REGIONE
TOSCANA

All'Inizio del Sentiero verso il Calcolo Sublime

Scuola secondaria di secondo grado

Area disciplinare: matematica

Liceo statale "C. Lorenzini"

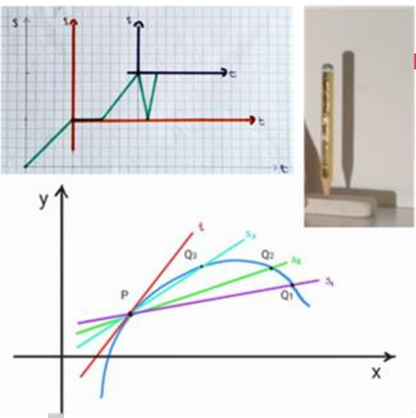
Docente coinvolta: Cinzia Gonfiotti

Realizzato con il contributo della Regione Toscana
nell'ambito del progetto
Rete Scuole LSS a.s. 2024/2025

Liceo Statale “C. Lorenzini”

Classico, Linguistico, Scientifico, Scienze Umane

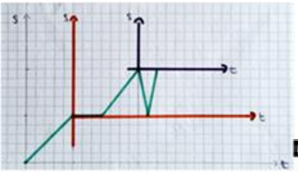
Pescia (PT)

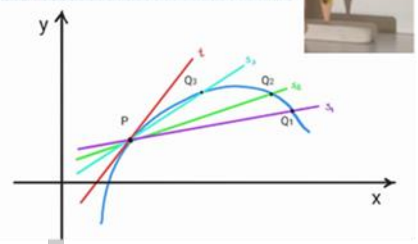


All’Inizio del Sentiero verso il Calcolo Sublime

Classe Terza Liceo

Indirizzo Scientifico Ordinario



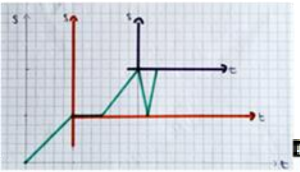


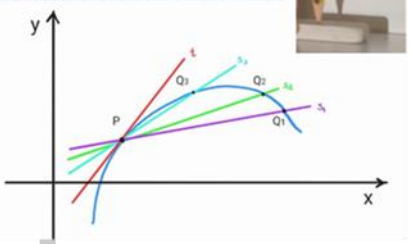
collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale (1)

Il percorso nasce dall’esigenza di iniziare a utilizzare nella classe terza del Liceo scientifico il “Calcolo sublime” come strumento che permette di studiare il cambiamento, la rapidità di variazione di un fenomeno.

Generalmente, il calcolo differenziale viene affrontato nella classe quinta e non sempre gli studenti riescono ad applicarlo consapevolmente, tendendo a risolvere in modo meccanico gli esercizi e i problemi di applicazione che vengono proposti solo alla fine del capitolo.

Anticipare alla classe terza il concetto di derivata di una funzione permette di ottimizzare i tempi nella futura classe quinta ma soprattutto fornisce un importante strumento per lo studio di fenomeni dinamici a partire dal terzo anno.



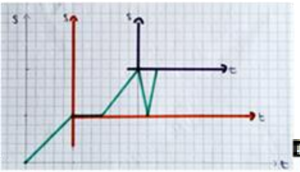


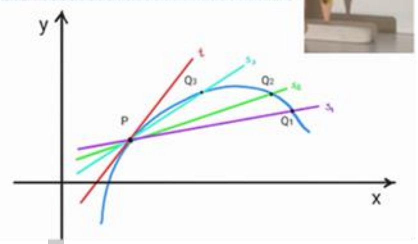
collocazione del percorso effettuato nel curricolo verticale (2)

Questo percorso si propone di partire dall'osservazione di alcuni fenomeni, mediante semplici esperimenti eseguiti in classe, che gli studenti sono stati invitati a descrivere e a rappresentare graficamente, dopo aver opportunamente scelto le grandezze di cui si vuole analizzare il cambiamento.

Gli studenti hanno già affrontato lo studio del moto rettilineo uniforme e uniformemente accelerato nella classe seconda, ma l'analisi del moto di persone e di oggetti riprodotti in aula, focalizzando l'attenzione sulla rapidità di variazione della distanza percorsa e della posizione nel tempo, ha permesso di comprendere con maggiore consapevolezza la relazione tra la velocità e la pendenza nei grafici ottenuti delle funzioni definite a tratti.

Successivamente, è risultato naturale associare la rapidità di variazione media e istantanea di una grandezza, rappresentata nel piano cartesiano, alla ricerca della retta secante in un intervallo e della retta tangente in un punto della funzione corrispondente. Il calcolo del coefficiente angolare in un generico punto di una funzione, ha permesso di ricavare alcune delle principali regole di derivazione.





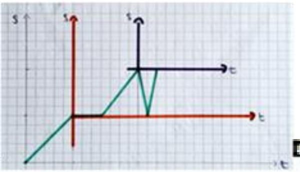
obiettivi essenziali di apprendimento (1)

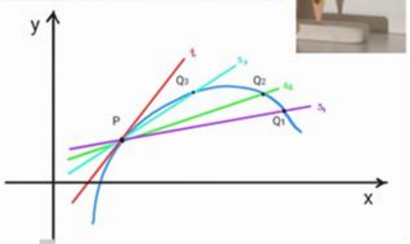
Nella prima parte del percorso sono stati proposti esperimenti in cui gli studenti erano invitati a osservare e descrivere ***qualitativamente*** il cambiamento di alcune grandezze fisiche in funzione di altre e poi rappresentarle graficamente, facendo particolare attenzione alla rapidità con cui avveniva tale cambiamento. Questo primo approccio è importante perché permette agli studenti di interiorizzare in modo intuitivo, non astratto ma concreto, il significato di cambiamento.

Nei primi esperimenti sul moto sono stati costruiti grafici della distanza percorsa, sia intesa come registrata da un contachilometri o un contapassi in funzione del tempo sia la *posizione* in funzione del tempo, per evidenziare il "segno" della variazione. Successivamente sono stati disegnati i grafici degli stessi moti in sistemi di coordinate diversi, dove il grafico cambiava per la diversa scelta dell'origine e dell'orientamento degli assi ma non cambiava il valore assoluto delle pendenze.

Nella seconda parte i fenomeni osservati sono stati analizzati da un punto di vista ***quantitativo***, evidenziando:

- la rapidità di *variazione media* di una grandezza in un certo intervallo, che è stata associata alla pendenza dei segmenti ottenuti nei grafici rappresentati da funzioni definite a tratti;
- la rapidità di *variazione istantanea* di una grandezza in un punto, che è stata ottenuta determinando la pendenza delle rette secanti, in due punti sempre più vicini, la curva che descrive il fenomeno dinamico e che ha portato al calcolo del coefficiente angolare della retta tangente in quel punto.





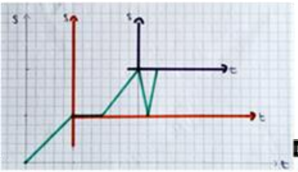
obiettivi essenziali di apprendimento (2)

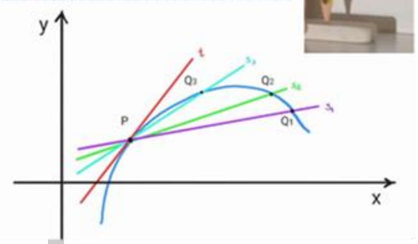
Ricavare, in un generico punto, il coefficiente angolare della retta tangente a semplici funzioni polinomiali del tipo $y = x^2$ e $y = x^3$, è stato un primo approccio per far impadronire gli studenti del significato del concetto di rapidità di variazione e di quello di derivata.

Rilievo è stato dato a come quantificare una variazione istantanea, richiamando le caratteristiche degli insiemi numerici e la loro rappresentazione dal punto di vista geometrico, evidenziando le differenze esistenti tra insieme discreto, insieme denso e insieme continuo.

Importante è stato poi generalizzare il calcolo del coefficiente angolare della retta tangente alle funzioni potenza $y = x^n$, con n intero e razionale, che rappresentavano equazioni orarie del moto di oggetti e alla funzione $y = \sin x$, incontrata nel moto armonico.

Le regole di derivazione ricavate sono state applicate per risolvere problemi di fisica, in cui determinare quando la rapidità di variazione di una grandezza è positiva, negativa o nulla e per lo studio di funzioni polinomiali in matematica, per individuare in quali intervalli la funzione è crescente o decrescente e i punti di massimo e minimo relativi.

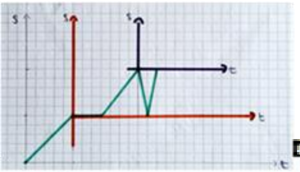


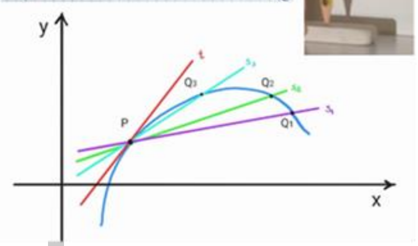


elementi salienti dell’approccio metodologico

Il percorso si propone di introdurre il calcolo differenziale per analizzare la rapidità di variazione dei fenomeni, partendo dalla loro descrizione qualitativa.

Gli argomenti sono stati svolti favorendo la partecipazione attiva della classe:
gli studenti hanno risposto ai quesiti proposti, prima individualmente, descrivendo ciò che avevano osservato e facendo il grafico richiesto; ciascuno ha poi discusso con il compagno di banco, indicando quale, tra le due risposte, fosse la più adeguata; successivamente, ogni coppia ha confrontato la risposta scelta con quella di un’altra coppia, selezionando e motivando quella che ritenevano migliore; infine, ciascun gruppo ha riportato alla classe la conclusione raggiunta.
All’inizio questa modalità di lavoro ha incontrato qualche difficoltà in quegli studenti che, non convinti della loro risposta, avrebbero voluto avere conferma dall’insegnante se la loro descrizione e la relativa rappresentazione grafica del fenomeno osservato era corretta; talvolta alcuni, per paura di sbagliare, seguivano le soluzioni individuate dal compagno.
Preziose sono state le risposte non corrette perché fonte di discussione e di confronto tra gli allievi e, proprio dalle analisi delle considerazioni sbagliate, anche guidati dall’insegnante, sono arrivati a una formulazione corretta.
Alla fine, questo modo di lavorare ha portato a far acquisire agli studenti maggiore sicurezza e senso critico.





materiali, apparecchi e strumenti utilizzati

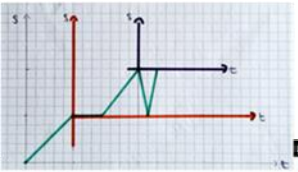
- Libri di testo: M. Bergamini, G. Barozzi, A Trifone

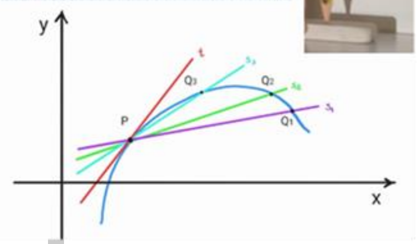
  “MATEMATICA.BLU 2.0” Terza edizione Vol. 5 ed. Zanichelli

  “MATEMATICA.BLU 2.0” Terza edizione Ebook multimediale Vol. 3 ed. Zanichelli

- Internet per la ricerca del materiale.

- Computer e LIM per l’utilizzo di software Geogebra e connessione internet.

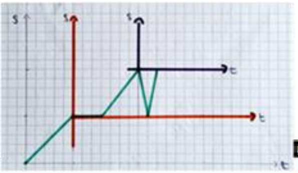


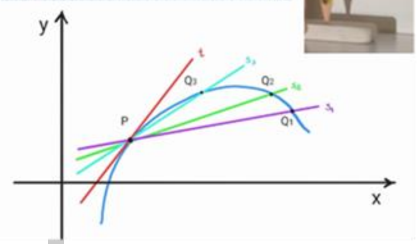


ambienti di lavoro in cui è stato sviluppato il percorso

- Aula

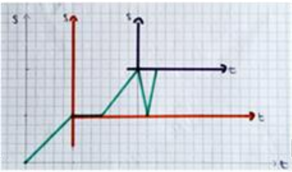
- A casa

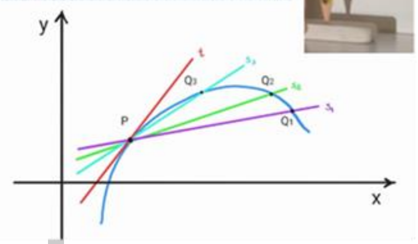




tempi impiegati

- Per la messa a punto preliminare nel Gruppo LSS: 8 ore.
- Per la progettazione specifica e dettagliata nella classe: 10 ore.
- Tempo-scuola di sviluppo del percorso: 24 ore, comprensive delle verifiche scritte.
- Per documentazione: 40 ore

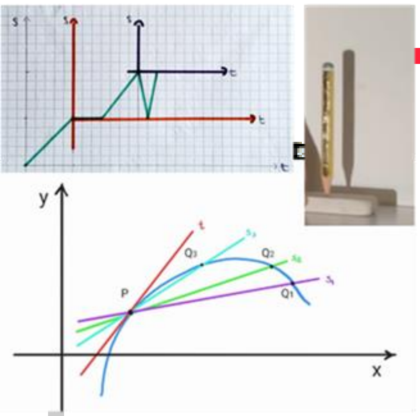




altre informazioni

- Sono state evidenziate in rosso le parti che sintetizzano i contenuti degli interventi degli studenti

- Di seguito viene riportata la parte più significativa del lavoro.



attività proposta in classe
esperimento 1

Esperimento 1

Nella lezione introduttiva l'insegnante ha eseguito un esperimento in classe:

mantenendo costante la distanza *D* di una sorgente di luce *L* da una parete, si pone un oggetto *O* (un lapis fissato su una gomma) tra la sorgente *L* e la parete, come nello schema seguente:

parete oggetto luce

| *h* *O* *L*

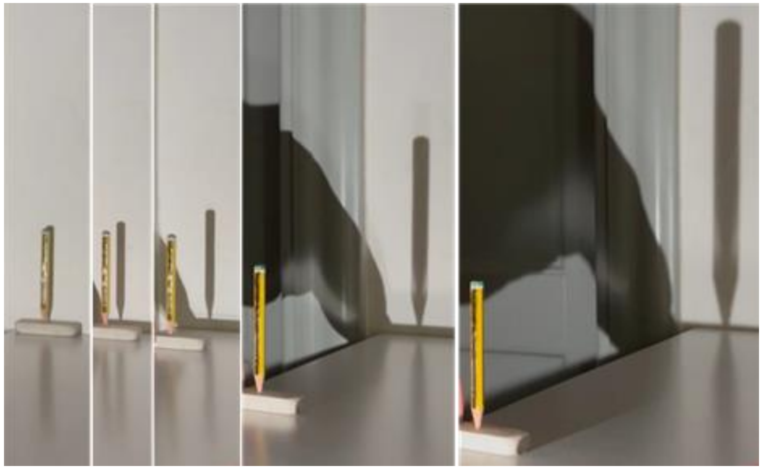
|________________|__________|

0 cm *d* *D*

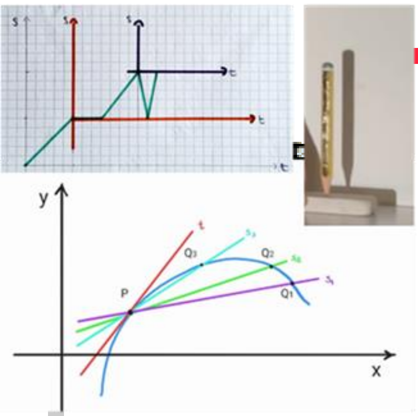
Successivamente, si osserva come cambia l'altezza *h* dell'ombra dell'oggetto proiettata sulla parete dalla sorgente *L*, quando si cambia la distanza *d* dell'oggetto dalla parete, posta nella posizione 0 cm.

Agli studenti è stato chiesto di descrivere come cambia l'altezza *h* dell'ombra dell'oggetto dalla parete al variare di *d* e a rappresentarla graficamente.

È stato girato un video da cui sono state tratte le seguenti immagini.



Alcune immagini dell'ombra dell'oggetto all'aumentare della distanza dalla parete.



sviluppo del percorso partecipato
esperimento 1: risposte degli studenti (1)

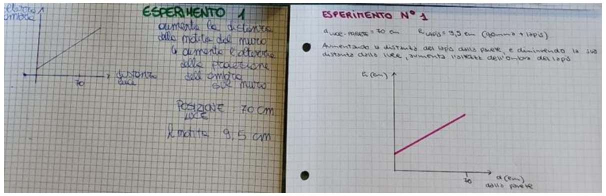
Gli studenti hanno lavorato individualmente, descrivendo ciò che hanno osservato e facendo il grafico richiesto; ciascuno ha poi discusso con il compagno di banco, indicando quale, tra le due risposte, fosse la più adeguata; successivamente, ogni coppia ha confrontato la risposta scelta con quella di un'altra coppia, selezionando e motivando quella che ritenevano migliore.

