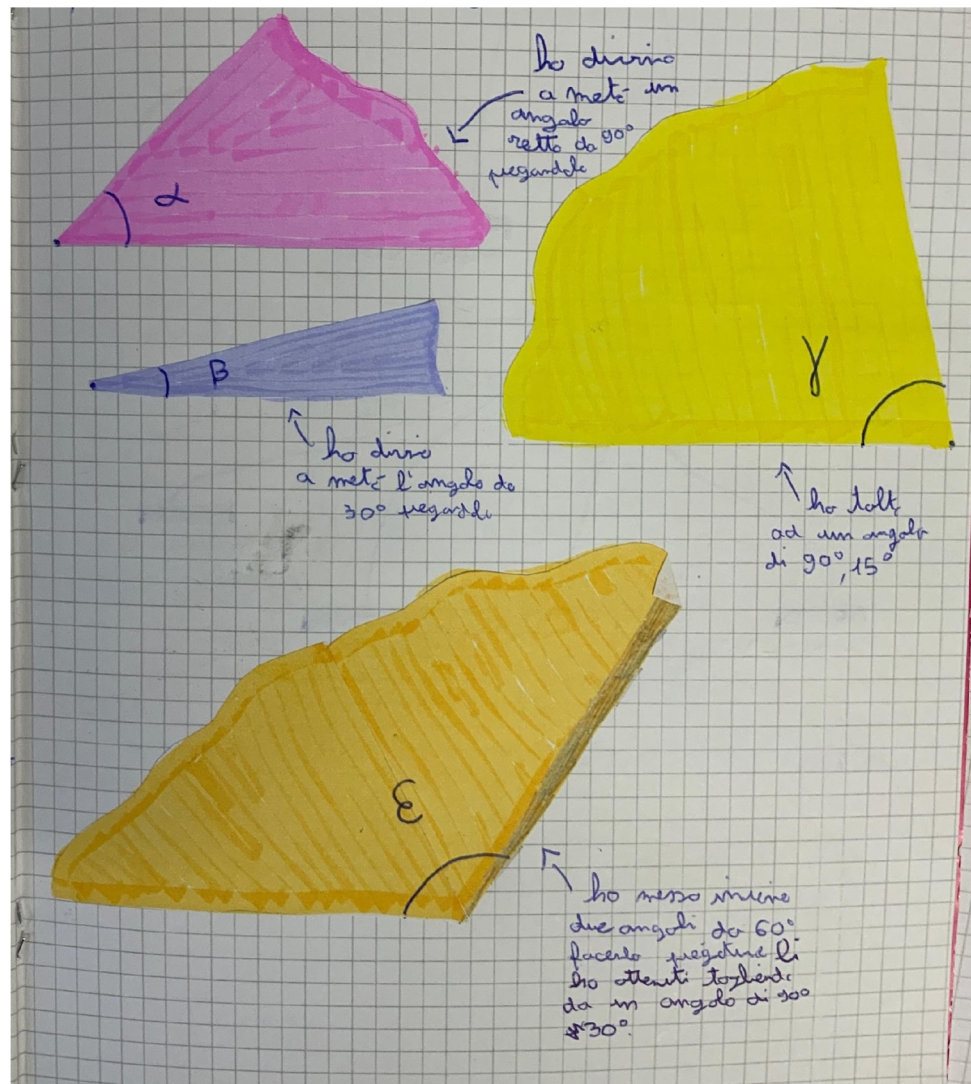
Nella condivisione dei vari metodi risolutivi, mostro la piegatura che permette di dividere un angolo a metà, e che qualcuno aveva già scoperto autonomamente. Questa piegatura servirà per svolgere il compito successivo.

Angoli particolari con la carta / 2

Ora chiedo di costruire i seguenti angoli utilizzando le piegature che abbiamo visto insieme (e senza l'uso del goniometro, che non abbiamo ancora utilizzato) e di spiegare come li hanno ottenuti.

- Alfa = 45°
- Beta = 15°
- Gamma = 75°
- Epsilon = 120°

Questa attività, svolta individualmente, mi permette di **valutare** l'avvenuta comprensione dei concetti introdotti fin qui, ma anche le capacità espositive e di problem solving.



Seconda parte del percorso

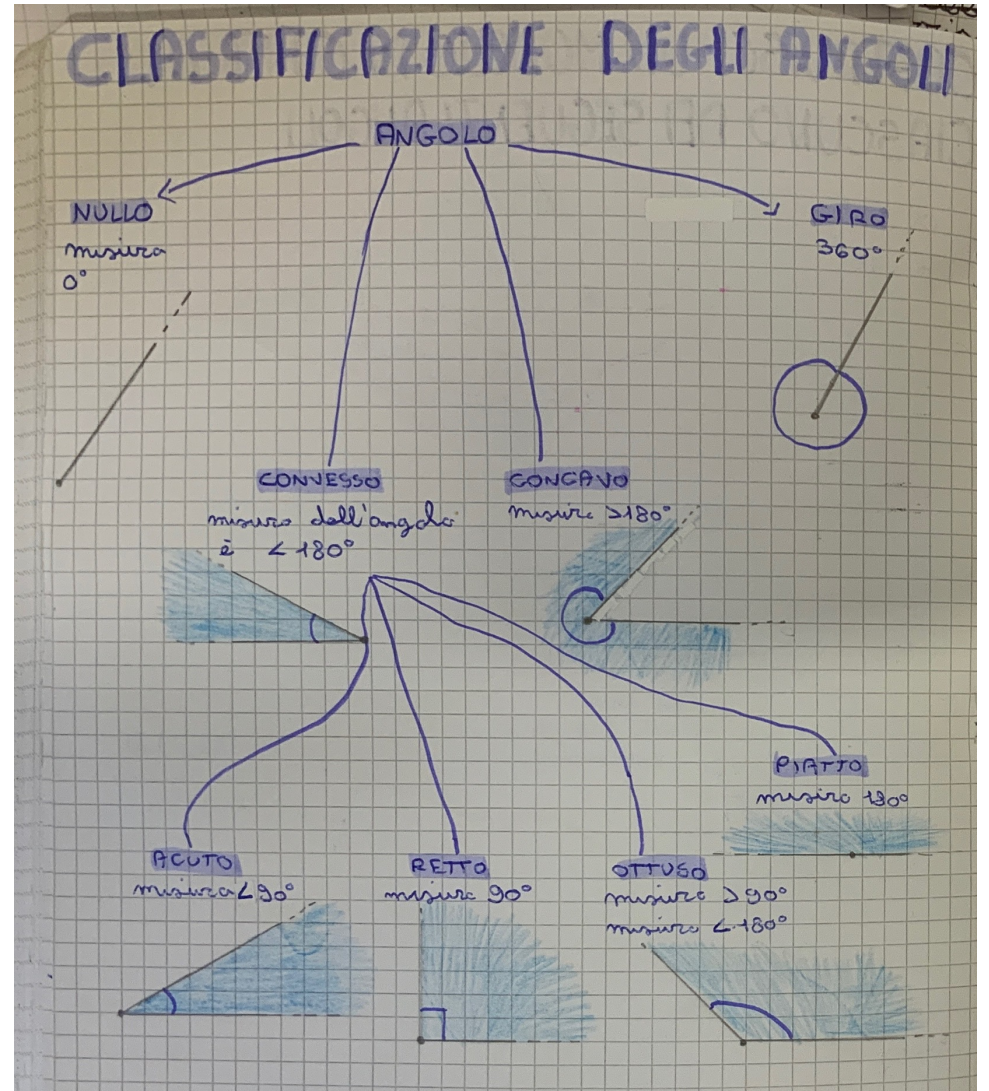
- Classificazione di angoli (2 h)
- Angoli con il goniometro (2 h)
- Break: battaglia navale cartesiana (1,5 h)
- Angoli sul piano cartesiano (1 h)
- Angoli di complemento (2 h)
- Perpendicolari e parallele (2 h)
- Angoli opposti al vertice (1 h)
- Angoli e parallelism (2 h)



