



Equilibri 2.0: pesare simboli nell'era digitale

Grado scolastico: scuola secondaria di 1° grado

Area disciplinare: matematica

IC Nord - E. Fermi (Prato)

Docenti coinvolti: Prof.ssa Laura Finocchi

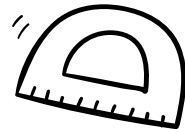
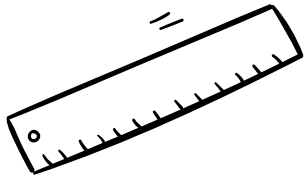
Breve riassunto del percorso

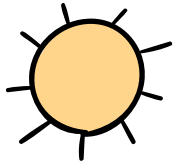


Questa sperimentazione trae origine dalla presentazione del progetto DynaMat, curato dai ricercatori del centro di ricerca CARME di Pistoia, e dal prezioso confronto con i formatori LSS. E' stato condotto nell'arco di due anni (2024 - 2026). Nel primo anno scolastico è stata proposta un'attività solo sulle bilance virtuali, nel secondo l'esperienza al computer è stata fatta precedere da un lavoro con le bilance fisiche.

Evoluzione del percorso:

- Fase Fisica: Esplorazione libera del concetto di uguaglianza, inteso come equilibrio, tramite l'uso di una bilancia a piatti.
- Fase Virtuale: Attività di *problem solving* su Desmos. Gli studenti applicano strategie di scomposizione e semplificazione di bilance virtuali per determinare valori incogniti.
- Sganciamento e Generalizzazione: Superamento definitivo dell'artefatto visivo per passare a casi matematici non più modellizzabili con la bilancia (es. equazioni con soluzioni negative o frazionarie) e alla generalizzazione formale.





Classi e tempi del percorso

Il percorso per entrambi gli anni scolastici si è svolto a cavallo tra il primo e il secondo quadrimestre della classe 3° della Scuola Secondaria di Primo Grado.

Il tempo previsto è stato di circa un mese per la sperimentazione con le bilance (ca. 3h bilancia a piatti e c. 5h bilance virtuali) e di un mese successivo per lo sganciamento (8h circa); la generalizzazione formale, tuttavia, è rimasta come sfondo integratore per tutto il resto dell'anno scolastico.

Materiali e ambienti



Ambienti di sviluppo:

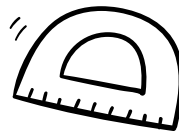
- **Aula scolastica:** Utilizzata per le fasi di esplorazione con l'artefatto fisico, per i lavori di gruppo e per le discussioni matematiche collettive.
- **Laboratorio di informatica:** Utilizzato per l'interazione individuale e il confronto sulle attività digitali.

Materiali e strumenti impiegati:

- Bilancia fisica a due piatti con pesi e oggetti vari.
- Computer con accesso all'ambiente online *Amplify Desmos* (artefatti Progetto DynaMat).
- Quaderno cartaceo personale e file digitali di documentazione.



Approccio metodologico



Fase iniziale (Fisica): Esplorazione libera e diretta sulla bilancia a bracci. Gli studenti hanno lavorato individualmente, trascrivendo sul proprio quaderno le risposte agli stimoli forniti e rappresentando graficamente le situazioni di equilibrio osservate. Condivisione in classe delle proposte/risposte trovate dai singoli.

Fase digitale (Desmos): Lavoro autonomo al computer in cui ogni studente ha documentato le proprie strategie di risoluzione delle bilance virtuali su un prodotto a scelta (cartaceo sul quaderno o digitale su Documenti Google).

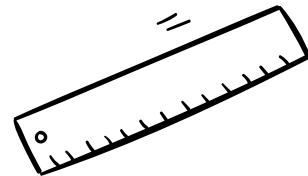
Orchestrazione della discussione e feedback:

- *Discussioni collettive in tempo reale:* Gestite durante le sessioni su Desmos proiettando e commentando insieme gli screenshot degli errori o delle strategie più interessanti catturati dalla piattaforma.
- *Analisi a posteriori e criteri d'azione:* L'insegnante ha raccolto le diverse proposte di risoluzione degli alunni per analizzarle in classe. La discussione è servita ad individuare strategie, difficoltà e trascrizioni più o meno chiare.
- *Costruzione dei criteri condivisi:* Una volta definiti i criteri di azione per bilanciare i piatti, gli studenti riprendono il lavoro autonomo di trascrizione. Le proposte vengono poi messe in comune per arrivare a una sintesi condivisa dei criteri e delle diverse casistiche (bilanciamenti sempre possibili, impossibili o determinati da un valore preciso del peso incognito).