Infine, ciascun gruppo ha esposto alla classe la conclusione raggiunta.

Sono state individuati due possibili andamenti che possono essere riassunti con le risposte date dalle coppie di studenti di uno dei gruppi.

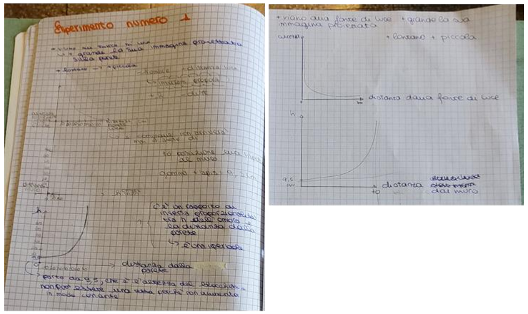
Una coppia ha rappresentato un andamento lineare (fig. 1)

fig. 1



mentre l'altra ha notato che, quando l'oggetto si muoveva più vicino alla sorgente, le dimensioni dell'ombra cambiavano molto più rapidamente (fig. 2) .

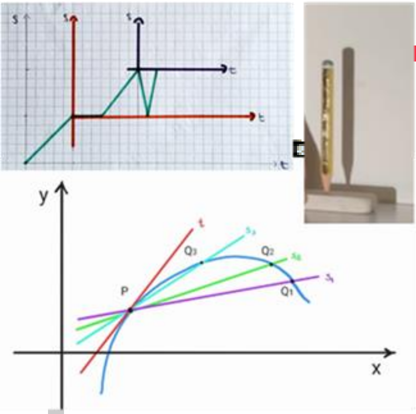
fig. 2



Tra le due soluzioni il gruppo ha scelto la seconda (fig. 2) con questa motivazione: "Poiché abbiamo visto che aumentando la distanza dalla parete aumenta anche la grandezza dell'ombra del lapis in modo non perfettamente costante, siamo giunte alla conclusione che non può trattarsi di una retta".

Ciascun gruppo ha riportato alla classe le rappresentazioni del fenomeno, che erano analoghe a quelle sopra descritte e dopo aver ripetuto l'esperimento è stato concluso che:

- la descrizione migliore era quella riportata in fig. 2,
- l'andamento lineare (fig. 1) può descrivere il fenomeno quando l'oggetto si muove vicino alla parete.



attività proposta in classe
esperimento 2 con risposte degli studenti

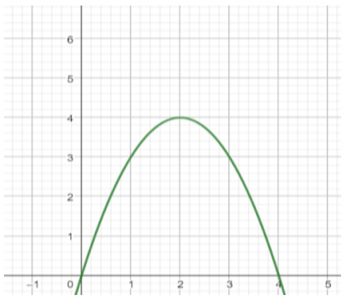
Esperimento 2

Una gomma è stata lanciata verticalmente verso l’alto.

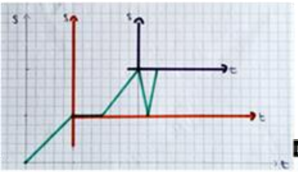
Agli studenti è stato chiesto di descrivere e rappresentare graficamente come cambia l’altezza al passare del tempo.

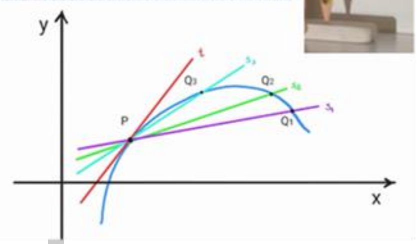
Lavorando con la stessa modalità, prima individualmente, poi a coppie e infine confrontandosi con la coppia vicina, la risposta è stata la stessa per tutti:

“Il moto della gomma può essere rappresentato attraverso una parabola con concavità rivolta verso il basso, con lo spazio sull’asse y e il tempo sull’asse x”.



Gli studenti hanno risposto utilizzando quanto studiato del moto uniformemente accelerato affrontato nella classe seconda.





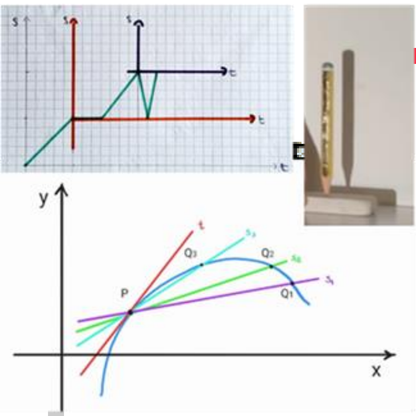
attività proposta in classe
esperimento 3

Esperimento 3

L’insegnante ha camminato fino in fondo all’aula, partendo dalla cattedra ed è tornata al punto di partenza, cambiando velocità e facendo alcune soste.

Gli studenti sono stati invitati a descrivere qualitativamente il moto e a fare il grafico, in funzione del tempo, della distanza percorsa (come se fosse registrata da un contachilometri).

Ad alcuni studenti che hanno chiesto come fare a stimare le distanze, è stato risposto di prendere dei punti di riferimento, individuati dalla posizione dei banchi; è stato poi ribadito che quello che era importante era focalizzare l’attenzione alla rapidità con cui le distanze erano percorse.

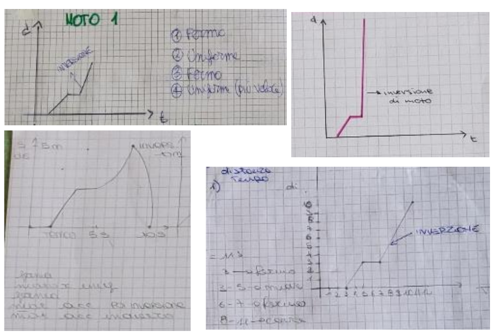


sviluppo del percorso partecipato
esperimento 3: risposte degli studenti (moto 1)

MOTO 1

Gli studenti hanno lavorato con la stessa modalità, prima individualmente, poi a coppie e infine confrontandosi con la coppia vicina. Ecco le risposte di alcuni gruppi. Primo gruppo.

A B



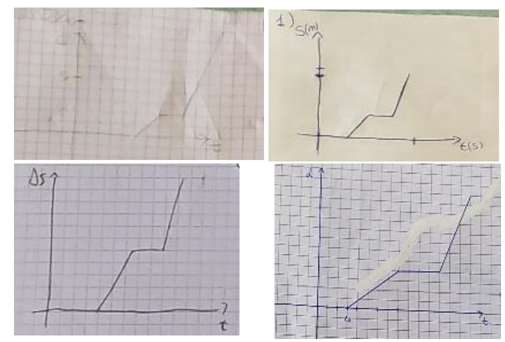
C D

Tra le quattro soluzioni il gruppo ha scelto la A:

"Il grafico A rappresenta meglio il moto perché mette in evidenza la maggiore velocità del secondo tratto e il punto di inversione è a metà della distanza totale percorsa. Nel grafico B non è corretta la posizione del punto di inversione, nel grafico C è rappresentato lo spostamento anziché la distanza percorsa, nel grafico D velocità del secondo tratto è poco diversa da quella del primo".

Secondo gruppo.

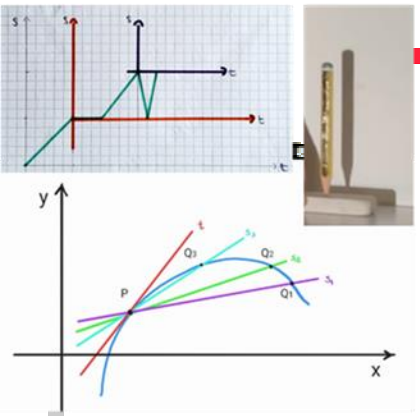
A B



C D

Tra le quattro risposte anche questo gruppo ha scelto la A:

"Nei grafici non è stato indicato il punto di inversione, ma sapendo che la distanza percorsa nell'aula è 5 m, solo il grafico A rappresenta meglio il moto".



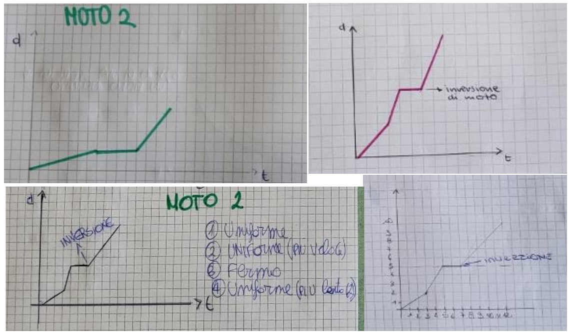
sviluppo del percorso partecipato
esperimento 3: risposte degli studenti (moto 2)

MOTO 2

Gli studenti hanno analizzato un altro moto.

Le risposte del primo gruppo.

A B C D

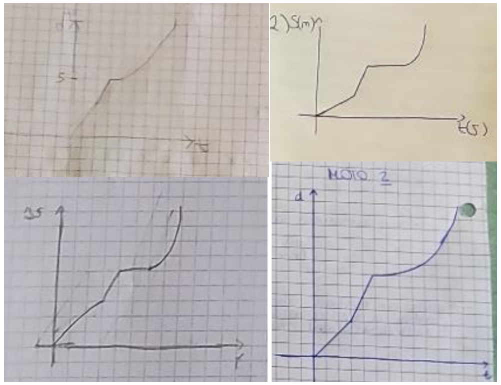


Le soluzioni C e D sono equivalenti e sono quelle scelte dal gruppo come migliore rappresentazione del moto osservato.

"Nel grafico A non c'è il cambiamento di velocità nell'andata; nel grafico B, anche se le velocità sono corrette, la distanza percorsa al ritorno è minore di quella dell'andata, invece la professoressa è tornata alla cattedra. I grafici C e D sono quelli che rappresentano meglio il moto e che indicano le velocità corrette".

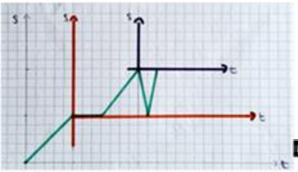
Secondo gruppo.

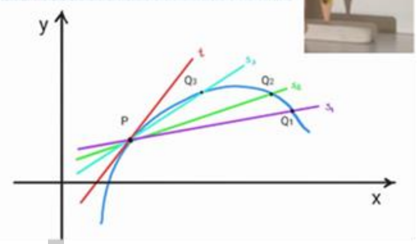
A B C D



Tra le quattro risposte è stata scelta la A:

"Il cambiamento di velocità nel tratto di andata è in tutti i grafici, ma scegliamo il grafico A dove è rappresentato un moto uniforme durante il ritorno. Negli altri grafici l'ultimo tratto descrive un moto accelerato, ma dovevamo trascurare le accelerazioni".





esercizi assegnati per casa
scheda 1 e risposte degli studenti

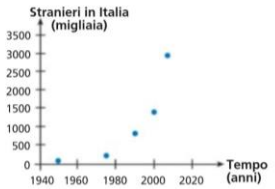
Scheda 1 di esercizi assegnata per casa.

Esercizio 1

La tabella rappresenta alcuni dati relativi alla variazione nel tempo del numero di stranieri residenti in Italia.

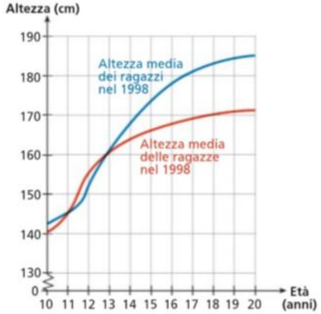
Anni	1950	1975	1990	2000	2007
Popolazione stranieri in Italia (in migliaia)	47,0	186,0	781,0	1380,0	2938,9

Nel grafico in figura sono state riportate le coppie di dati (*tempo*; *popolazione*); per meglio evidenziare l'andamento unire le coppie di dati con dei segmenti e calcolare la crescita media in ogni intervallo.



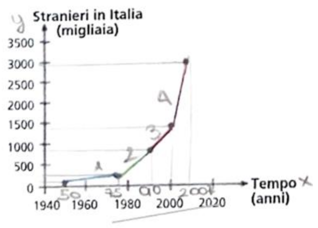
Esercizio 2

Il grafico mostra l'altezza media delle ragazze e dei ragazzi olandesi nel 1998. Spiega perché il grafico mostra che, in media, la crescita delle ragazze è più lenta dopo i 12 anni.



Esercizi svolti dagli studenti

Esercizio 1



$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$m_1 = \frac{186-47}{1975-1950} = \frac{139}{25} = 5{,}56$

$m_2 = \frac{781-186}{1990-1975} = \frac{595}{15} = 39{,}6$

$m_3 = \frac{1380-781}{2000-1990} = \frac{599}{10} = 59{,}9$

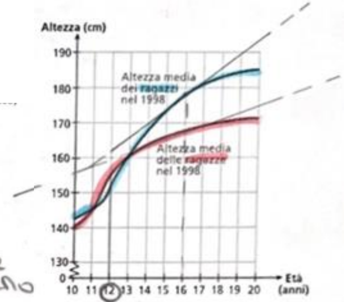
$m_4 = \frac{2938{,}9-1380}{2007-2000} = \frac{1558{,}9}{7} = 222{,}7$

Esercizio 2

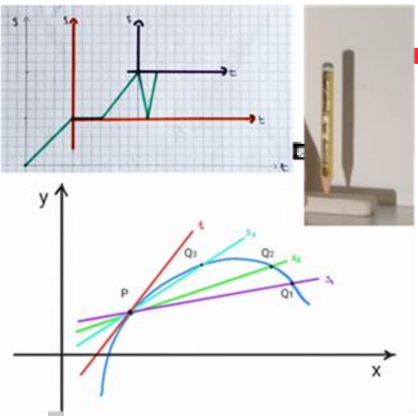
La velocità di crescita = pendenza della curva → coefficiente angolare della retta tangente

→ La curva delle ragazze dopo 12 anni diventa meno inclinata → (la sua pendenza diminuisce)

→ quindi l'aumento di h per ogni anno si riduce, e ciò è indice di una crescita + lenta dopo i 12 anni.



"MATEMATICA.BLU 2.0" Terza edizione Ebook multimediale Vol. 3 ed. Zanichelli

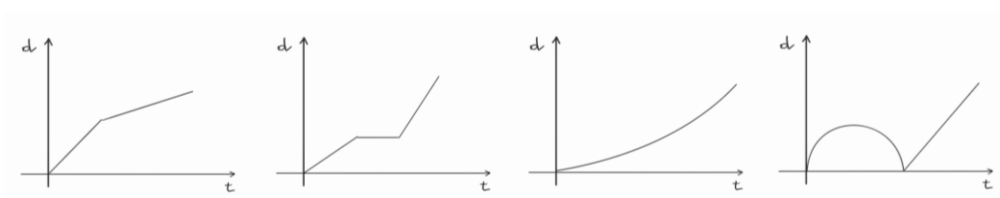


attività proposta in classe
esercizio 1

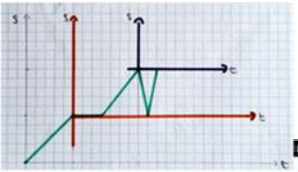
Esercizio 1

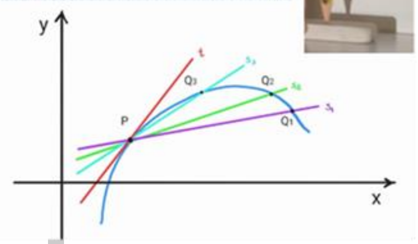
Associa ciascuno dei tre moti descritti al grafico corrispondente; descrivi il moto rappresentato nel grafico rimanente.

1. La mattina vado a scuola piedi, dopo un po’ mi accorgo di aver dimenticato a casa le scarpe da ginnastica per educazione motoria e torno indietro a prenderle più velocemente per evitare di fare tardi.
2. La mattina vado a scuola in motorino; lungo la strada incontro una compagna che sta andando a scuola in bicicletta e siccome sono in anticipo decido di rallentare e proseguire insieme a lei.
3. Osservo il moto di una pallina che scende lungo un piano inclinato.