Classificazione di angoli

Riprendiamo la classificazione degli angoli, che gli alunni già conoscono.

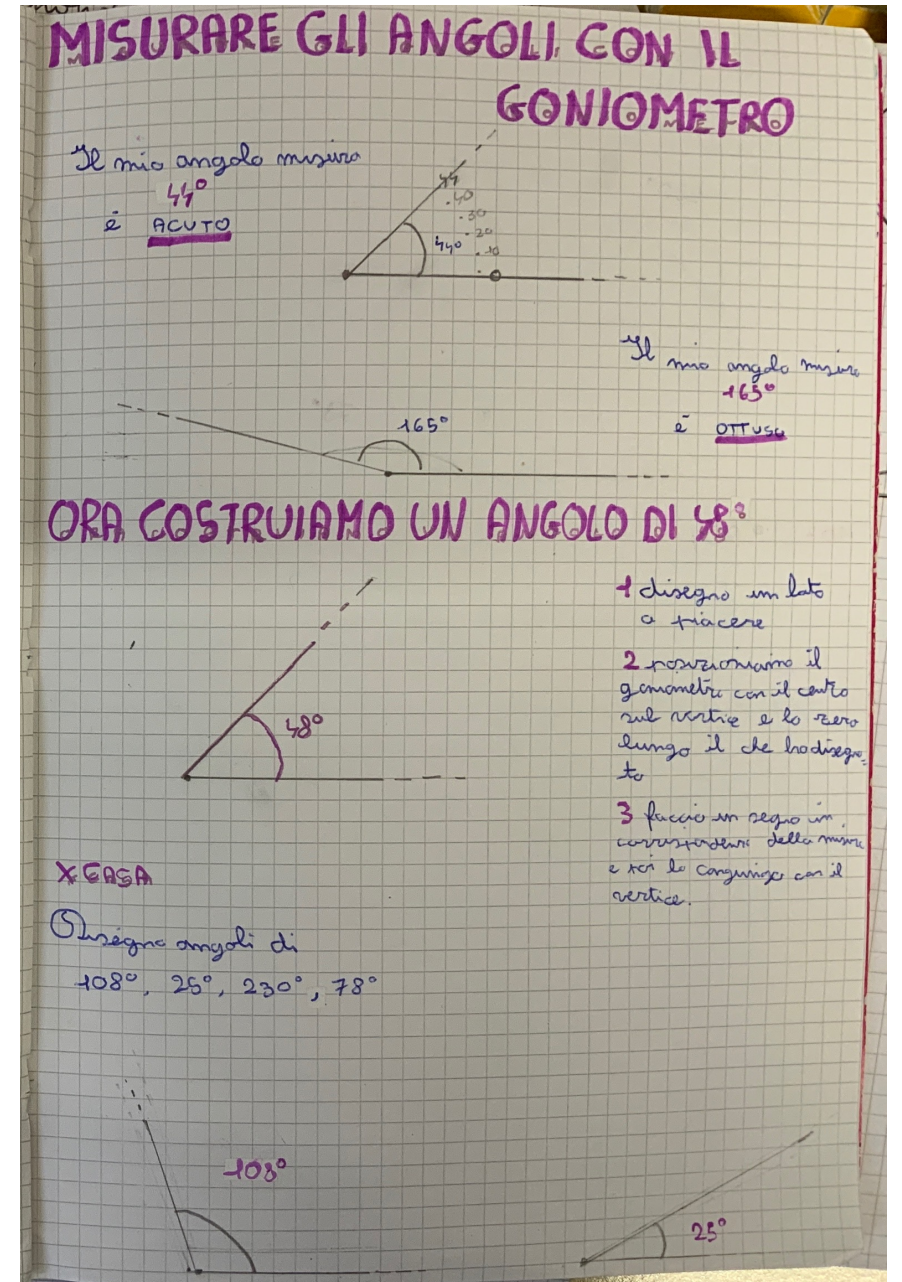
Gli esercizi di classificazione vengono svolti confrontando l'angolo da classificare con l'angolo retto della squadra. Questo permette di esercitarsi nell'uso delle squadre, che serviranno in seguito per il lavoro sulle rette.



Angoli con il goniometro

Finalmente introduciamo l'uso del goniometro.

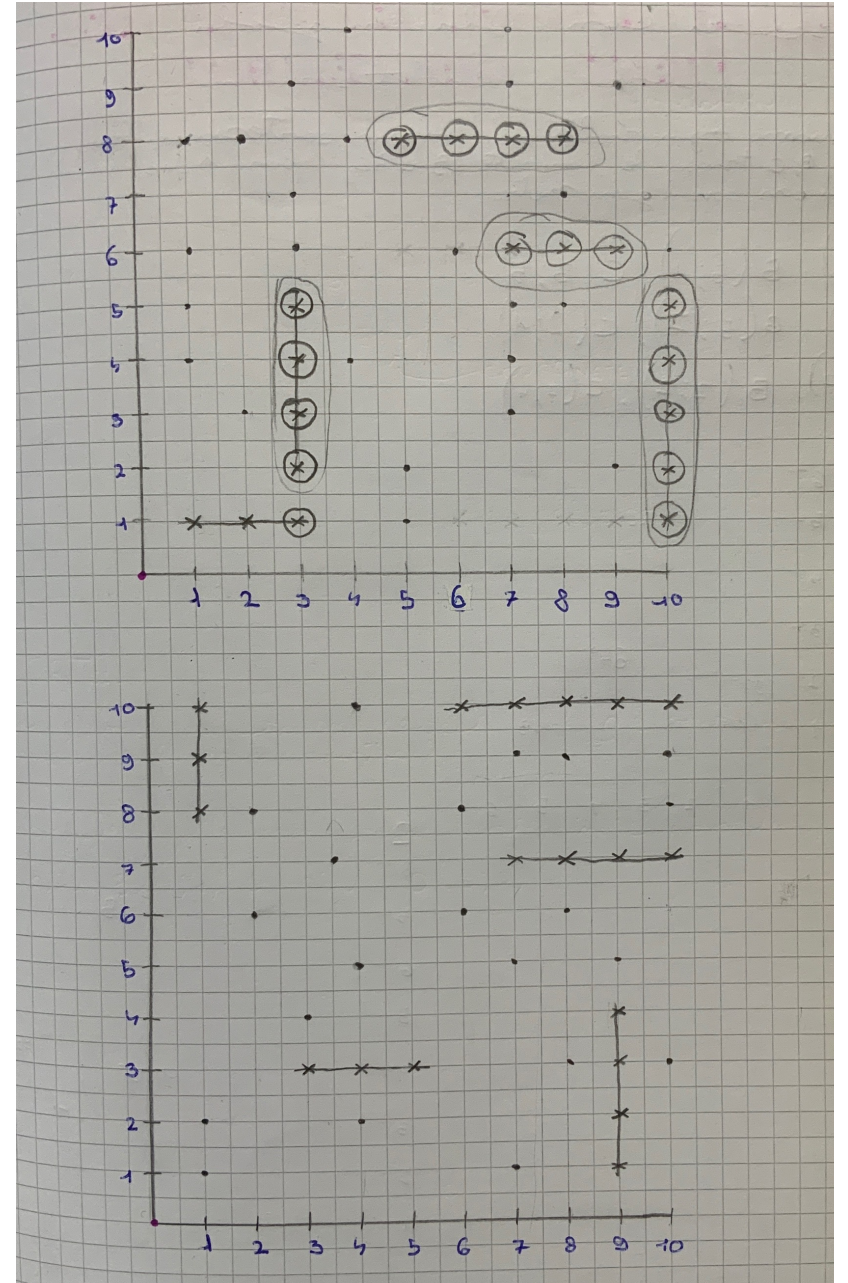
Dedichiamo due lezioni a spiegazioni ed esercitazioni, per permettere a tutti di superare le difficoltà iniziali sull'uso dello strumento.



Battaglia navale cartesiana

Introduciamo il piano cartesiano attraverso il gioco della battaglia navale. Dopo aver spiegato il sistema di coordinate cartesiane, organizziamo due sessioni di gioco.

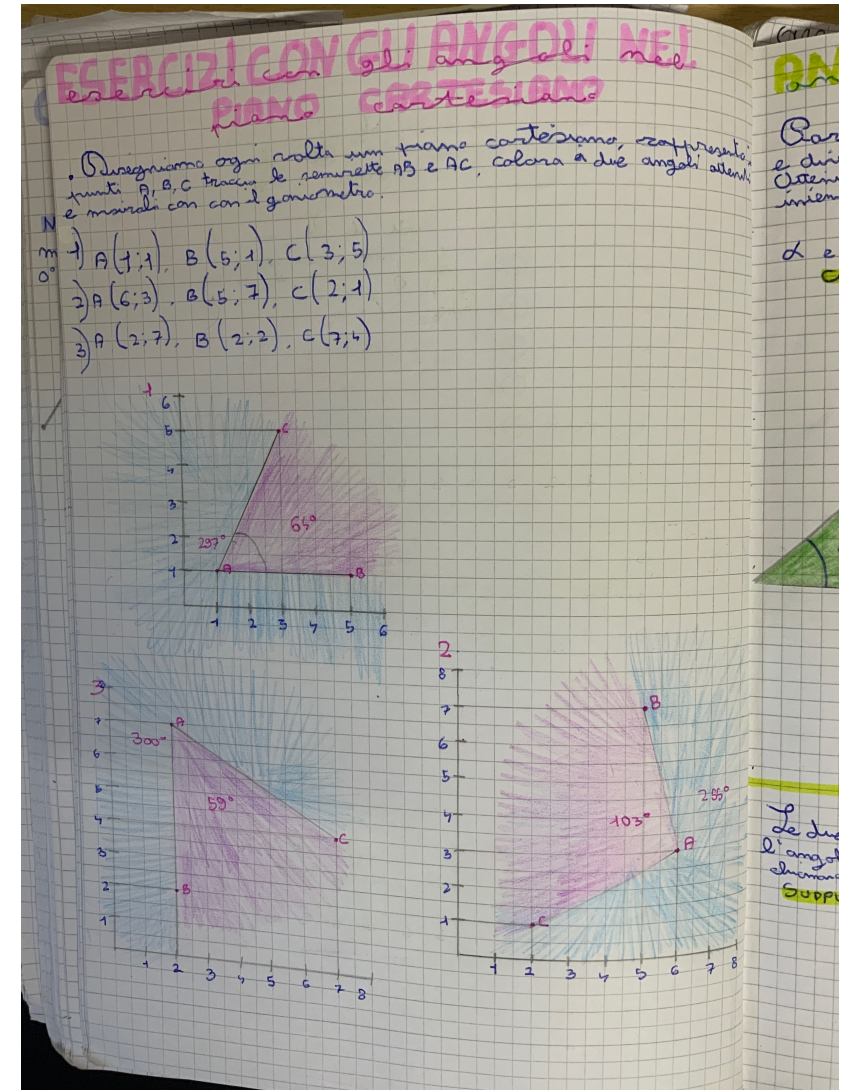
- Nella prima l'insegnante sistema le navi sul piano cartesiano e tutti gli alunni, a turno, devono «sparare» (annunciando le coordinate del bersaglio) in modo da colpirle e affondarle tutte.
- Nella seconda la classe viene divisa in due squadre che si sfidano a colpi cartesiani.



Esercizi con gli angoli sul piano cartesiano

Disegna ogni volta un piano cartesiano, rappresenta i punti A , B , C , traccia le semirette AB e AC , colora i due angoli ottenuti e misurali con il goniometro.

- $A(1; 1)$, $B(5; 1)$, $C(3; 5)$
- $A(6; 3)$, $B(5; 7)$, $C(2; 1)$
- $A(2; 7)$, $B(2; 2)$, $C(7; 4)$



Angoli di complemento

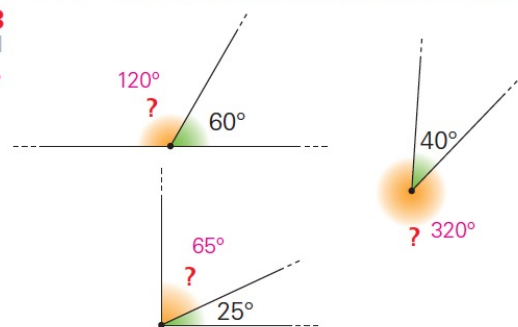
Introduciamo angoli **complementari**, **supplementari** ed **esplementari** e proponiamo alcuni problemi che coinvolgano questi concetti.