A B C D

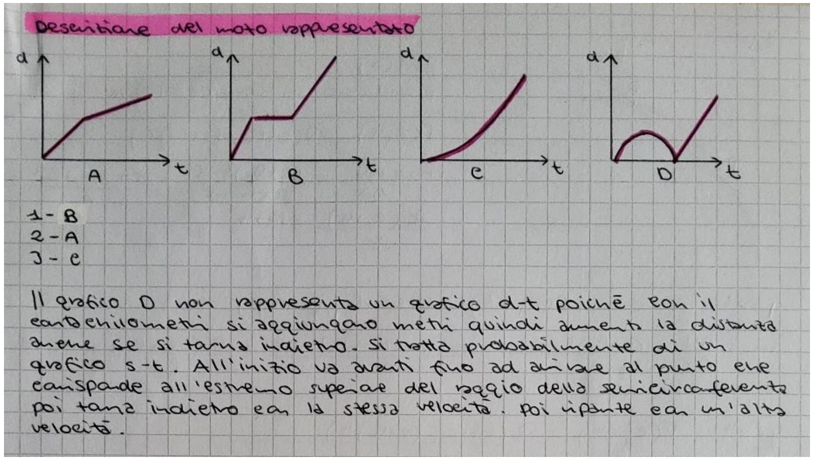


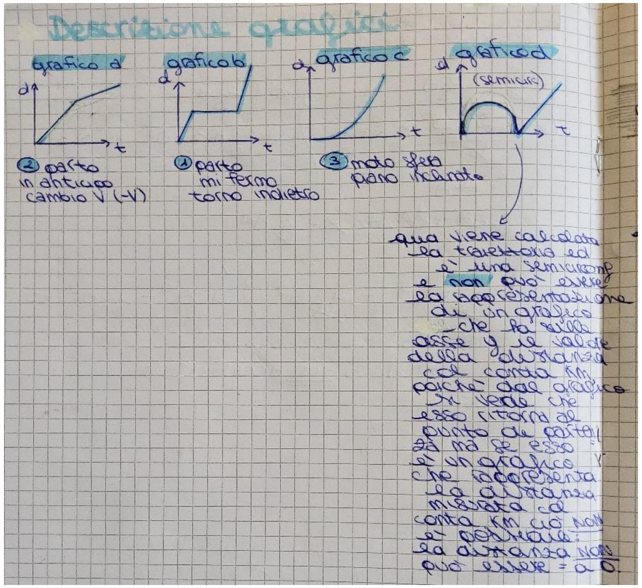


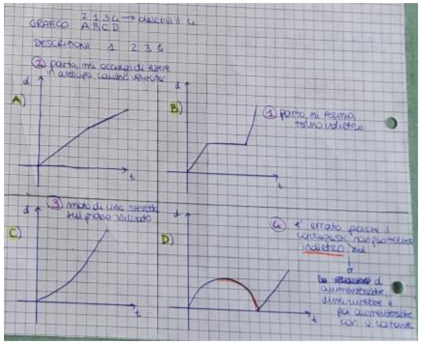
sviluppo del percorso partecipato
esercizio 1: risposte degli studenti

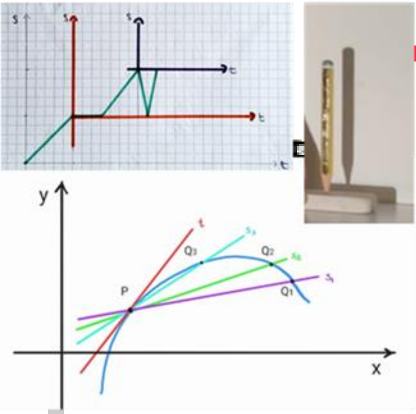
Tutti gli studenti hanno associato correttamente le descrizioni ai tre grafici corrispondenti e hanno commentato il quarto grafico.

Di seguito sono riportate alcune risposte degli studenti.









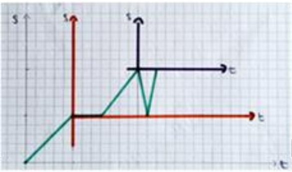
attività proposta in classe
esercizio 2

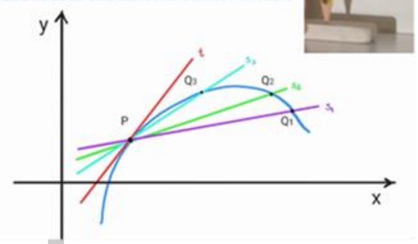
Esercizio 2

Giacomo scende alla fermata dell'autobus e si dirige verso la scuola percorrendo un tratto rettilineo; essendo arrivato in anticipo, decide di andare a studiare in biblioteca che si trova lungo la strada. Dopo questa sosta va a scuola, ma appena arrivato si accorge di aver dimenticato il quaderno in biblioteca. Corre a prenderlo e, sempre di corsa, torna a scuola in tempo per la lezione.

Rappresenta il moto di Giacomo in un diagramma distanza - tempo prendendo come origine del sistema di coordinate la fermata dell’autobus.

Tutti gli studenti hanno disegnato correttamente il grafico richiesto; alcuni di essi sono riportati più avanti.





attività proposta in classe
esercizi 2.a – 2.b

Relativamente al moto di Giacomo dell’esercizio precedente, è stato richiesto inoltre

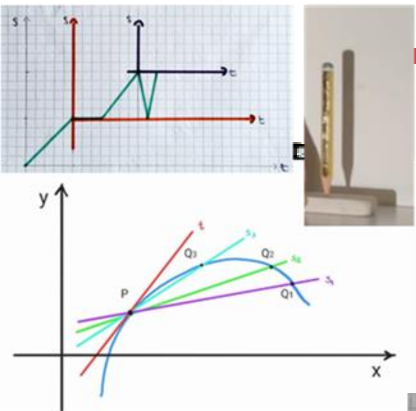
a) di disegnare il grafico della *posizione* di Giacomo in funzione del *tempo* e

b) di cambiare l’*origine* del sistema di coordinate, anziché la fermata dell’autobus considerare

i) la biblioteca,

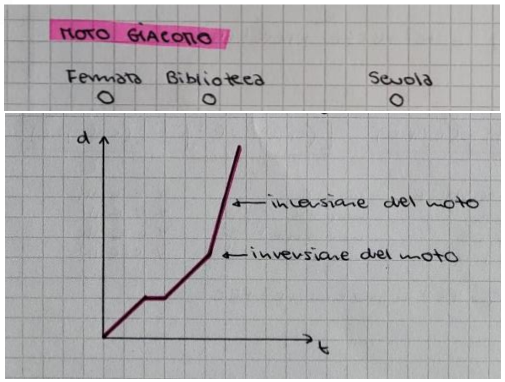
ii) la scuola.

Di seguito sono riportate alcune risposte degli studenti dell’esercizio 2, 2.a e 2.b.

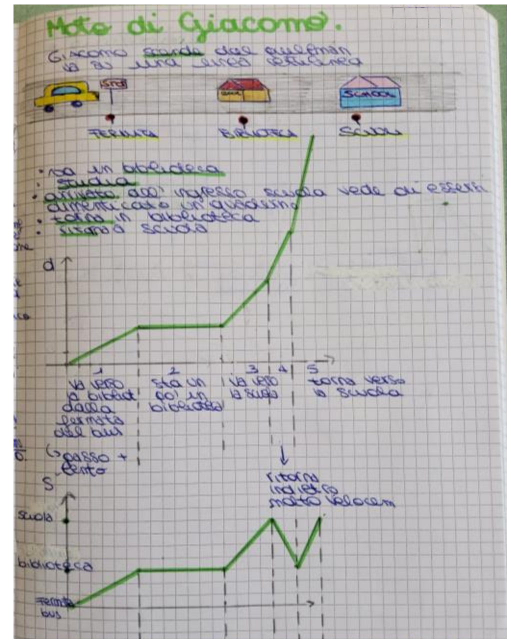


sviluppo del percorso partecipato
esercizi 2, 2.a, 2.b: risposte degli studenti (1)

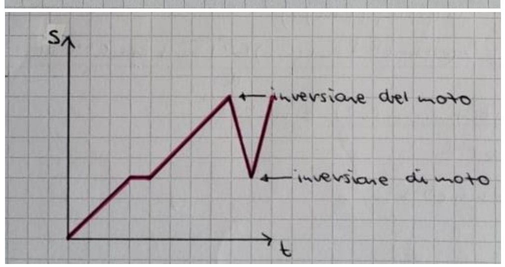
Esercizio 2



Esercizio 2

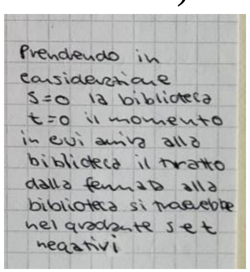


Esercizio 2.a

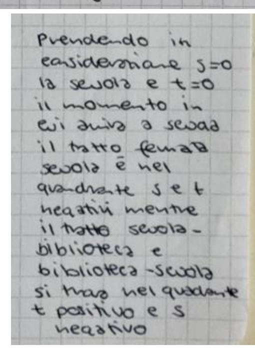


Esercizio 2.a

Esercizio 2.b i)

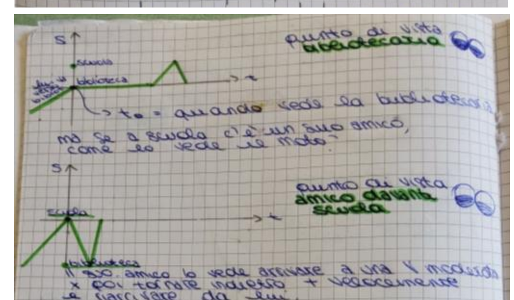


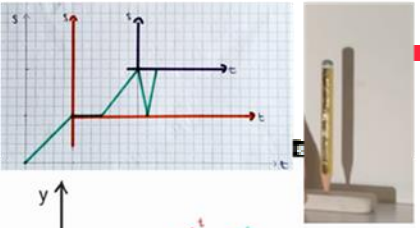
2.b ii)

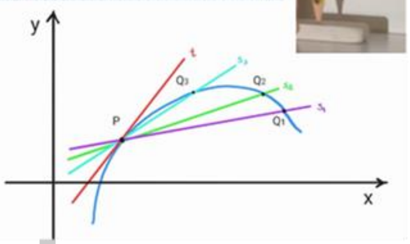


Esercizio 2.b.i)

Esercizio 2.b.ii)







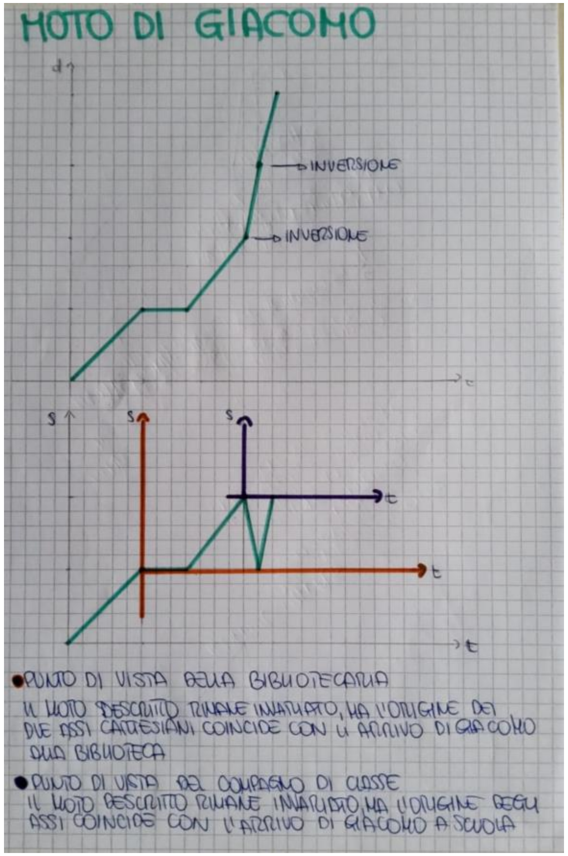
sviluppo del percorso partecipato
esercizi 2, 2.a, 2.b: risposte degli studenti (2)

Esercizio 2

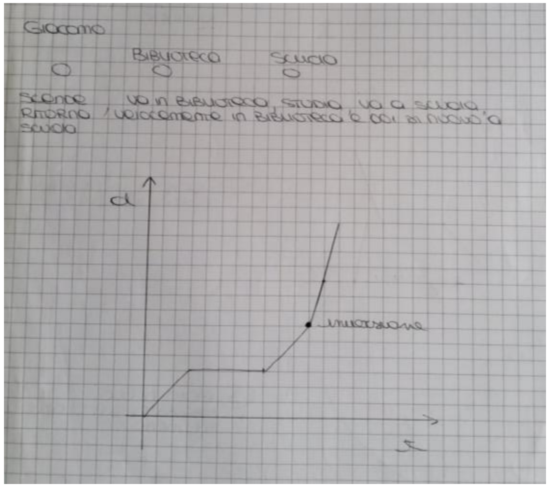
Esercizio 2.a

Esercizio 2.b.i)

2.b.ii)



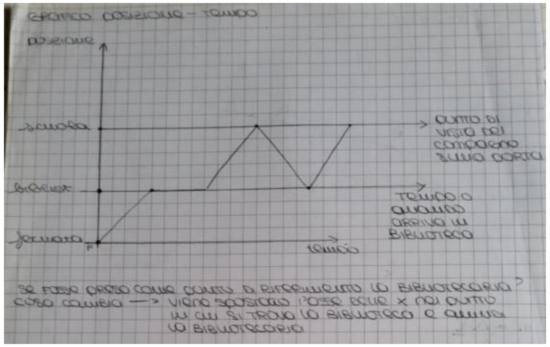
Esercizio 2

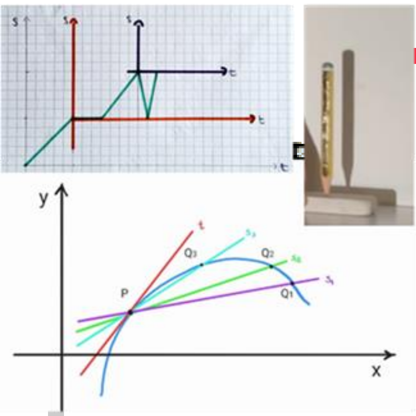


Esercizio 2.a

Esercizio 2.b.ii)

Esercizio 2.b.i)





sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

Anche per risolvere gli esercizi assegnati, gli studenti hanno lavorato con la stessa modalità, prima individualmente, poi a coppie e infine confrontandosi con la coppia vicina. Ciascun gruppo, poi, ha presentato le proprie conclusioni al resto della classe.

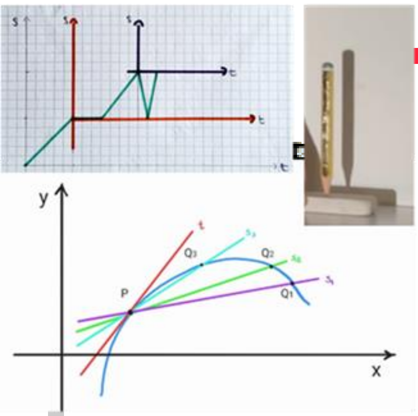
Dalla discussione è emerso che nei grafici distanza – tempo i tratti percorsi più velocemente erano caratterizzati da una maggiore pendenza e che il valore della velocità può essere associato al coefficiente angolare della retta a cui apparteneva il segmento che rappresentava il moto.

Dall'analisi dei grafici posizione – tempo, in modo analogo al caso precedente, è risultato abbastanza naturale che ci fossero dei tratti a pendenza negativa, "perché se si torna indietro, la posizione finale è minore di quella iniziale e il coefficiente angolare è negativo".

La discussione all'interno del gruppo e successivamente in classe ha reso più sicura l'acquisizione del concetto di pendenza e della relazione tra la velocità e il coefficiente angolare. Trovare la velocità e poi l'equazione del moto nei grafici ottenuti si è ricondotto a risolvere esercizi sulle funzioni definite a tratti già incontrate a matematica.

"Per trovare l'equazione dei singoli tratti si prendono due punti *A* e *B* su un segmento, si calcola il coefficiente angolare *m* e si utilizza l'equazione del fascio di rette

$y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ dove $(x_0; y_0)$ sono le coordinate di *A* o di *B*.".



attività proposta in classe: di nuovo l’esperimento 1

A questo punto l’insegnante ha chiesto di ripensare al primo esperimento e di cercare un modo per descrivere l’andamento dell’altezza dell’ombra in funzione della distanza che non fosse solo qualitativo.

Gli studenti hanno proposto di prendere alcune misure, così è stato ripetuto l’esperimento.

L’oggetto e la sorgente di luce sono state disposte come indicato nello schema seguente.

parete oggetto luce

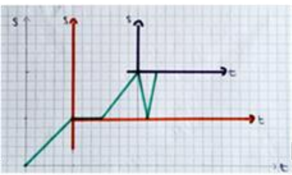
| *h* *O* *L*

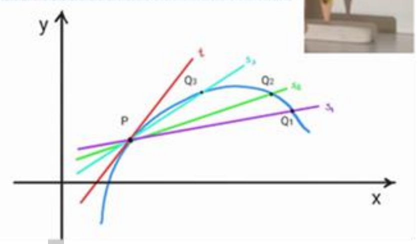
|__________________|___________|

0 cm *d* *D*

Sono state eseguite due serie di misure:

1. mantenendo costante la distanza *D* di sorgente di luce *L* da una parete, si misura l’altezza *h* dell’ombra dell’oggetto proiettata sulla parete, al variare della distanza *d* dell’oggetto dalla parete;
2. mantenendo fissa la distanza *d* dell’oggetto dalla parete, si misura l’altezza *h* dell’ombra dell’oggetto proiettata sulla parete, al variare della distanza *D* della sorgente di luce dalla parete.





attività assegnata per casa sull’esperimento 1

Introduzione al calcolo sublime

A. Esperimento 1: “Altezza dell’ombra di un oggetto in funzione della sua distanza dalla parete”

Misure dell’altezza h dell’ombra di un oggetto proiettata sulla parete mediante la sorgente di luce di un cellulare.