293 Determina l'ampiezza di due angoli complementari, sapendo che uno supera l'altro di 20° . [35° ; 55°]

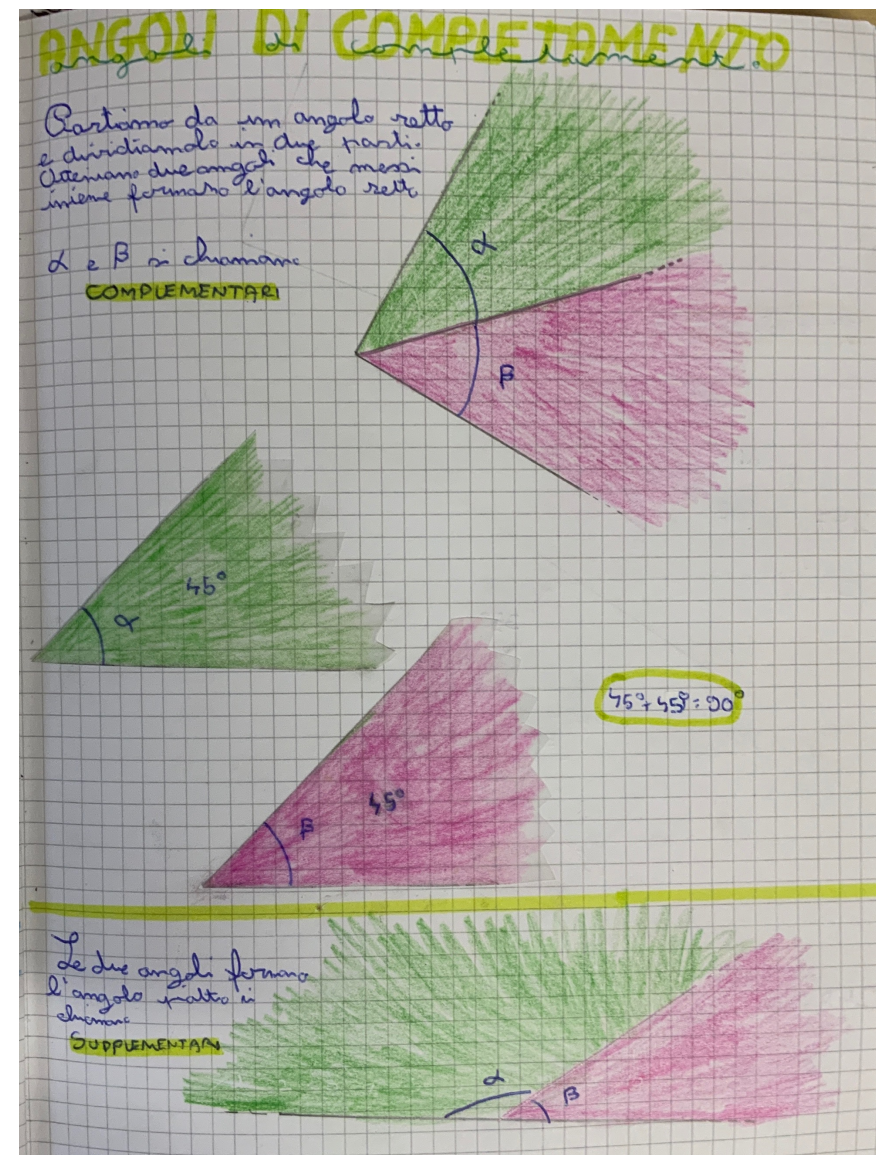
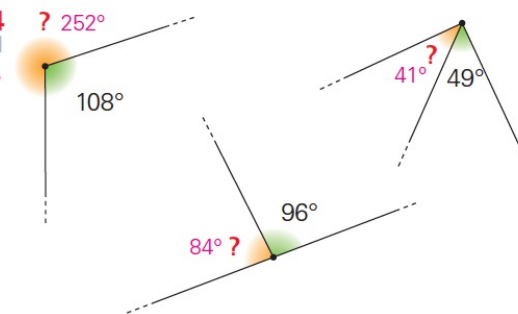
297 Determina l'ampiezza di due angoli supplementari, sapendo che uno è sette volte l'altro.

Osserva le seguenti figure e determina, in ciascun caso, l'ampiezza dell'angolo segnato in arancione.

283



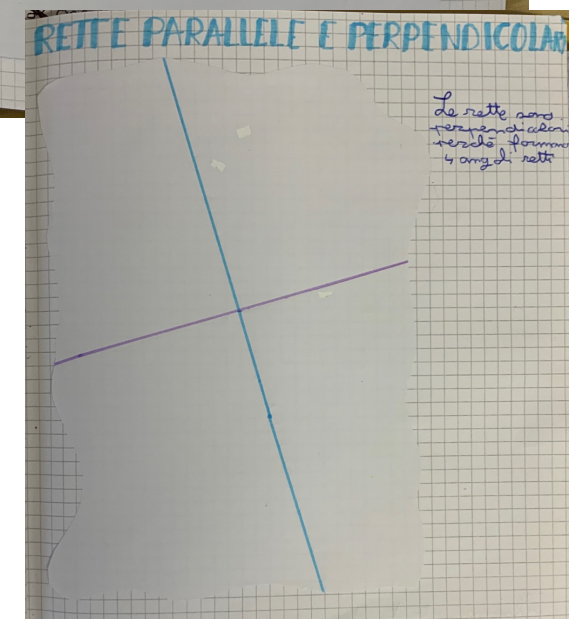
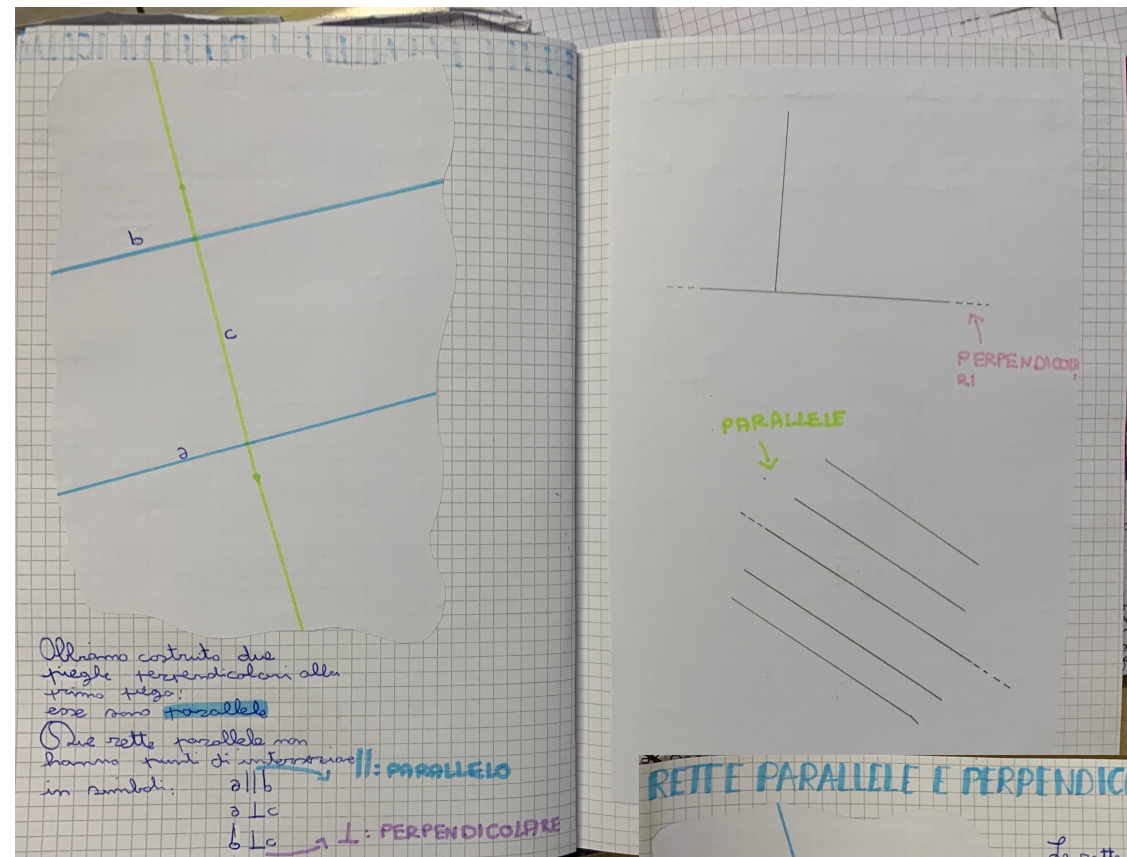
284