Tenendo fissa la distanza D = 70,0 cm della sorgente di luce dalla parete, si misura l’altezza h dell’ombra dell’oggetto (in figura) proiettata sulla parete, al variare della distanza d dell’oggetto dalla parete.
Nello schema seguente sono rappresentate: l’altezza h dell’ombra sulla parete in corrispondenza di 0 cm, la posizione dell’oggetto a distanza variabile d dalla parete, la posizione della sorgente a distanza fissa D = 70,0 cm dalla parete.

h oggetto luce

0 cm d D = 70 cm

Dati sperimentali: altezza oggetto 9,0 cm distanza luce-parete 70,0 cm

distanza d (cm)	incertezza d (cm)	altezza h (cm)	incertezza h (cm)
1,0	0,1	9,0	0,2
5,0	0,1	9,5	0,2
10,0	0,1	10,0	0,2
15,0	0,1	11,0	0,2
20,0	0,1	12,0	0,2
25,0	0,1	14,0	0,2
30,0	0,1	15,0	0,2
35,0	0,1	16,5	0,5
40,0	0,1	19,0	0,5
45,0	0,1	23,0	0,5
50,0	0,1	28,5	0,5
55,0	0,1	36,0	0,5
57,0	0,1	44,5	0,5
59,0	0,1	53	1
60,0	0,1	61	1
61,0	0,1	71	1
62,0	0,1	78	1
63,0	0,1	91	1

Oltre 63 cm, la luce non illuminava la parte superiore del lapis e quindi sul muro veniva proiettata l’ombra solo della parte inferiore.

1. Disegnare su un foglio a quadretti il grafico dell’altezza h (asse y) in funzione della distanza d (asse x), riportando, se possibile, anche le incertezze (non unire i punti).
2. Descrivere l’andamento del grafico (sul quaderno)
3. Prevedere (dal grafico) l’altezza dell’ombra se:
   a) d = 58 cm,
   b) d = 65 cm.

B. Esperimento 2: “Altezza dell’ombra di un oggetto in funzione della distanza della luce dalla parete”

Tenendo fissa la distanza d = 5,0 cm dell’oggetto dalla parete, si misura l’altezza h dell’ombra dell’oggetto (in figura) proiettata sulla parete, al variare della distanza D della sorgente di luce dalla parete.

Nello schema seguente sono rappresentate: l’altezza h dell’ombra sulla parete in corrispondenza di 0 cm, la posizione dell’oggetto a distanza fissa d = 5,0 cm dalla parete, la posizione della sorgente a distanza variabile D dalla parete.

h oggetto luce

0 cm d = 5,0 cm D 70 cm

Dati sperimentali: altezza oggetto 9,0 cm distanza oggetto-parete 5,0 cm

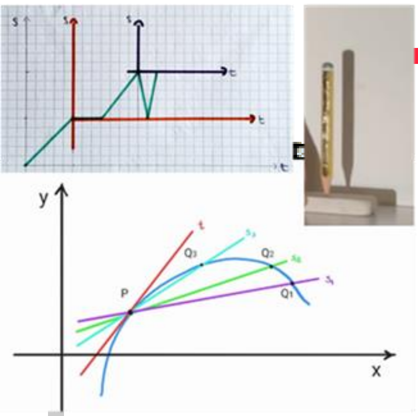
distanza D (cm)	incertezza D (cm)	altezza h (cm)	incertezza h (cm)
8	0,1	23	0,5
9	0,1	18,5	0,5
10	0,1	16	0,5
11	0,1	15	0,5
13	0,1	13,2	0,2
15	0,1	12,2	0,2
20	0,1	10,8	0,2
25	0,1	10,2	0,2
30	0,1	9,7	0,2
40	0,1	9,5	0,2
45	0,1	9,2	0,1
50	0,1	9	0,1
60	0,1	9	0,1
70	0,1	9	0,1

Per distanze della luce dalla parete inferiori a 8,0 cm (cioè a 3,0 cm dall’oggetto), la luce non illuminava la parte superiore del lapis e quindi sul muro veniva proiettata l’ombra solo della parte inferiore.

1. Disegnare su un foglio a quadretti il grafico dell’altezza h (asse y) in funzione della distanza d (asse x), riportando, se possibile, anche le incertezze (non unire i punti).
2. Descrivere l’andamento del grafico (sul quaderno)
3. Prevedere (dal grafico) l’altezza dell’ombra se:
   a) d = 12,0 cm,
   b) d = 7,0 cm.

C. Osservazioni

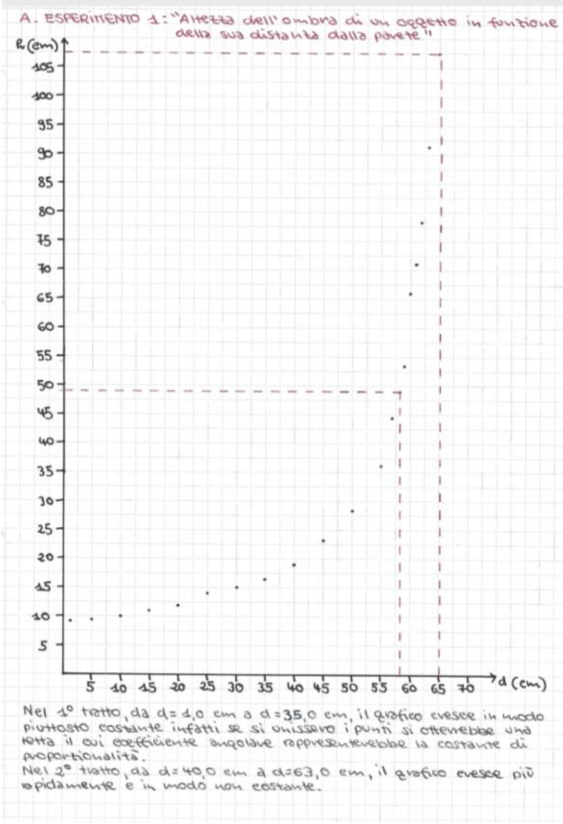
Confrontare e commentare i due grafici sul quaderno, cioè stabilire:
a) se rappresentano la stessa situazione, cioè se hanno lo stesso andamento,
b) se ci sono delle differenze, descriverle,
c) facendo riferimento alle risposte date nei punti precedenti, A.3 e in B.3, spiegare che cosa succede tra un dato e l’altro, cioè spiegare se l’altezza cambia con continuità oppure no (riguardare eventualmente il video dell’esperimento su Classroom).



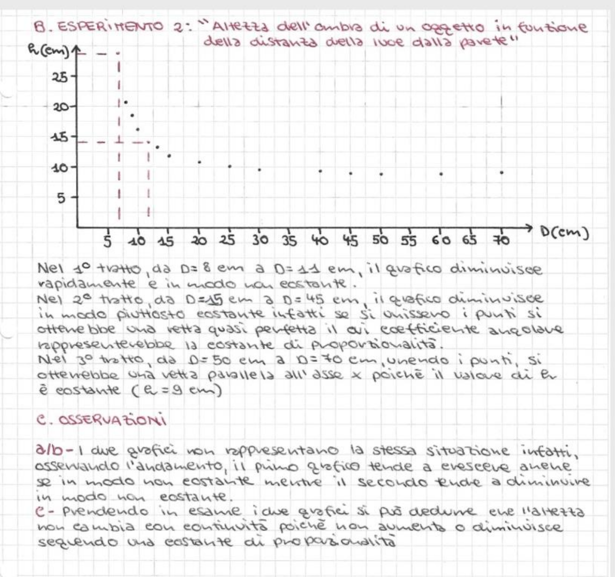
presentazione dei lavori inviati da alcuni studenti sull’esperimento 1 (1)

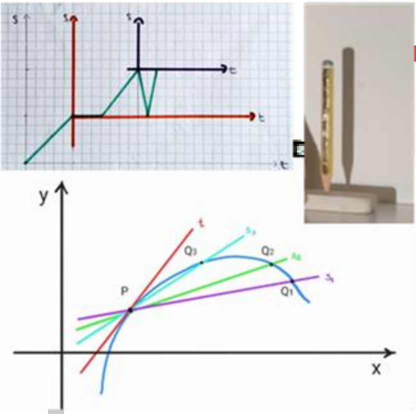
Esempi di grafici e osservazioni di alcuni studenti.

1.1



1.2





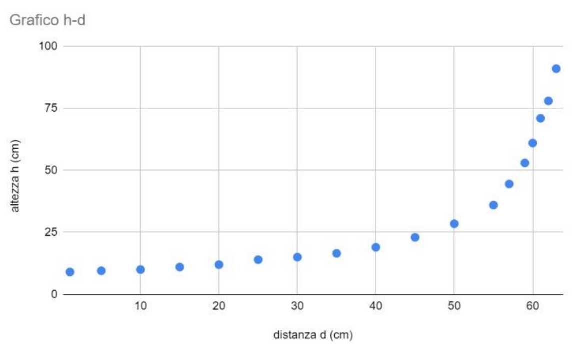
presentazione dei lavori inviati da alcuni studenti sull’esperimento 1 (2)

Esempi di grafici e osservazioni di alcuni studenti.

2.1

1. Il primo esperimento è stato fatto tenendo in conto l’altezza dell’ombra di un oggetto in funzione della sua distanza dalla parete

E il relativo grafico:



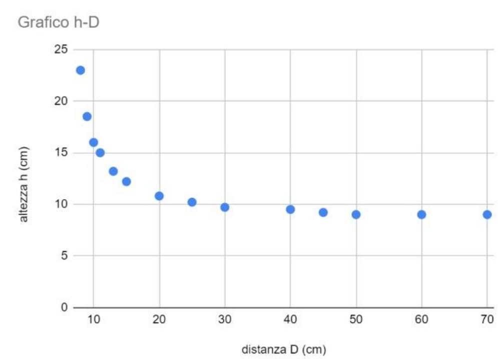
Descrizione:
Il grafico segue un andamento esponenziale, per cui all'allontanarsi dalla parete l’altezza aumenta in modo non lineare

Esercizio:
osservando il grafico è possibile prevedere che:
d=58 cm h=49 cm
d=65 cm h=100 cm

2.2

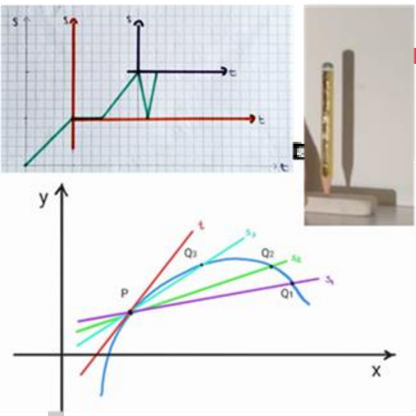
2. È stato poi eseguito nuovamente l'esperimento, analizzando stavolta l'altezza dell’ombra
dell'oggetto in funzione della distanza della luce dalla parete

e il grafico collegato:



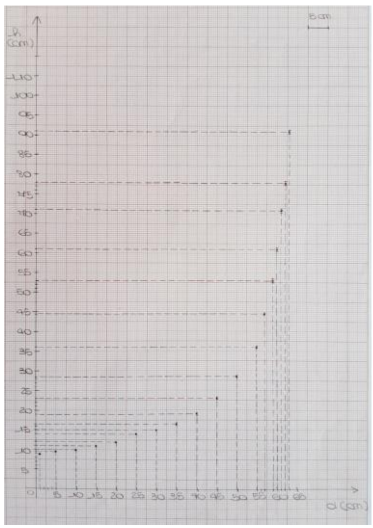
Descrizione e considerazioni:
Anche in questo caso il grafico non segue un andamento lineare, bensì all'aumentare della distanza l’altezza diminuisce, prima in modo più rapido e successivamente rallentando.
È quindi evidenziato dai grafici come tenendo in considerazione punti di riferimento diversi (la distanza dalla luce e dalla parete) si ottengano risultati pressoché opposti.

Esercizio:
osservando il grafico è possibile prevedere che:
d=12 cm h=14 cm
d=7 cm h=25 cm

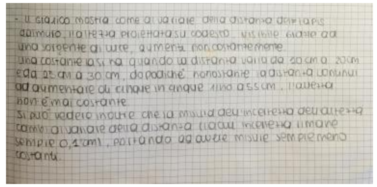


presentazione dei lavori inviati da alcuni studenti sull’esperimento 1 (3)

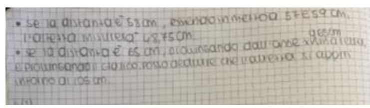
3.1



3.2

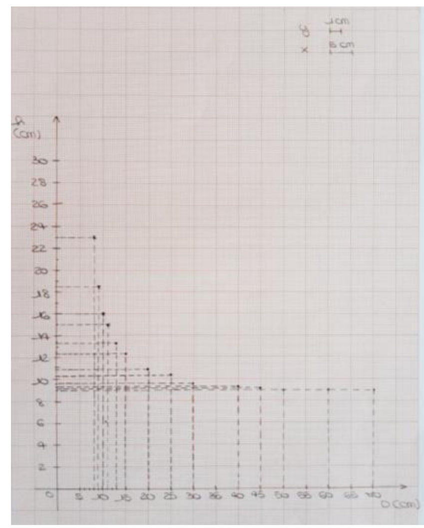


- Il grafico mostra come al variare della distanza della lapis dal muro, l'altezza proiettata su codesto, visibile grazie ad una sorgente di luce, aumenta non costantemente.
Una costante la si ha quando la distanza varia da 10 cm a 20 cm e da 25 cm a 30 cm, dopodiché nonostante la distanza continui ad aumentare di cinque in cinque fino a 55 cm, l'altezza non è mai costante.
Si può vedere inoltre che la misura dell'incertezza dell'altezza cambi al variare della distanza (l'incertezza rimane sempre 0,1 cm), portando ad avere misure sempre meno costanti.

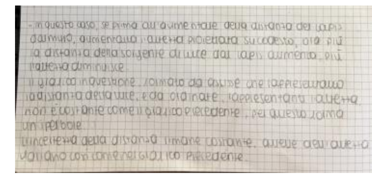


- Se la distanza è 58 cm, essendo in mezzo a 57 e 59 cm, l'altezza misurerà 48,75 cm.
- Se la distanza è 65 cm, prolungando dall'ombre [illegible], e prolungando il grafico, posso dedurre che l'altezza si approssimerà a 105 cm.

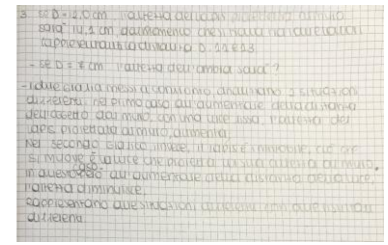
3.3



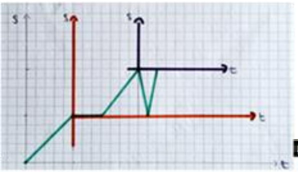
3.4

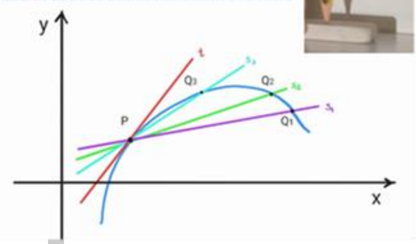


- In questo caso, se prima all'aumentare della distanza del lapis dal muro, aumentava l'altezza proiettata su codesto, ora più la distanza della sorgente di luce dal lapis aumenta, più l'altezza diminuisce.
Il grafico in questione, formato da ascisse che rappresentano la distanza della luce, e da ordinate, rappresentanti l'altezza, non è costante come il grafico precedente, per questo forma un'iperbole.
L'incertezza della distanza rimane costante, quelle dell'altezza variano così come nel grafico precedente.



3. Se D = 12,0 cm l'altezza del lapis proiettata sul muro sarà 14,1 cm, dal momento che si trova tra le due etichette rappresentanti la distanza D: 11 e 13.
- Se D = 7 cm l'altezza dell'ombra sarà?
- I due grafici messi a confronto, analizzano 2 situazioni differenti: nel primo caso all'aumentare della distanza dell'oggetto dal muro, con una luce fissa, l'altezza del lapis proiettato al muro, aumenta.
Nel secondo grafico invece, il lapis è immobile, ciò che si muove è la luce che proietta la sua altezza al muro; in questo caso, all'aumentare della distanza della luce, l'altezza diminuisce.
Rappresentano queste situazioni differenti con due risultati differenti.



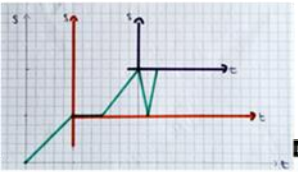


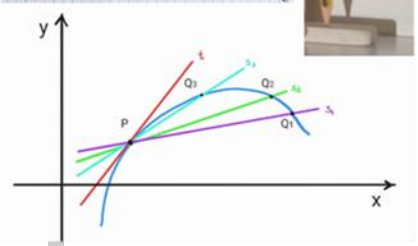
sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

Nella presentazione alla classe nel lavoro assegnato per casa, gli studenti hanno descritto e commentato i grafici, ipotizzando anche una legge che potesse descriverne l’andamento.

Non tutti, invece, hanno saputo prevedere i valori dell’altezza dell’ombra tra due dati sperimentali o al di fuori dell’intervallo di misura, come era richiesto nei punti A.3 e B.3 della scheda.

Per questo l’insegnante ha chiesto di pensare a cosa succede tra un dato e l’altro, cioè se è possibile ritenere che l’altezza dell’ombra cambi con “continuità” al variare della posizione dell’oggetto (A) o della sorgente di luce (B).

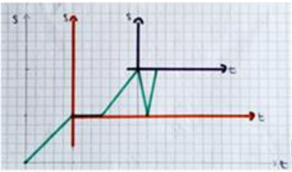


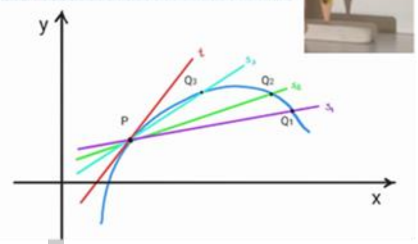


sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

Lo scopo è quello di evidenziare due questioni fondamentali.

1. Il passaggio dal discreto al continuo: i dati sperimentali sono discreti, ma posso interpretare il fenomeno pensando che i valori cambino con continuità? Cioè, i valori sperimentali appartengono all'insieme **Q** dei numeri razionali, che è un insieme denso, ma posso prevedere che cosa succede tra un dato sperimentale e l'altro, cioè considerare valori appartenenti all'insieme **R** dei numeri reali, che è un insieme continuo?
2. Prevedere che cosa succede tra un dato e l'altro significa prendersi il rischio di dare un'interpretazione ai dati sperimentali, supponendo che varino con continuità. Ma questa è una nostra ipotesi. Possiamo ripetere l'esperimento anche cento volte, ma solo quando sarò riuscito a trovare un modello matematico che lo descrive, sarò riuscito a comprendere davvero il fenomeno.





sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

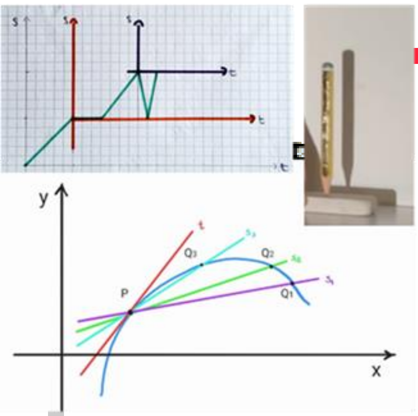
Per quanto riguarda il primo punto sono state richiamate le caratteristiche degli insiemi numerici già affrontate nella classe seconda. In particolare:

- l’insieme dei numeri naturali **N** e l’insieme dei numeri interi **Z** sono “discreti”, cioè possono essere rappresentati su una retta come *punti isolati*;

- l’insieme dei numeri razionali **Q** è “denso”, cioè tra due frazioni se ne può trovare almeno un’altra e, ripetendo questo procedimento, se ne possono trovare infinite. Quindi è possibile avvicinarsi quanto si vuole a una frazione data; la rappresentazione dei numeri razionali non esaurisce però tutti i punti della retta: contiene infiniti *buchi*. È stato dimostrato, infatti, che $\sqrt{2}$ non è razionale e che può essere rappresentato sulla retta! E non sono razionali i numeri ottenuti moltiplicando $\sqrt{2}$ per un numero razionale *q*: $q\sqrt{2}$, che sono infiniti…

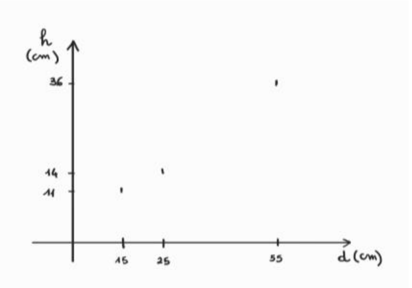
- l’insieme dei numeri reali **R** è “continuo”, costituito dai numeri sia razionali che irrazionali che possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti della retta.

Per quanto riguarda il secondo punto è stato proposto l’esercizio seguente.



attività proposta in classe
esercizio 3 (1)

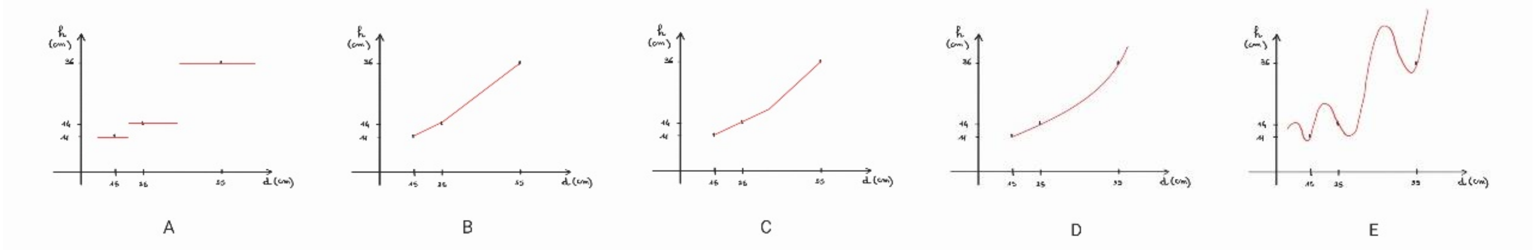
Esercizio 3



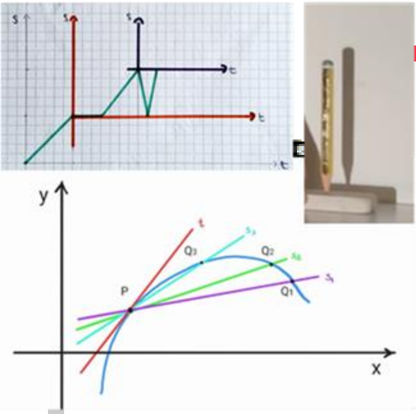
Supponiamo che nell'esperimento A della scheda siano stati presi solo tre valori.

Fissata la posizione della sorgente di luce, si pone l'oggetto a tre diverse distanze dalla parete e si registrano le corrispondenti altezze dell'ombra, come indicato nel grafico a fianco. Le coordinate dei tre punti sono: (d; h): (15; 11), (25; 14), (55; 36).

Sono poi stati proposti cinque diversi andamenti, rappresentati nei seguenti grafici:



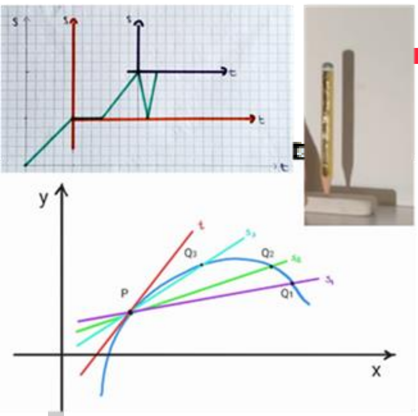
1. Determinare in ciascuno dei grafici qual è l'altezza dell'ombra quando l'oggetto è posto a 38 cm dalla parete.
2. Descrivere in modo sintetico come cambia l'altezza dell'ombra all'aumentare della sua distanza dalla parete in ciascuno dei grafici proposti.



attività proposta in classe
esercizio 3 (2)

Gli studenti hanno lavorato con la stessa modalità, prima individualmente, poi a coppie e infine confrontandosi con un’altra coppia. Ciascun gruppo, poi, ha presentato le proprie conclusioni al resto della classe.

Dalla discussione è emerso che tutti gli studenti erano riusciti a rispondere correttamente alle due richieste.



attività proposta in classe
esercizio 4 e risposte degli studenti

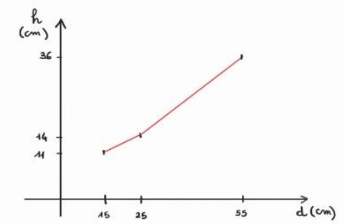
Esercizio 4

È stato chiesto di focalizzare l'attenzione sul secondo grafico e cercare di costruire un modello matematico, cioè la legge che descriva il fenomeno. Seguono gli interventi degli studenti.

"È una funzione definita a tratti".

"Si può scrivere l'equazione dei due segmenti".

"Si calcola il coefficiente angolare m di ciascun segmento e si utilizza l'equazione del fascio di rette $y - y_0 = m \cdot (x - x_0)$ dove $(x_0; y_0)$ sono le coordinate di uno degli estremi del segmento".

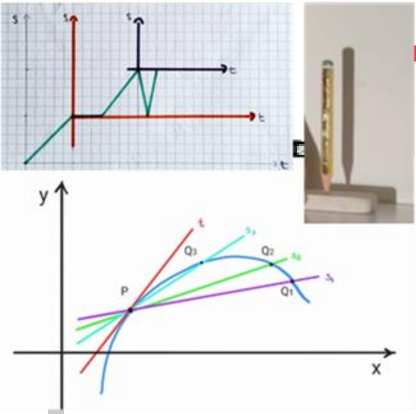


B

"$m_1 = (14-11)/(25-15) = 3/10$ $\quad y - 15 = 3/10 \cdot (x - 11)$ $\quad$ se $15 < x \leq 25$".

"$m_2 = (36-14)/(55-25) = 11/15$ $\quad y - 36 = 3/10 \cdot (x - 55)$ $\quad$ se $25 < x \leq 55$".

$$y = \begin{cases} \frac{3}{10}x + \frac{13}{2} & 15 < x \leq 25 \\ \frac{11}{15}x + \frac{13}{3} & 25 < x \leq 55 \end{cases}$$



sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

La legge può essere riscritta in funzione dell’altezza *h* e della distanza *d*, dove *h* e *d* sono espresse in cm:

$$h = \begin{cases} \dfrac{3}{10}d + \dfrac{13}{2} & 15 < d \leq 25 \\[2ex] \dfrac{11}{15}d + \dfrac{13}{3} & 25 < d \leq 55 \end{cases}$$

A questo punto è stato ribadito il significato del coefficiente angolare: esso rappresenta la

rapidità di variazione media

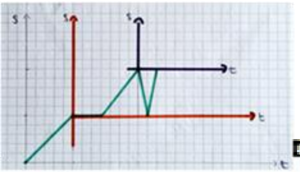
dell’altezza dell’ombra, che nel primo tratto risulta inferiore rispetto al secondo.

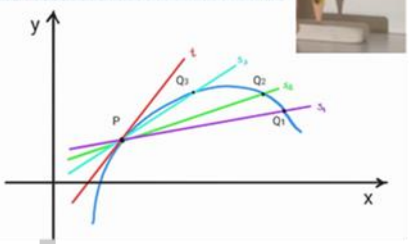
In ciascuno dei due tratti, il valore del coefficiente angolare rimane lo stesso anche se è calcolato tra due qualunque punti appartenenti al segmento; se torniamo all’esperimento, invece, vediamo che l’altezza dell’ombra è cambiata sempre più rapidamente all’aumentare della distanza dell’oggetto dalla parete.

Potrebbe essere calcolato il coefficiente angolare in ciascun intervallo riportato nella tabella dei dati sperimentali della scheda A, che darebbe la rapidità di variazione media dell’altezza dell’ombra al variare della posizione dell’oggetto in quell’intervallo. Ma sarebbe possibile calcolare la

rapidità di variazione istantanea

dell’altezza dell’ombra in una particolare posizione dell’oggetto?





attività proposta in classe: di nuovo l’esperimento 2

Prima di dare una risposta alla domanda precedente è stato chiesto di ripensare al significato del coefficiente angolare in un’altra situazione, l’esperimento 2 del lancio di una gomma.

Prendendo i dati della posizione della gomma a diversi istanti di tempo e costruendo il grafico corrispondente, è stato chiesto che cosa rappresenta il coefficiente angolare di un segmento nel diagramma posizione/tempo. Seguono alcune risposte degli studenti.

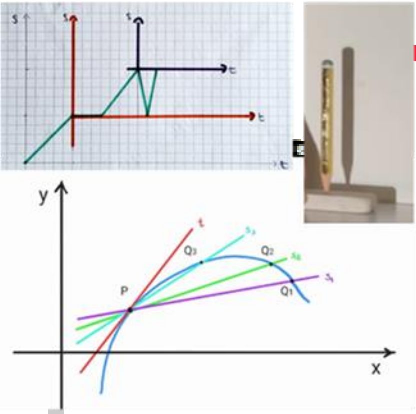
“Tra due istanti successivi rappresenta la velocità media in quell’intervallo di tempo”.

“Se prendiamo il punto di partenza e il punto in cui la gomma arriva alla massima altezza rappresenta la velocità media nella salita”.

A questo punto è stato chiesto se è possibile determinare la velocità istantanea in un dato istante *t* della tabella.

“Se conoscessimo le posizioni in un istante molto vicino a *t*, potrei calcolare la velocità media in un intervallo di tempo più piccolo”.

L’insegnante ha fatto notare che se è noto il grafico, le coordinate dei punti intermedi potrebbero essere ricavati da esso, interpolando tra l’istante *t* e il successivo, considerando istanti di tempo t_1, t_2, t_3, …sempre più vicini a *t*.

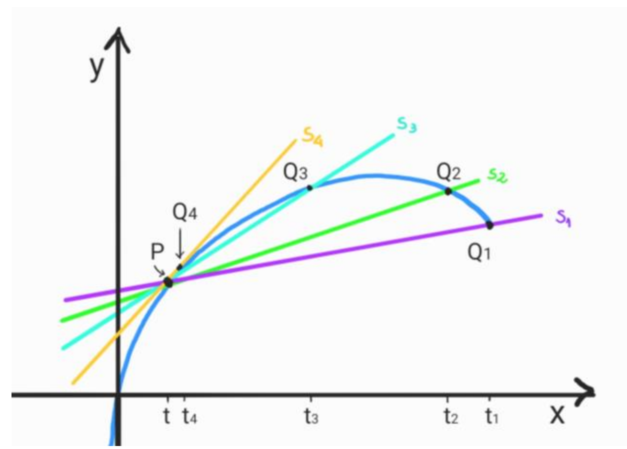


sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

È possibile determinare la velocità media in intervalli di tempo sempre più piccoli, calcolando il coefficiente angolare di rette secanti il grafico s_1, s_2, s_3, s_4 … come indicato nel grafico.

Della discussione, guidata dall’insegnante, che ne è seguita sono riportati alcuni degli interventi più significativi.

È stato chiesto quanto è possibile avvicinarsi e, in particolare, a quale insieme numerico appartengono i valori che assume il tempo.



“Se il tempo varia con continuità, allora appartiene a **R**”.

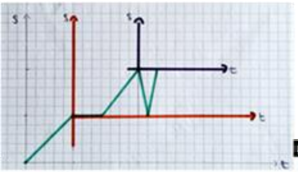
“Posso avvicinarmi sempre di più”.

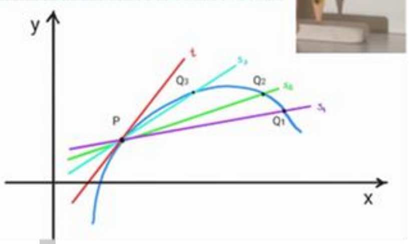
“Ma se il punto Q va a coincidere con P, come si fa a calcolare il coefficiente angolare, il denominatore si annulla”.

La conclusione è stata che geometricamente non si può far coincidere il punto Q con il punto P.

Ma dal punto di vista fisico, ha senso parlare di velocità istantanea?

“Sì, è quella che registra il tachimetro, per esempio”.





sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

L'insegnante ha proposto di provare per via algebrica, considerando ora il moto di una sferetta, che inizialmente in quiete, scende lungo un piano inclinato e ha invitato gli studenti a descriverne il moto. Seguono alcune risposte degli studenti.

"La velocità aumenta sempre di più".

"È un moto uniformemente accelerato".

"Il grafico posizione tempo è una parabola".