Perpendicolari e parallele

Riprendiamo le tecniche di piegatura della carta già viste per la costruzione dell'angolo retto e introduciamo i concetti di rette perpendicolari e rette parallele.

Riprendiamo le tecniche di disegno con l'uso delle squadre, già viste dai ragazzi nelle lezioni di tecnologia.



Angoli opposti al vertice

Chiedo ai ragazzi, suddivisi in piccoli gruppi, di disegnare due rette incidenti. Notiamo insieme che si sono formati 4 angoli, che indichiamo con le lettere greche.

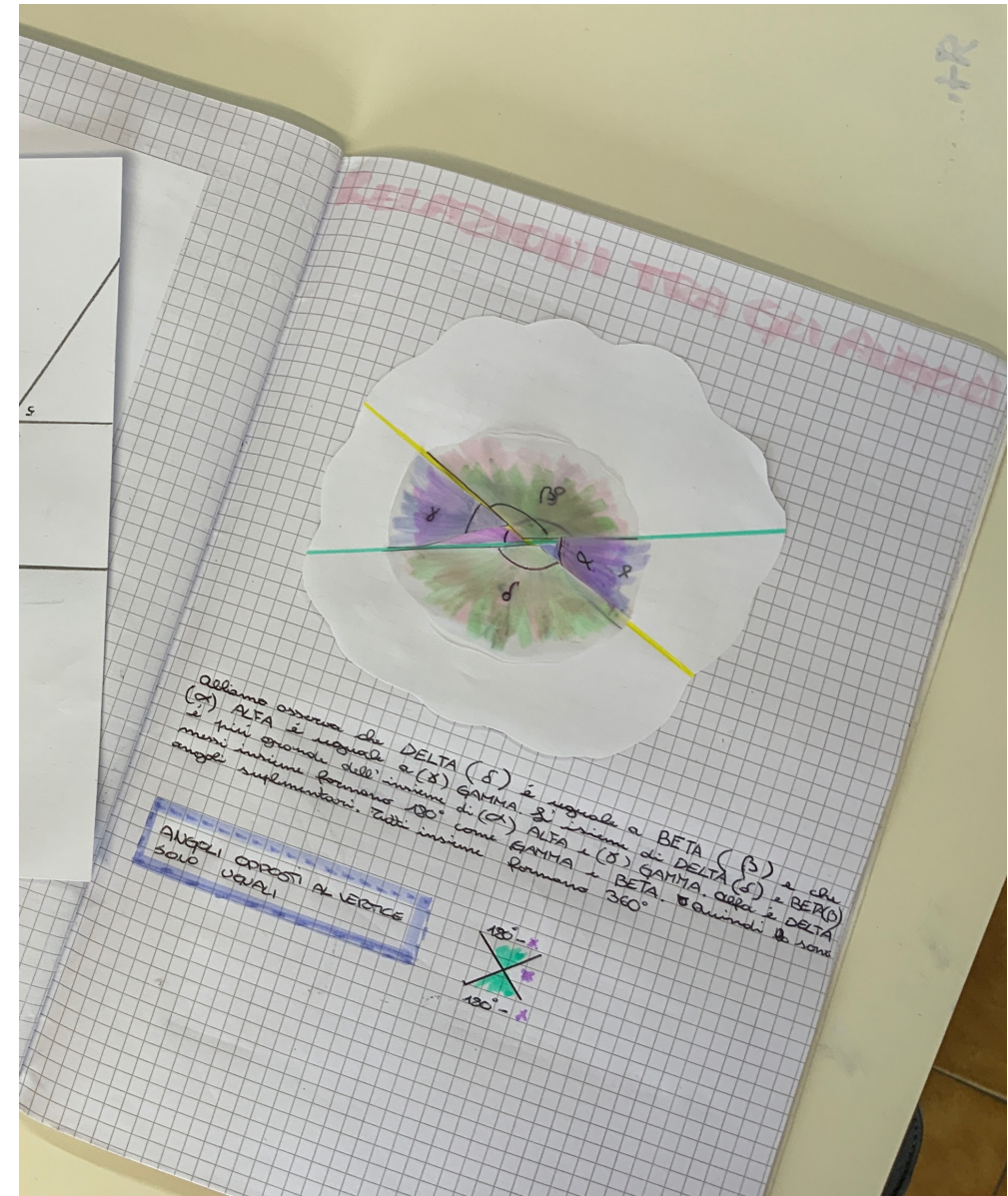
Quindi propongo questo problema:

Quali relazioni possiamo individuare tra i quattro angoli che si sono formati?

Gli alunni possono utilizzare tutti gli strumenti a loro disposizione. Fornisco loro anche un pezzo di carta trasparente.

I ragazzi si accorgono che **gli angoli opposti al vertice sono congruenti**, mentre **gli angoli adiacenti sono supplementari**.