L'insegnante ha proposto di considerare un moto parabolico in cui la distanza percorsa *d* e il tempo *t* sono legati dalla relazione $d = t^2$, con $d = 0$ quando $t = 0$, e di determinare il coefficiente angolare delle rette secanti il grafico nei punti *P* e *Q* (con *Q* che si avvicina a *P*) nei seguenti casi:

P (1; 1)

Q_1 (2; 4) Q_2 (1,5; 2,25)

Q_3 (1,1; 1,21) Q_4 (1,01; 1,0201) …

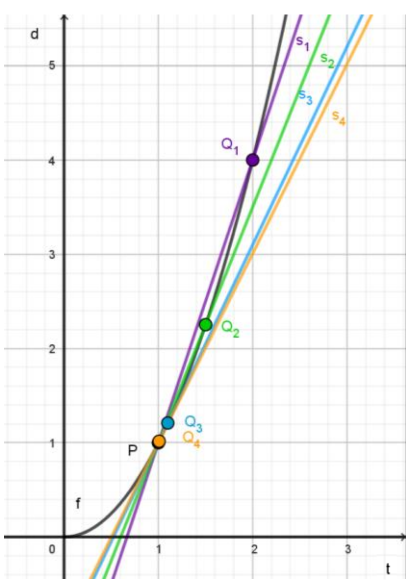
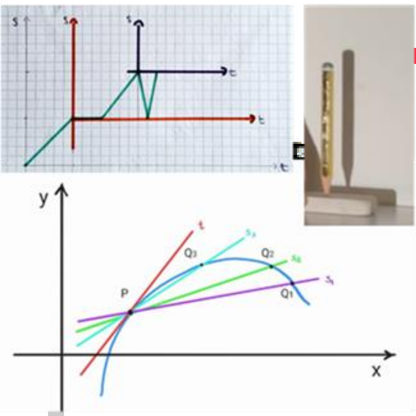


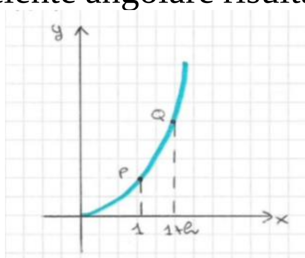
Fig. 1 Rette secanti alla curva $d = t^2$.

Fig. 2 Dettaglio della fig. 1 ingrandito in cui *P* e Q_4 non sono sovrapposti.



sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

L'insegnante si è poi chiesta se ci può essere un modo per evitare di fare tutti questi calcoli generalizzando il procedimento e ha proposto di indicare l'ascissa di Q, anziché con i valori numerici indicati precedentemente, con l'espressione più generale $t_Q = 1 + h$, con $h > 0$. Dai calcoli eseguiti in classe dagli studenti, il coefficiente angolare risulta:



$$m = \frac{f(1+h) - f(1)}{\cancel{1} + h - \cancel{1}}$$

$$m = \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \frac{\cancel{1} + 2h + h^2 - \cancel{1}}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = \frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}$$

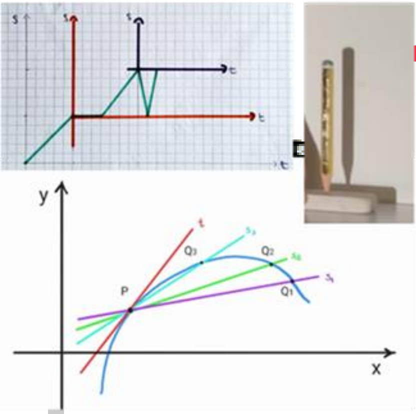
Con $m = h + 2$, se a h sono sostituiti i valori di 1, oppure 0,5, o 0,1 e 0,01 si ottengono i valori di m richiesti in precedenza per Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4.

Utilizzando i grafici di Geogebra è stato avvicinato Q_4 a P ed è stato chiesto: "E se h diventasse sempre più piccolo fino ad annullarsi, cioè il punto Q andasse a coincidere con il punto P, quale sarebbe il significato di $m = 2$?"

"La retta secante diventa tangente alla parabola in P". "$m = 2$ è la velocità istantanea a $t = 1$ s".

Quanto emerso dalla discussione ha portato a concludere che per via algebrica è possibile trovare

la velocità istantanea in un punto P.



sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

Lo stesso procedimento può essere applicato per determinare il coefficiente angolare della retta tangente in un altro punto della parabola, per esempio $P\ (2;4)$ con $t_O = 2 + h$, con $h > 0$.

$$P(2,4) \qquad Q(2+h\,;\,(2+h)^2)$$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2-4}{\cancel{2}+h-\cancel{2}} = \frac{\cancel{4}+4h+h^2-\cancel{4}}{h} = \frac{\cancel{h}(h+4)}{\cancel{h}} = h+4$$

Se h assume valori sempre più piccoli fino ad annullarsi, il risultato $m = h + 4$ tenderà al valore $m = 4$ che rappresenta la velocità istantanea all'istante $t = 2$ s.

Per evitare di ripetere i calcoli per i diversi valori di t, l'insegnante ha proposto di generalizzare questo procedimento determinando il coefficiente angolare per un generico istante $t = c$.

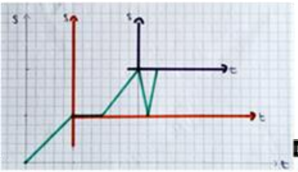
$$y = x^2 \qquad x = c \qquad P(c, c^2) \qquad Q(c+h\,;\,(c+h)^2)$$

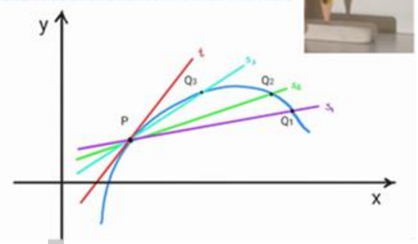
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(c+h)^2-c^2}{\cancel{c}+h-\cancel{c}} = \frac{\cancel{c^2}+2ch+h^2-\cancel{c^2}}{h} = \frac{\cancel{h}(2c+h)}{\cancel{h}} =$$

$$= 2c+h \qquad h \to 0 \qquad m_c = 2c$$

Il risultato è $m(c) = 2 \cdot c$, che rappresenta la velocità istantanea al generico istante $t = c$.

Sostituendo a c i valori 1 e 2, si ottengono i valori di m calcolati precedentemente: $c = 1$, $m(1) = 2$; $m(2) = 4$.





sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

L'insegnante ha chiesto di pensare a come poter verificare se il risultato ottenuto in generale è corretto e la risposta è stata:

"Il coefficiente angolare della retta tangente a una parabola in un punto si può trovare mettendo a sistema l'equazione della parabola e il fascio di rette per il punto e ponendo il *delta* uguale a zero".

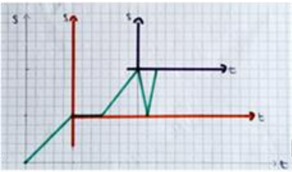
È stata assegnata per casa la verifica che $m(1) = 2$ e $m(2) = 4$ annullano il discriminante dell'equazione risolvente del sistema tra la parabola e il fascio di rette passante, rispettivamente, per i punti di coordinate (1; 1) e (2; 4).

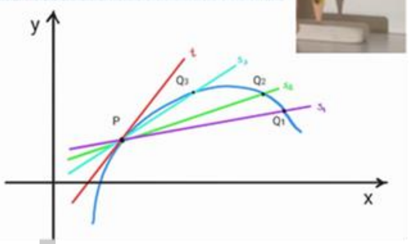
E per le funzioni potenza?

Gli studenti sono stati invitati a determinare il coefficiente angolare della funzione $y = x^3$ nel punto *P* (1; 1)

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y - 1 = m(x-1) \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^3 \\ y = mx - m + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^3 \\ x^3 - mx + m - 1 = 0 \end{cases}$$

ma in questo non si ottiene un'equazione di secondo grado… quindi la conclusione è stata che per tutte le funzioni diverse da quelle di secondo grado si può usare solo il procedimento delle secanti.

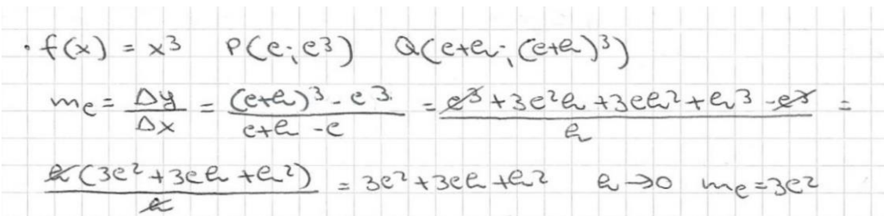




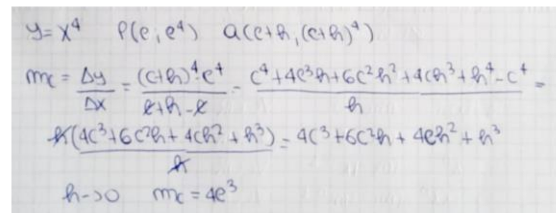
sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

Utilizzando il metodo delle secanti gli studenti hanno determinato il coefficiente angolare delle funzioni:

$y = x^3$ nel punto $P\ (c;\ c^3)$

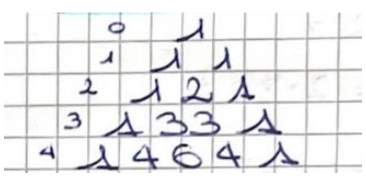


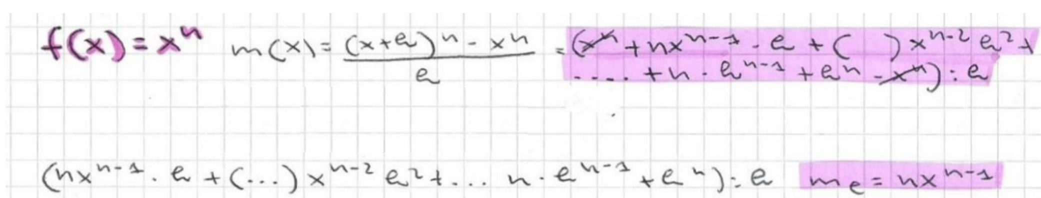
$y = x^4$ nel punto $P\ (c;\ c^4)$

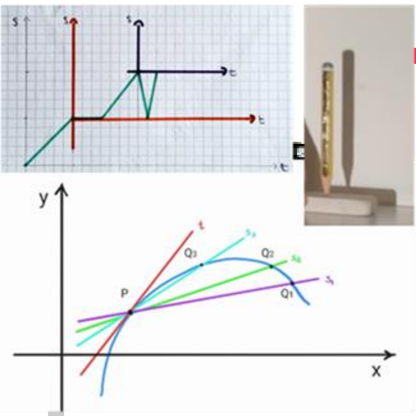


ed è stato chiesto se era possibile generalizzare il risultato nel caso della funzione $y = x^n$ e, dopo una breve riflessione, uno studente ha risposto $m(x) = n \cdot x^{n-1}$.

L’insegnante ha proposto di ricavare il risultato utilizzando la potenza n-esima di un binomio, ricordando che $(x + h)^n$ è un polinomio omogeneo di grado n, completo sia rispetto a x sia rispetto a h e che i coefficienti corrispondono alla riga n del triangolo di Tartaglia, facendo notare che alcuni termini dello sviluppo sono: $(x + h)^n = 1 \cdot x^n + n \cdot x^{n-1} + \ldots + n \cdot x^1 \cdot h^{n-1} + 1 \cdot h^n$. ·





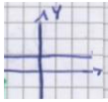


sviluppo del percorso guidato dall'insegnante

Dopo aver dimostrato che il coefficiente angolare della funzione $y = x^n$ è $m(x) = n \cdot x^{n-1}$,

è stato chiesto per quali valori di n può essere applicata la relazione trovata. In particolare se:

- n può assumere qualunque numero naturale, anche $n = 0$:



$y=2 \rightarrow m(x) = \frac{2-2}{h} = 0$

“Se $n = 0$, applicando la relazione trovata si ha $m(x) = 0$”.
“Se $n = 0$, la funzione è una retta parallela all'asse x, il coefficiente angolare è $m(x) = 0$”.
“Se la retta è parallela all'asse y, il coefficiente angolare non si può calcolare”.

- la funzione è fratta, ad esempio $y = \frac{1}{x^2}$ n può appartenere all'insieme dei numeri interi **Z**, cioè assumere valori negativi:

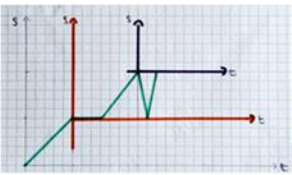
“La funzione si può riscrivere $y = x^{-2}$ e $m(x) = -2 \cdot x^{-3}$ ”.

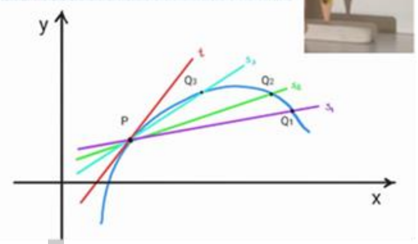
$n=-2 \quad y = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad m(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3}$

- la funzione è irrazionale, ad esempio $y = \sqrt{x}$, n può appartenere all'insieme dei numeri razionali **Q**.

“La funzione si può riscrivere $y = x^{1/2}$ e $m(x) = (1/2) \cdot x^{-1/2}$ ”.

$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad m_e = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$





sviluppo del percorso guidato dall’insegnante

L’insegnante ha poi guidato gli studenti a trovare il coefficiente angolare $m(x)$ per una generica funzione polinomiale; di seguito sono riportati gli elaborati degli studenti.

Determinare il coefficiente angolare quando:

- la funzione $y = f(x)$ è moltiplicata per una costante k. Alcuni esempi:

$y = k \cdot x^n$

$y = 2x \quad m(x) = 2 \quad m(x) = 2x^{1-1} = 2$

$y = 3x^2 \quad m(c) = \frac{3(c+h)^2 - 3c^2}{h} = 3\left[\frac{(c+h)^2 + c^2}{h}\right]$

$y = 2x^8 \quad m(c) = 2(8c^7) = 16c^7$

$y = kx^n \quad m(x) = k \cdot nx^{n-1}$

In generale si può dimostrare che

$y = k \cdot x^2$ nel punto $P\ (c;\ k \cdot c^2)$

$m(c) = k \cdot 2\,c$

$f(x) = k \cdot x^2 \quad P(c;\ k \cdot c^2) \quad Q(c+h;\ k(c+h)^2)$

$m_c = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k(c+h)^2 - kc^2}{\cancel{c}+h-\cancel{c}} = \frac{k(c^2+2ch+h^2) - kc^2}{h} =$

$\frac{\cancel{kc^2} + 2chk + kh^2 - \cancel{kc^2}}{h} = \frac{\cancel{h}(2ck + kh)}{\cancel{h}} \quad h=0 \rightarrow m_c = 2ck$

- la funzione è la somma di due funzioni $y = f(x) + g(x)$:

per esempio $y = x^3 + x$ nel punto $P\ (c;\ c^3 + c)$

$f(x) = x^3 + x$

$m_c = \frac{((c+h)^3 + (c+h)) - (c^3 + c)}{\cancel{c}+h-\cancel{c}} = \frac{[(c+h)^3 - c^3]}{h} + \frac{[(c+h) - c]}{h}$

$m_c = 3c^2 + 1$

$m(c) = 3 \cdot c^2 + 1$ cioè è la somma dei coefficienti angolari delle singole funzioni.

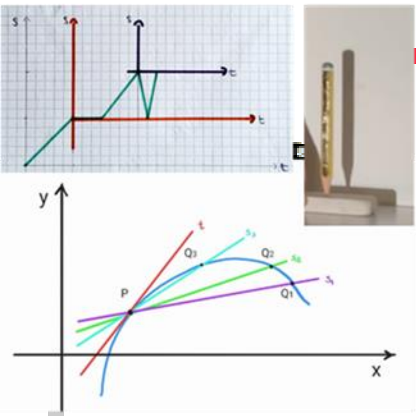
Riassumendo, data la funzione $y = k \cdot x^p + h \cdot x^q$

il coefficiente angolare è $m(c) = k \cdot p \cdot c^{p-1} + h \cdot q \cdot c^{q-1}$

$y = x^4 + 3x^2 \quad m_c = 4c^3 + 3 \cdot 2c^1$

$y = 2x^4 - 3x^2 + 2$

$m_c = 8c^3 - 6c = 8c^3 - 6c + 0$



sviluppo del percorso guidato dall’insegnante esercizio 5 e risposte degli studenti

L’insegnante ha proposto di risolvere i seguenti esercizi applicando la relazione trovata (sono riportati gli interventi degli studenti emersi dalla discussione in classe).

Esercizio 5

Un oggetto è lanciato verticalmente verso l’alto con la velocità iniziale di 3,0 m/s.

a) Scrivere l’equazione del moto e determinare in quale istante l’oggetto raggiunge la massima altezza.

“Nel punto di massima altezza la velocità si annulla” .

“Si cerca in quale istante la velocità istantanea è uguale a zero, $m(t) = 0$”.

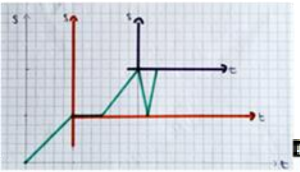
$y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + y_0 \quad y = -5t^2 + 3t \quad m(t) = -5(2t) + 3(1) = -10t + 3 \quad t = \frac{3}{10}$

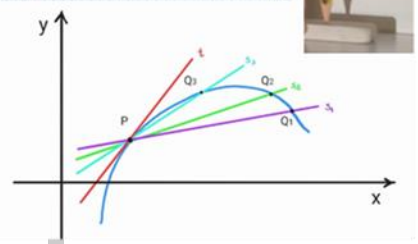
b) Calcolare la velocità istantanea dell’oggetto agli istanti $t_1 = 0{,}1$ s, $t_2 = 0{,}4$ s e darne un interpretazione fisica.

“$m(t_1) = 2$, la velocità istantanea è positiva mentre l’oggetto sale, $m(t_2) = -1$, la velocità istantanea è negativa, l’oggetto torna indietro”.

c) È possibile stabilire in quali intervalli di tempo la velocità istantanea è positiva e in quali è negativa?

“Si possono trovare ponendo $m(t) > 0$ e $m(t) < 0$; la velocità istantanea è positiva se $t < 0{,}3$ s, fino al punto di massima altezza e negativa se $t > 0{,}3$ s”.





sviluppo del percorso guidato dall'insegnante esercizio 6 e risposte degli studenti

Esercizio 6

È data l'equazione della velocità in funzione del tempo: $v(t) = \frac{1}{6}t^2 + 2$.

a) Determinare l'accelerazione media nell'intervallo 0 – 3 s.

"L'accelerazione media è il rapporto tra la variazione di velocità $v(3) - v(0)$ e l'intervallo di 3 s, cioè $a_m = 3/2\ m/s^2$ ".

"È il coefficiente angolare della retta secante il grafico della velocità nei punti O (0; 2) e (3; 7/2) ".

b) Determinare l'accelerazione istantanea all'istante t = 2 s.

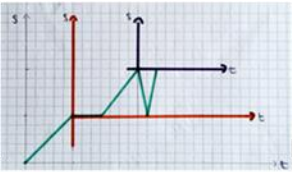
"È il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della velocità, si può risolvere il sistema tra la parabola e il fascio di rette passanti per P (2; 8/3) e porre $\Delta = 0$".

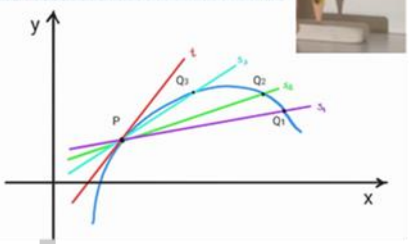
"Si può utilizzare il metodo delle secanti, è più veloce".

$a(t) = m'(t)$ della retta tangente alla funzione $v(t)$ nel diagramma v/t

$V_{istp} = \frac{1}{6}t^2 + 2$

$a_{ist_{p0}} = \frac{1}{6}2t + 0 = \frac{1}{3}t \qquad a(2) = \frac{1}{3}2$





attività proposta in classe
esercizio 7 e risposte degli studenti

Esercizio 7

L'equazione oraria di un moto armonico è rappresentata dalla funzione: $y = \sin x$
dove y è lo spostamento, espresso in metri, $x = \omega t$, dove ω è la pulsazione, in rad/s e t è il tempo in secondi.

Determinare la velocità istantanea nel punto P (x; sin$x$) utilizzando il metodo delle secanti.

$y=\sin x \quad P(x;\sin x) \quad Q(x+h;\sin(x+h))$

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{x+h-x}=\frac{\sin x\overset{1}{\cos h}+\cos x\sin h-\sin x}{h}=\frac{\cancel{\sin x\cdot 1}+\cos x\sin h-\cancel{\sin x}}{h}=\frac{\cos x\sin h}{h}$$

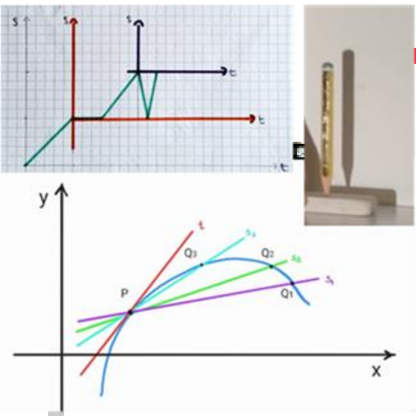
Per stabilire il risultato dell'espressione $\frac{\sin h}{h}$ trovata dagli studenti quando h assume valori sempre più piccoli fino ad annullarsi, sono stati calcolati i valori di sin h per gli angoli h di 1°, 0,1° e 0,01° trasformati in radianti.

Come si vede dalla tabella, sin h e h (rad) assumono valori sempre più vicini e il loro rapporto tende a 1.

$h°$	$1°$	$\left(\frac{1}{10}\right)°$	$\left(\frac{1}{100}\right)°$
h(rad)	0,01745329252	0,001745329252	0,00017453292
$\sin h$	0,01745240644	0,001745328364	0,00017453292

Con Geogebra, sono state poi disegnate le funzioni $y = x$ e $y = \sin x$ ed è stato mostrato come le due funzioni tendono ad avvicinarsi.
Quindi in un oscillatore armonico, se

$$y=\sin x \qquad m(x)=\cos x\,.$$



attività proposta in classe
esercizio 8 e risposte degli studenti

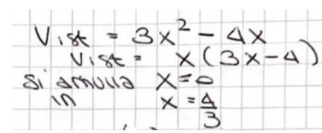
STUDIO DI FUNZIONE

L'insegnante ha proposto di risolvere il seguente esercizio in cui utilizzare il coefficiente angolare della retta tangente per disegnare il grafico della funzione e ha dato la definizione di massimo e minimo relativo.

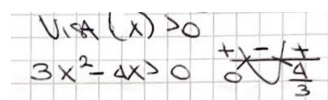
Esercizio 8

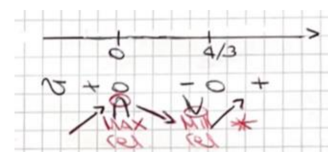
L'equazione oraria del moto di un oggetto è rappresentata dalla funzione: $y = x^3 - 2x^2$
dove y è lo spostamento, espresso in metri e x è il tempo in secondi.

a) Determinare in quali istanti la velocità si annulla.

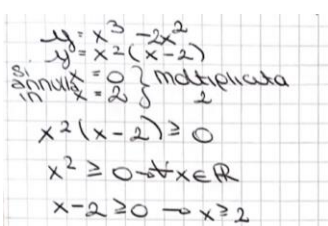


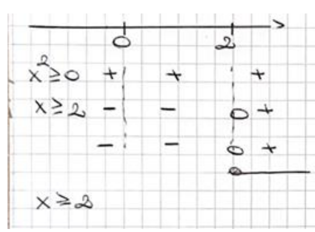
b) Stabilire in quali intervalli di tempo l'oggetto ha una velocità istantanea positiva e in quali negativa.

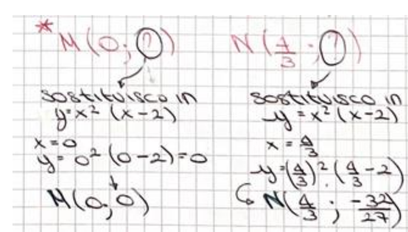


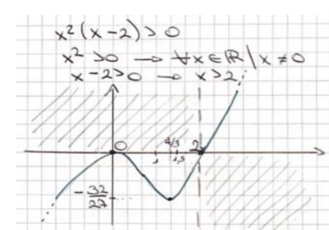


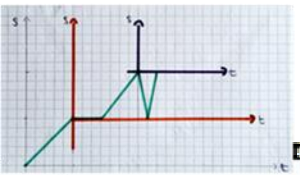
c) Disegna il grafico del moto.

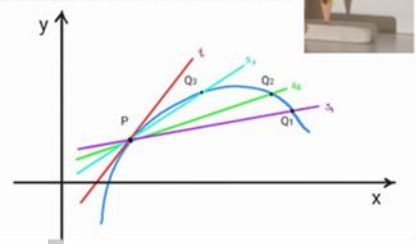












esercizi assegnati per casa
scheda 2 e risposte degli studenti

Scheda 2 di esercizi assegnata per casa.

1. Una palla viene lanciata da terra verticalmente verso l'alto. Determina la velocità dopo 1 secondo, sapendo che la sua distanza da terra dopo t secondi è $s(t) = 20t - 4{,}9t^2$ (espressa in metri). [10 m/s]

2. Il moto di un corpo su un percorso rettilineo segue la legge oraria $s(t) = 4t^2 + 2t$. Calcola la velocità all'istante $t = 2$ s, sapendo che la posizione è misurata in metri. [18 m/s]

3. Una particella si muove lungo l'asse x in modo tale che la sua velocità nella posizione x è data dalla formula $v(x) = 2 + \sin x$. Qual è la sua accelerazione in $x = \frac{\pi}{6}$? (USA *Harvard-MIT Mathematics Tournament*) [2,2]

4. Paola e Fabio si sfidano in una corsa di pattinaggio. Dall'istante $t = 0$, in cui entrambi oltrepassano il via della pista rettilinea, il loro moto segue la legge oraria:

$$s_{\text{Paola}}(t) = \frac{1}{18}t^3 + 2t \text{ per Paola; } s_{\text{Fabio}}(t) = \frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{2}t \text{ per Fabio.}$$

Il tempo è misurato in secondi e la posizione in metri.
   - **a.** Dopo 3 secondi chi dei due è più veloce?
   - **b.** Verifica che dopo 6 secondi sono fianco a fianco. Chi è più veloce ora? [a) Fabio; b) Paola]

5. Un corpo si muove in linea retta seguendo la legge oraria $s(t) = 4t^2 + t + 1$. Il tempo è misurato in secondi e la posizione in metri. Determina la velocità e l'accelerazione del corpo al variare del tempo e trova in quale istante la velocità è 17 m/s. [$v(t) = 8t + 1$; $a(t) = 8$ m/s²; $t = 2{,}0$ s]

6. Un oggetto si muove in linea retta secondo la legge oraria $s(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 1$. Il tempo è misurato in secondi e la posizione in metri.
   - **a.** Calcola in quali istanti la velocità è 3 m/s.
   - **b.** Determina l'istante in cui l'accelerazione è nulla. [a) $t = 1{,}0$ s; $t = 3{,}0$ s; b) $t = 2{,}0$ s]

"MATEMATICA.BLU 2.0" Terza edizione Vol. 5 ed. Zanichelli

Esercizi svolti dagli studenti

1.
$S(t) = 20t - 4{,}9t^2$
$V(t) = -4{,}9 \cdot 2t + 20$
Determina la V dopo 1 s ($t = 1$ s)
$V(1\,s) = -4{,}9 \cdot 2 + 20 = -9{,}8 + 20 = 10{,}2$ m/s
La V dopo 1 s è di 10,2 m/s.

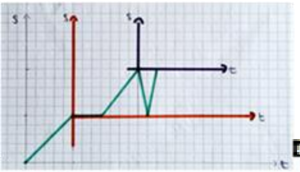
2.
$S(t) = 4t^2 + 2t$
$V(t) = 4 \cdot 2t + 2 \rightarrow V(t) = 8t + 2$
Calcola V a $t = 2$ s.
$V(2s) = 8 \cdot 2 + 2 = 16 + 2 = 18 \frac{m}{s}$
La V a $t = 2$ s è di $18 \frac{m}{s}$.

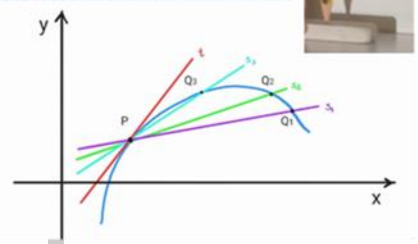
3.
$v(x) = 2 + \sin x$
$a(x) = \cos x$
$x = \frac{\pi}{6}$
$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.
$S_P = \frac{1}{18}t^3 + 2t \rightarrow V_P = \frac{1}{18} \cdot 3t^2 + 2$
$S_F = \frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{2}t \rightarrow V_F = \frac{1}{24} 3t^2 + \frac{5}{2}$
a) $t = 3$ s chi è più veloce
b) verifica che $t = 6$ s $S_P = S_F$.
Chi è più veloce a $t = 6$ s?
a) $V_P = \frac{1}{6}t^2 + 2 \xrightarrow{t=3s} \frac{1}{6} \cdot 9 + 2 = \frac{7}{2} \frac{m}{s}$ (= 3,5 m/s)
$V_F = \frac{1}{8}t^2 + \frac{5}{2} \xrightarrow{t=3s} \frac{1}{8} \cdot 9 + \frac{5}{2} = \frac{29}{8} \frac{m}{s}$ (= 3,625 m/s)
All'istante $t = 3$ s è più veloce Fabio.
b) $V_P = \frac{1}{6}t^2 + 2 \xrightarrow{t=6s} \frac{1}{6} \cdot 36 + 2 = 8$ m/s
$V_F = \frac{1}{8}t^2 + \frac{5}{2} \xrightarrow{t=6s} \frac{1}{8} \cdot 36 + \frac{5}{2} = 7$ m/s
All'istante $t = 6$ s è più veloce Paola
$S_P = \frac{1}{18}t^3 + 2t \xrightarrow{t=6s} \frac{1}{18}(216) + 2 \cdot 6 = 24$ m
$S_F = \frac{1}{24}t^3 + \frac{5}{2}t \xrightarrow{t=6s} \frac{1}{24}(216) + \frac{5}{2} \cdot 6 = 24$ m
Entrambi all'istante $t = 6$ s si trovano a $S = 24$ m

5.
$s(t) = 4t^2 + t + 1$
$m(4t^2) = K \cdot n t^{n-1} = 8t^{2-1} = 8t$
$m(t) = K \cdot n t^{n-1} = t^{1-1} = t^0 = 1$
$m(1) = 0$
$v(t) = 8t + 1$ $a = 8$ m/s²
$v = 17$ m/s $17 \frac{m}{s} = 8t + 1$ $t = \frac{17 \frac{m}{s} + 1 \frac{m}{s}}{8 \frac{m}{s^2}} = 2{,}0$ s

6.
$S(t) = t^3 - 6t^2 + 12t - 1$
$V(t) = 3t^2 - 12t + 12 \rightarrow V(t) = 3(t^2 - 4t + 4) = 3(t-2)^2$
a) Calcola a quali istanti la V è 3 m/s
b) Determina l'istante in cui $a = 0$
a) $3t^2 - 12t + 12 = 3$
$3t^2 - 12t + 9 = 0 \rightarrow t^2 - 4t + 3 = 0$
$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$ → $\frac{2}{2} = 1$ → $\frac{6}{2} = 3$
La V è 3 m/s agli istanti $t_1 = 1$ s e $t_2 = 3$ s
b) $3(t-2)^2 = 0$
$t - 2 = 0 \rightarrow t = 2$
L'accelerazione è nulla all'istante $t = 2$





verifica scritta
eseguita in classe dagli studenti

Verifica di Matematica

1. In uno degli esperimenti eseguiti in classe, uno studente ha rappresentato lo stesso moto nei grafici *tempo/distanza* (fig. 1.a) e *tempo/posizione* (fig. 1.b).
   a) Spiega la differenza tra distanza e spostamento.
   b) Descrivi il moto rappresentato e indica in quale tratto è stato percorso con velocità maggiore.

fig. 1.a

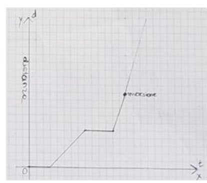
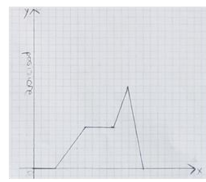
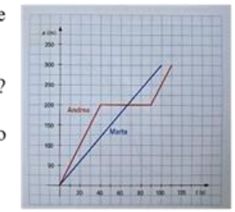


fig. 1.b



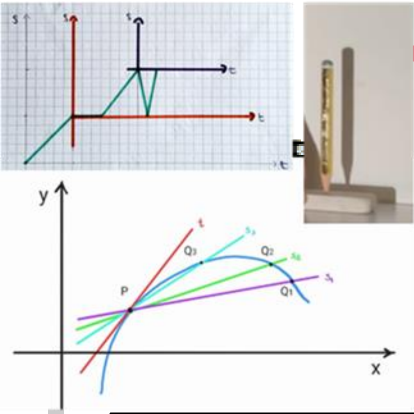
2. Fabio esce per andare ad allenarsi nella palestra distante 1,0 km da casa. Dopo 5,0 minuti di cammino incontra Anna, che abita a 400 m da lui, si ferma a parlare per un minuto e poi proseguono verso la palestra camminando insieme per 12,5 minuti. All'ingresso della palestra, si fermano a parlare per 4,5 minuti con alcuni amici e scoprono che l'allenamento è rimandato al giorno successivo. La mamma di Gabriele accompagna Fabio a casa con l'auto che si muove ad una velocità media di 54 km/h.
   a) Disegna il grafico tempo / posizione del moto di Fabio.
   b) Calcola la velocità in ogni tratto.
   c) Calcola la velocità media di Fabio per arrivare alla palestra.