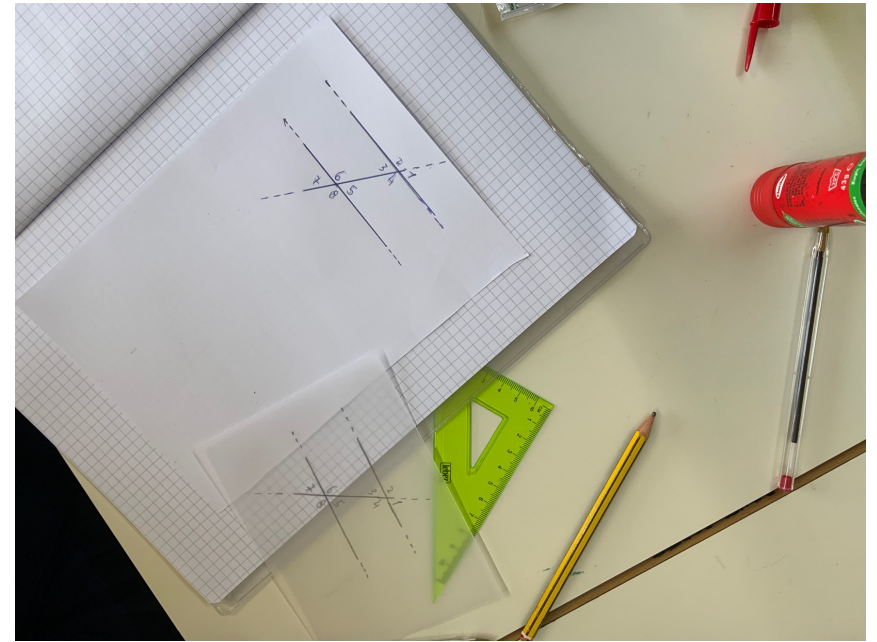
NB: questa terminologia viene introdotta per la prima volta in questa occasione, in risposta a un'esigenza linguistica scaturita dalla risoluzione del problema proposto.



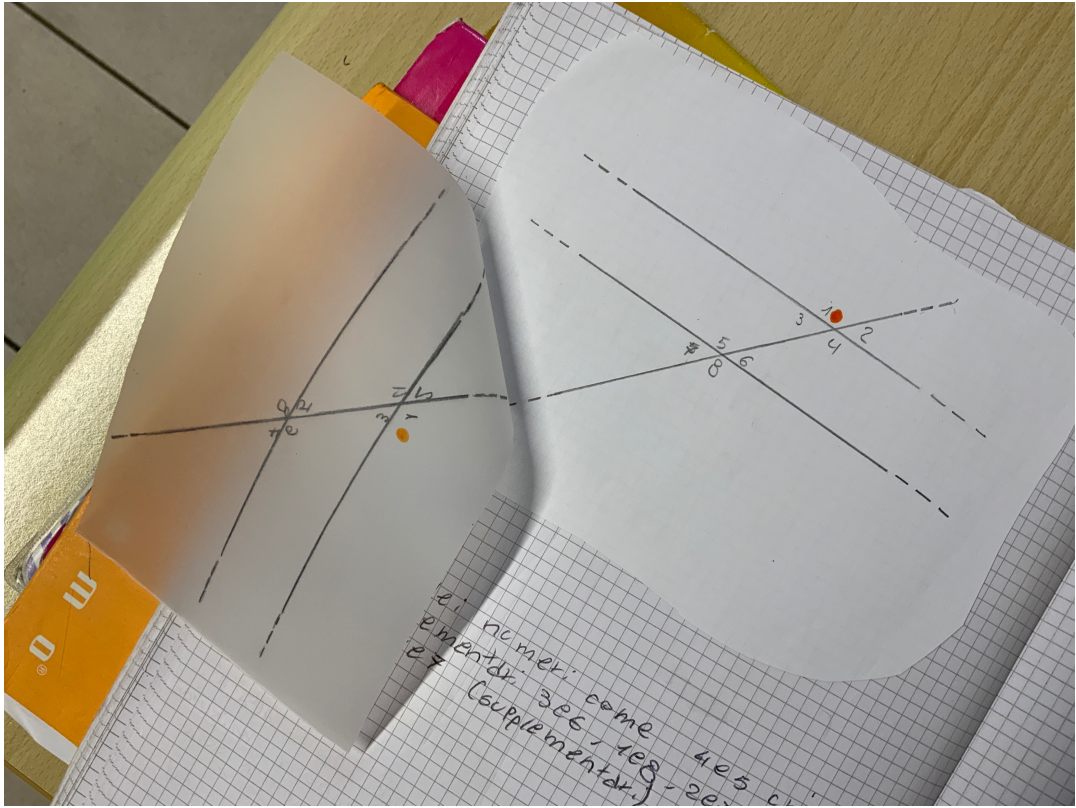
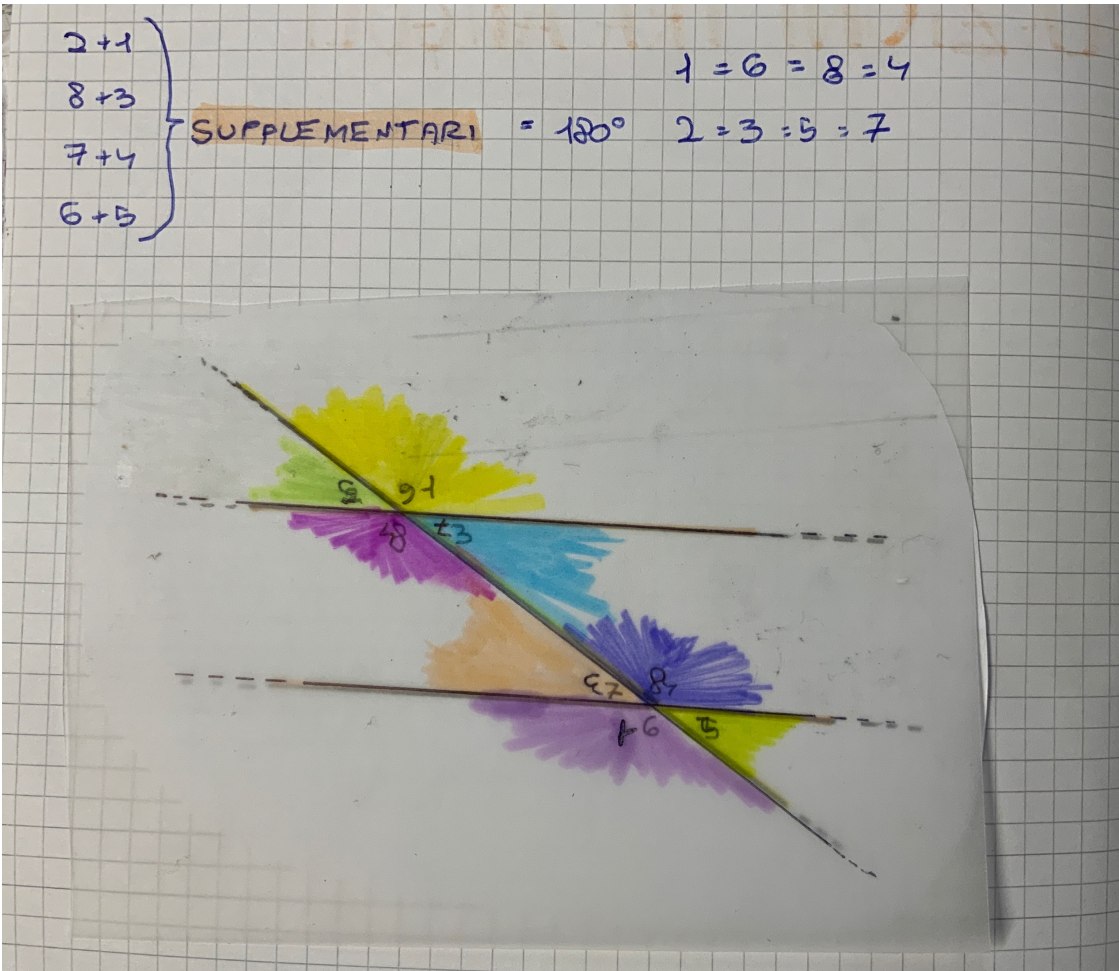
Angoli e parallelismo

Come ultimo step concettuale, propongo agli alunni di risolvere un problema simile al precedente, ma a partire da un'altra costruzione: due rette parallele tagliate da una trasversale.

Anche in questo caso, emerge l'esigenza di dare un nome a particolari coppie di angoli (angoli alterni interni, angoli corrispondenti).



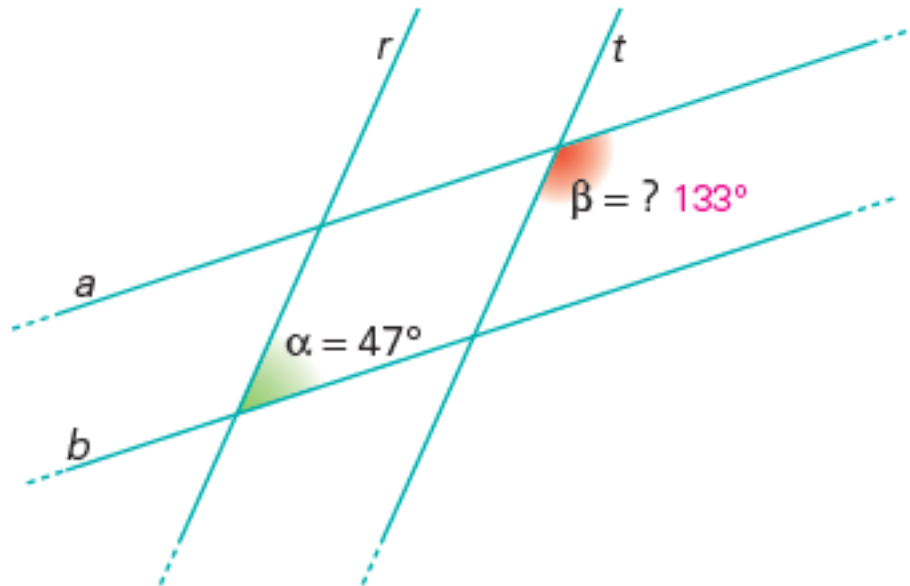
Angoli e parallelismo



Angoli e parallelismo

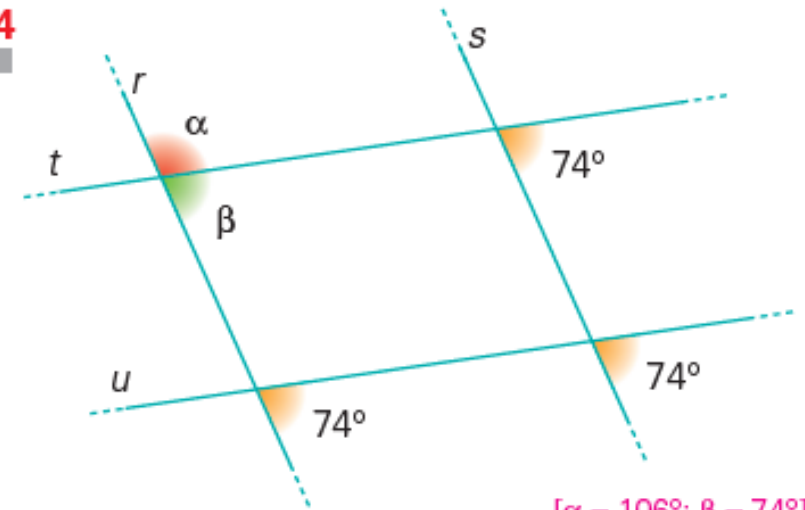
Alcuni problemi da risolvere.

- 119** Osserva la seguente figura. Le rette a e b sono parallele e sono tagliate dalle trasversali r e t , anch'esse parallele tra loro. Quanto misura l'angolo β ?



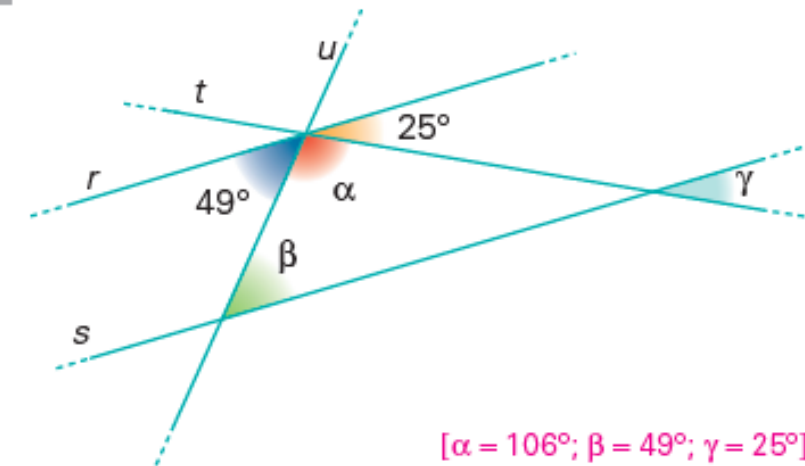
Determina l'ampiezza degli angoli indicati dalle lettere greche. Spiega il ragionamento che hai fatto per rispondere.

114



[$\alpha = 106^\circ$; $\beta = 74^\circ$]

115 r e s sono parallele.