3. Il grafico riporta la posizione in funzione del tempo di Marta e Andrea durante una gara.
   a) Descrivi il moto dei due ragazzi.
   b) Quale distanza percorre Andrea nei primi 50 s? E Marta?
   c) Chi dei due vince la gara? Con quale vantaggio?
   d) Quale velocità avrebbe dovuto tenere Andrea nell'ultimo tratto per arrivare contemporaneamente a Marta?
   e) Scrivi le equazioni orarie dei due moti.



4. Data la funzione $f(x) = 3x^2$, calcola il coefficiente angolare della retta secante la curva in due punti P e Q, con $P(c; 3c^2)$ e $Q(c + h; 3(c + h)^2)$. Determina poi il coefficiente angolare della retta tangente in P alla funzione.

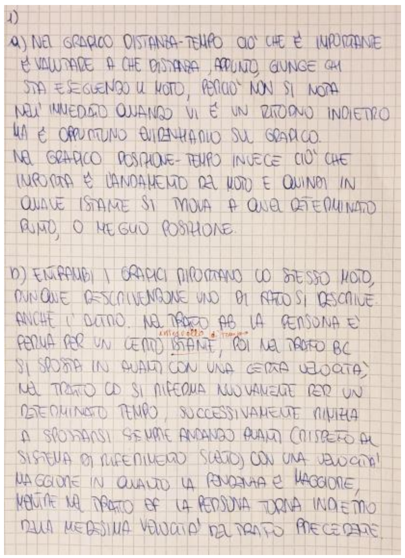
5. La posizione di un corpo che si muove in linea retta varia nel tempo seguendo l'equazione oraria: $s(t) = t^3 - 3t^2 - t$ dove il tempo è espresso in secondi e la posizione in metri.
   a) Determina la velocità istantanea al variare del tempo v(t) e calcola:
      i) in quali istanti la velocità si annulla;
      ii) in quali intervalli di tempo la velocità è positiva;
   b) Determina l'accelerazione istantanea al variare del tempo a(t) e calcola in quali istanti l'accelerazione si annulla;
   c) Disegna il grafico di s(t) e descrivi il moto del corpo.



svolgimento della verifica scritta
esercizi 1, 2 e 3

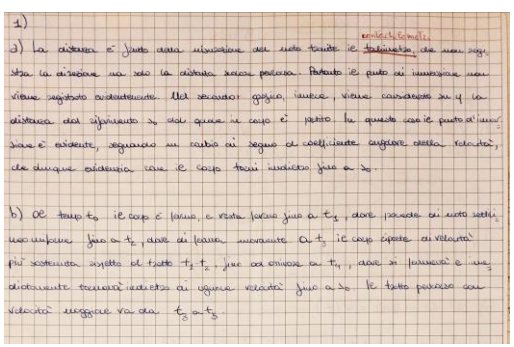
Esercizio 1

corretti



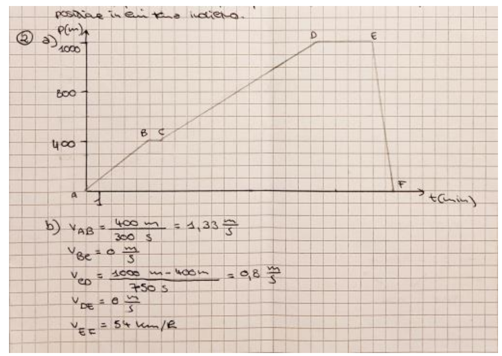
1)
a) NEL GRAFICO DISTANZA-TEMPO CIÒ CHE È IMPORTANTE È VALUTARE A CHE DISTANZA, APPUNTO, GIUNGE CHI STA ESEGUENDO IL MOTO, PERCIÒ NON SI NOTA NELL'IMMEDIATO QUANDO VI È UN RITORNO INDIETRO MA È OPPORTUNO RAGIONARCI SUL GRAFICO.
NEL GRAFICO POSIZIONE-TEMPO INVECE CIÒ CHE IMPORTA È L'ANDAMENTO DEL MOTO E QUINDI IN QUALE ISTANTE SI TROVA A QUEL DETERMINATO PUNTO, O MEGLIO POSIZIONE.

b) ENTRAMBI I GRAFICI RIPORTANO LO STESSO MOTO, DUNQUE DESCRIVENDONE UNO DI FATTO SI DESCRIVE ANCHE L'ALTRO. NEL TRATTO AB LA PERSONA È FERMA PER UN CERTO ISTANTE, POI NEL TRATTO BC SI SPOSTA IN AVANTI CON UNA CERTA VELOCITÀ; NEL TRATTO CD SI RIFERMA NUOVAMENTE PER UN DETERMINATO TEMPO, SUCCESSIVAMENTE INIZIA A SPOSTARSI SEMPRE ANDANDO AVANTI (RISPETTO AL SISTEMA DI RIFERIMENTO SCELTO) CON UNA VELOCITÀ MAGGIORE IN QUANTO LA PENDENZA È MAGGIORE, MENTRE NEL TRATTO EF LA PERSONA TORNA INDIETRO ALLA MEDESIMA VELOCITÀ DEL TRATTO PRECEDENTE



Esercizio 2

corretto



posizione in cui torna indietro.
② a) P(m) 1000, 800, 400; A, B, C, D, E, F; t(min)

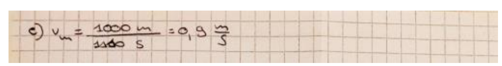
b) $v_{AB} = \frac{400\ m}{300\ s} = 1{,}33\ \frac{m}{s}$

$v_{BC} = 0\ \frac{m}{s}$

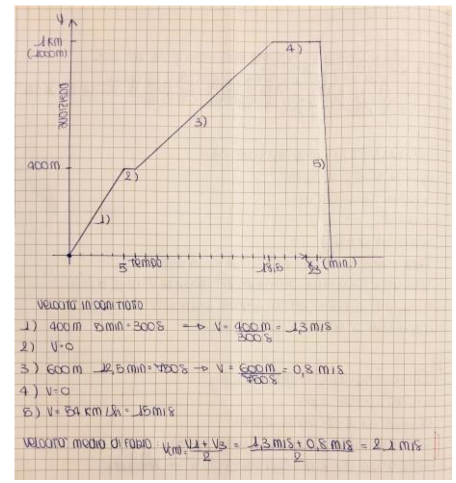
$v_{CD} = \frac{1000\ m - 400\ m}{750\ s} = 0{,}8\ \frac{m}{s}$

$v_{DE} = 0\ \frac{m}{s}$

$v_{EF} = 54\ km/h$



c) $v_m = \frac{1000\ m}{1100\ s} = 0{,}9\ \frac{m}{s}$

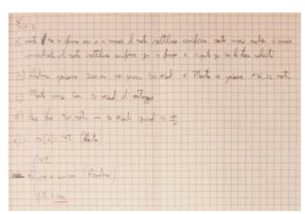


velocità in ogni tratto
1) 400 m 5 min · 300 s → $V = \frac{400\ m}{300\ s} = 1{,}3\ m/s$
2) V = 0
3) 600 m 12,5 min = 750 s → $V = \frac{600\ m}{750\ s} = 0{,}8\ m/s$
4) V = 0
5) V = 54 km/h = 15 m/s
velocità media di tutto $V_m = \frac{V_1 + V_3}{2} = \frac{1{,}3\ m/s + 0{,}8\ m/s}{2} = 2{,}1\ m/s$

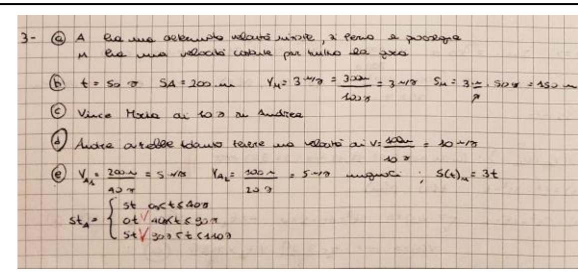
2a, 2b corretti

2c: non calcola la velocità media ma la media delle velocità.

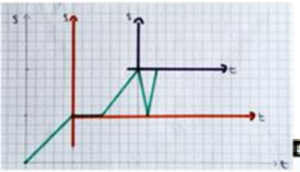
Esercizio 3 corretti tranne 3e

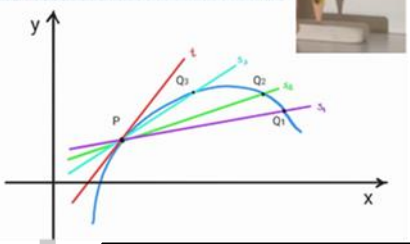


3e: nell'equazione del moto di Andrea non è corretta l'ordinata all'origine dell'ultima retta



3e: nell'equazione del moto di Andrea manca l'ordinata all'origine delle rette.

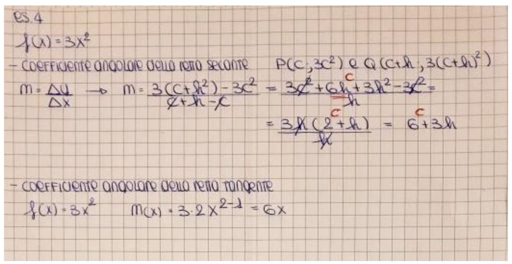




svolgimento della verifica scritta
esercizi 4 e 5

Esercizio 4

impostato correttamente, c'è un errore di calcolo



ES 4

$f(x)=3x^2$

– coefficiente angolare della retta secante P(c;3c²) e Q(c+h;3(c+h)²)

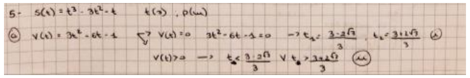
$m=\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow m=\frac{3(c+h)^2-3c^2}{c+h-c} = \dots = \frac{3h(2c+h)}{h} = 6c+3h$

– coefficiente angolare della retta tangente

$f(x)=3x^2 \quad m(x)=3\cdot 2x^{2-1}=6x$

Esercizio 5

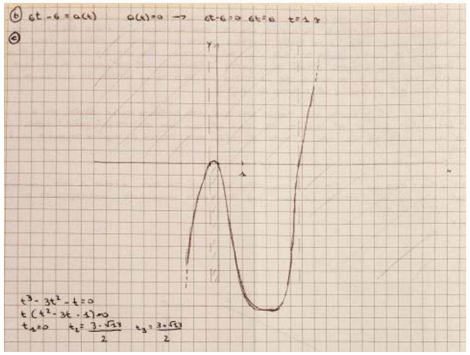
corretto, manca la descrizione del moto (5c)



5- $s(t)=t^3-3t^2-t$ t(s), p(m)

(a) $v(t)=3t^2-6t-1$ $v(t)=0$ $3t^2-6t-1=0 \rightarrow t_1=\frac{3-2\sqrt{3}}{3}$, $t_2=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ (i)

$v(t)>0 \rightarrow t<\frac{3-2\sqrt{3}}{3} \vee t>\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$ (ii)



(b) $6t-6=a(t)$ $a(t)=0 \rightarrow 6t-6=0$ $6t=6$ $t=1$ s

(c)

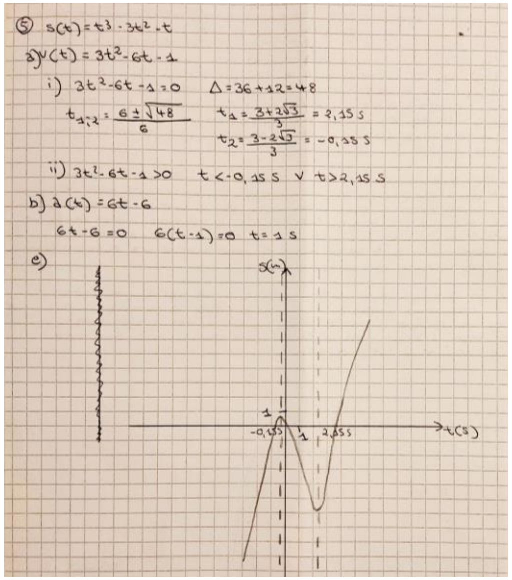
$t^3-3t^2-t=0$

$t(t^2-3t-1)=0$

$t_0=0$ $t_1=\frac{3-\sqrt{13}}{2}$ $t_2=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$

Esercizio 5

Corretto



(5) $s(t)=t^3-3t^2-t$

a) $v(t)=3t^2-6t-1$

i) $3t^2-6t-1=0$ $\Delta=36+12=48$

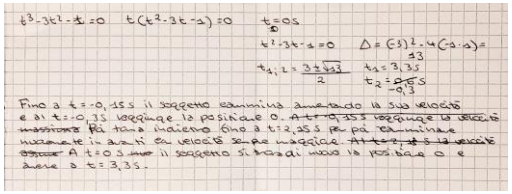
$t_{1;2}=\frac{6\pm\sqrt{48}}{6}$ $t_1=\frac{3+2\sqrt{3}}{3}=2,15$ s $t_2=\frac{3-2\sqrt{3}}{3}=-0,15$ s

ii) $3t^2-6t-1>0$ $t<-0,15$ s $\vee$ $t>2,15$ s

b) $a(t)=6t-6$

$6t-6=0$ $6(t-1)=0$ $t=1$ s

c)



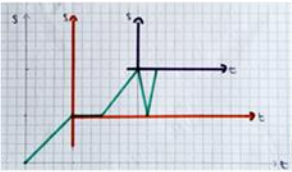
$t^3-3t^2-t=0$ $t(t^2-3t-1)=0$ $t_0=0$ s

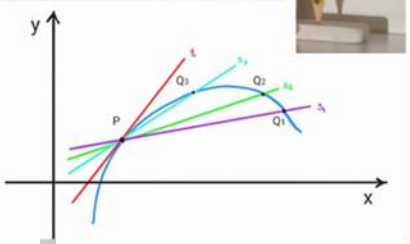
$t^2-3t-1=0$ $\Delta=(-3)^2-4(-1\cdot 1)=13$

$t_{1;2}=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ $t_1=3,3$ s $t_2=-0,3$ s

Fino a t = -0,15 s il soggetto cammina aumentando la sua velocità e al t=-0,3 s raggiunge la posizione 0. ~~A t=-0,15 s raggiunge la velocità massima~~ Poi torna indietro fino a t=2,15 s per poi camminare nuovamente in avanti con velocità sempre maggiore. ~~At t=2,15 s la velocità assume~~ A t=0 s il soggetto si trova di nuovo in posizione 0 e anche a t=3,3 s.

Tutti gli studenti hanno affrontato l'esercizio 5 e hanno risolto correttamente 5a e 5b. Non tutti sono riusciti a disegnare correttamente il grafico della funzione per gli errori commessi nello studio del segno.

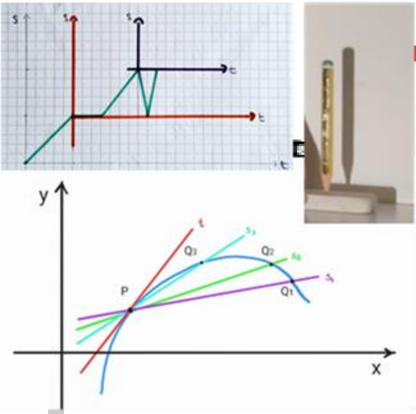




risultati ottenuti

Al termine del percorso gli studenti, se pur con livelli diversi:

- descrivono qualitativamente un fenomeno e ne tracciano il grafico, valutandone in modo intuitivo la rapidità di variazione;
- applicano correttamente le regole di derivazione e interpretano il significato dei valori trovati per una descrizione quantitativa della variazione di una grandezza;
- applicano consapevolmente il calcolo differenziale per analizzare il moto di cui è nota l’equazione oraria di tipo polinomiale, determinando gli istanti in cui la velocità e l’accelerazione si annullano e gli intervalli di tempo in cui esse sono positive o negative;
- individuano correttamente i punti di minimo e di massimo relativi e gli intervalli in cui è crescente o decrescente una funzione polinomiale; tuttavia solo alcuni riescono a utilizzare le informazioni ottenute per disegnare il grafico.



valutazione dell’efficacia del percorso didattico sperimentato

La modalità di lavoro utilizzata ha consentito agli studenti:

- di avere un confronto continuo con i compagni e con l’insegnante e ciò ha portato ad acquisire con maggiore sicurezza e senso critico la relazione tra rapidità di variazione e il calcolo differenziale;
- di comprendere meglio e di rendere naturale l’utilizzo di questo strumento matematico per risolvere problemi relativi alla cinematica e alla dinamica, per determinare la velocità e l’accelerazione istantanee.

Anticipare alla classe terza il calcolo differenziale permette nella futura classe quinta:

- di gettare le basi per un successivo sviluppo del concetto di limite;
- di ottimizzare i tempi relativamente allo studio di funzione.