[$\alpha = 106^\circ$; $\beta = 49^\circ$; $\gamma = 25^\circ$]

Verifiche degli apprendimenti

- **Valutazione formativa in itinere**, attraverso il controllo del quaderno su cui vengono scritti dei **feedback discorsivi** che mettano in evidenza i punti di forza del lavoro svolto e gli aspetti da migliorare.
- **Verifica sommativa** su tutto il percorso, volta a valutare la comprensione dei concetti, le abilità nell'uso degli strumenti e le competenze di problem solving e argomentazione.

Verifiche degli apprendimenti / Esempio 1

119 Osserva la seguente figura. Le rette a e b sono parallele e sono tagliate dalle trasversali r e t , anch'esse parallele tra loro. Quanto misura l'angolo β ?

HO VISTO CHE L'ANGOLO γ MISURA ANCHE LUI 47° , QUINDI PER TROVARE β HO FATTO - $180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$

ESEMPIO DI VALUTAZIONE FORMATIVA ATTRAVERSO FEEDBACK

Il risultato che hai trovato è corretto, hai saputo introdurre un nuovo simbolo per facilitare la spiegazione e hai utilizzato in modo efficace il fatto che l'angolo gamma e l'angolo beta sono adiacenti. Puoi migliorare ancora la tua spiegazione spiegando meglio perché alfa e gamma sono congruenti: questo infatti dipende dal fatto che le rette a e b sono parallele, come anche le rette r e t .

Verifiche degli apprendimenti / Esempio 2

Domande flash

- I lati di un angolo sono:
 - rette segmenti semirette punti
- Il vertice di un angolo è:
 - un angolo un punto un segmento un triangolo
- Un angolo è:
 - una parte di piano compresa tra due semirette qualunque
 - una parte di un triangolo
 - una parte di piano compresa tra due segmenti consecutivi
 - una parte di piano compresa tra due semirette con la stessa origine

- In ciascuno dei due disegni, colora di un colore l'angolo concavo e di un altro colore l'angolo convesso. Indica nella legenda i colori che hai utilizzato.

Legenda: concavo convesso



- Disegna due rette parallele e due rette perpendicolari.

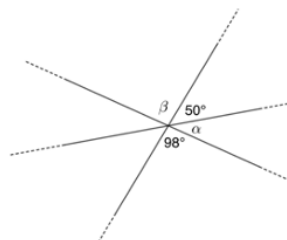
Rette parallele	Rette perpendicolari

- Disegna e colora gli angoli richiesti.

Un angolo piatto	Un angolo retto	Un angolo acuto
Un angolo ottuso	Un angolo concavo	Un angolo di 65°

- Quali dei seguenti angoli sono complementari?
 - $\alpha = 32^\circ, \beta = 68^\circ$ $\alpha = 32^\circ, \beta = 58^\circ$
 - $\alpha = 32^\circ, \beta = 148^\circ$ $\alpha = 22^\circ, \beta = 68^\circ$
- Quali dei seguenti angoli sono supplementari?
 - $\alpha = 51^\circ, \beta = 129^\circ$ $\alpha = 51^\circ, \beta = 39^\circ$
 - $\alpha = 51^\circ, \beta = 309^\circ$ $\alpha = 141^\circ, \beta = 39^\circ$
- Quali dei seguenti angoli sono esplementari?
 - $\alpha = 50^\circ, \beta = 310^\circ$ $\alpha = 50^\circ, \beta = 130^\circ$
 - $\alpha = 40^\circ, \beta = 320^\circ$ $\alpha = 40^\circ, \beta = 140^\circ$

- La figura rappresenta tre rette che si intersecano nello stesso punto. Quanto misurano gli angoli α e β ? Spiega il ragionamento che hai fatto per rispondere.



$\alpha =$
 $\beta =$
 Spiegazione

VERIFICA SOMMATIVA

La stessa verifica è stata proposta a tutti gli alunni, anche quelli con BES. Per gli alunni con BES sono stati applicati criteri valutativi volti a valorizzare i progressi ottenuti nell'intero percorso.

Durante lo svolgimento dell'esercizio 5, ho osservato gli alunni uno per uno per valutarne la competenza nell'utilizzo delle squadre.

Risultati ottenuti

Aspetti motivazionali e relazionali

- Tutti gli alunni hanno partecipato attivamente e con entusiasmo alle attività proposte.
- Il lavoro di gruppo ha favorito l'inclusione degli alunni con difficoltà e ha costretto gli alunni più competenti ad adattarsi ai tempi dei compagni, prestando aiuto in caso di bisogno e sforzandosi di spiegare i propri ragionamenti in modo che fossero comprensibili da tutti.

Risultati ottenuti

Aspetti operativi

- Metà degli alunni ha mostrato difficoltà nell'esecuzione dei compiti operativi (piegare, tagliare, utilizzare gli strumenti, ...), cosa che ha richiesto tempi più distesi per il raggiungimento degli obiettivi previsti. Riteniamo infatti che l'operatività in generale, e in particolare la manipolazione di modelli e l'utilizzo di strumenti specifici, sia un veicolo imprescindibile per una corretta costruzione dei concetti.
- Alla fine dell'anno scolastico, ho potuto osservare un netto miglioramento nelle abilità di tipo manipolativo e operativo nella maggior parte degli alunni, e in generale una maggiore attenzione e disponibilità nello svolgimento di compiti pratici.

Risultati ottenuti

Aspetti concettuali e competenze matematiche sviluppate

- La maggior parte degli alunni ha acquisito i concetti appresi in maniera duratura, dimostrando di saperli trasferire anche ad altri contesti (poligoni, triangoli, ...) e di saperli applicare in situazioni problematiche.
- Alcuni alunni hanno continuato a fare riferimento all'immagine mentale di angolo precedente al percorso didattico, dimostrando un livello di astrazione ancora immaturo. Con questi alunni si è cercato di fare continuo ricorso ai modelli e alle rappresentazioni, nella speranza di riuscire a superare le misconcezioni esistenti.
- L'importanza della verbalizzazione tipica della metodologia LSS ha fatto maturare in tutti gli alunni le capacità di spiegazione e argomentazione.

Valutazione dell'efficacia del percorso

- Il percorso è stato ritenuto efficace e aderente alle aspettative del gruppo LSS.
- Le difficoltà incontrate nello «scardinamento» di alcune misconcezioni saranno oggetto di discussione e di confronto tra docenti della primaria e docenti della ss1, con lo scopo di rendere più efficace l'insegnamento della geometria in un'ottica di curriculum verticale.

Valutazione dell'efficacia del percorso

L'impostazione didattica e metodologica è stata coerente con i risultati accademici, di cui si danno alcuni riferimenti.

- I lavori di Tall e Vinner sulla Concept Image e la Concept Definition
- I lavori di Rosetta Zan (Problemi e convinzioni, 1998) e di Bruno d'Amore e Silvia Sbaragli (2005, 2012) sulle *misconcezioni* in matematica.