Fasi di generalizzazione: Gestite attraverso il lavoro in piccoli gruppi eterogenei per favorire il confronto tra pari, seguito da una condivisione e validazione finale con l'intera classe.



Continuità e curriculum verticale



L'introduzione di questo percorso nelle mie classi è stata guidata da una precisa scelta metodologica: l'attività, infatti, si inserisce in una programmazione pluriennale già fortemente improntata all'approccio strutturale del Progetto ARAL. Avendo gli studenti già familiarizzato negli anni precedenti con i concetti di incognita e variabile, il percorso ha trovato un terreno concettuale ideale su cui svilupparsi.

Il percorso strutturato di pre-algebra iniziato a partire dalla classe prima si è sviluppato in modo periodico e ricorrente negli anni attraverso:

- Lavoro sistematico sul concetto di numero (canonico e non canonico) e sulle proprietà delle operazioni come strutture.
- Introduzione precoce della lettera con la doppia valenza di "incognita" e di "variabile".
- Attività ricorrenti sulle successioni per favorire la generalizzazione e il pensiero relazionale.



Obiettivi essenziali di apprendimento

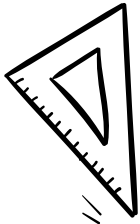


Traguardi per lo sviluppo delle competenze:

- L'alunno utilizza il linguaggio matematico formale per modellizzare e risolvere situazioni problematiche.
- Riconosce e risolve problemi in contesti diversi, valutando le informazioni, ipotizzando strategie e confrontando le soluzioni con i pari.
- Sviluppa un approccio flessibile e relazionale al concetto di uguaglianza, superando la visione puramente procedurale del calcolo.

Obiettivi specifici di apprendimento (Abilità e Conoscenze):

- Comprendere e utilizzare il concetto di uguaglianza inteso come equivalenza e bilanciamento tra due membri.
- Tradurre una situazione di equilibrio reale o iconica (modello bilancia) in una rappresentazione simbolico-algebrica.
- Esplorare, scoprire e applicare (mediante scomposizione e semplificazione dei piatti) le proprietà invariantive delle equazioni.
- Sganciarsi progressivamente dal vincolo visivo della bilancia per estendere le regole apprese a casi non modellizzabili (es. equazioni con soluzioni negative o frazionarie).



Risorse e riferimenti scientifici

Materiali fisici: Per le attività di esplorazione concreta sono stati utilizzati strumenti e pesi appartenenti al laboratorio scientifico interno dell'Istituto.



Risorse digitali e Artefatti: Gli strumenti virtuali interattivi e le sequenze didattiche utilizzate sulla piattaforma Amplify Desmos

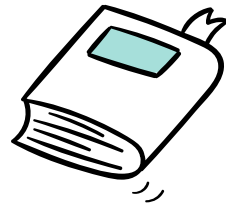
sono risorse ad accesso pubblico rese disponibili dal progetto DynaMat realizzato dalle Università di Pisa e di Firenze presso il centro di ricerca CARME di Pistoia per la progettazione scientifica degli artefatti digitali, volti a

favorire un approccio dinamico e inclusivo alla matematica.

<https://www.carme.center/risorse-dynamat/>



Breve presentazione ambiente Amplify Desmos



ACCESSO: L'insegnante accede ad Amplify Desmos Classroom con il proprio account personale o istituzionale. Dopo aver selezionato un'attività tra le risorse pubbliche di DynaMat in Desmos, avvia una nuova sessione: il sistema genera automaticamente un link di invito e un codice classe da condividere con gli studenti. Non è necessario creare un account per ogni alunno. Se la scuola utilizza Google Classroom, è inoltre possibile importare direttamente le proprie classi, rendendo ancora più semplice l'accesso alle attività.

CONNESSIONE STUDENTI: Gli studenti possono entrare nella lezione:

- tramite il link condiviso su Google Classroom;
- attraverso un link inviato via e-mail o pubblicato in altri ambienti digitali;
- inserendo il codice classe nella pagina di accesso di Amplify Desmos Classroom.

L'accesso è quindi rapido e non richiede procedure di registrazione individuali.

Breve presentazione ambiente Amplify Desmos

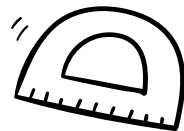
DURANTE L'ATTIVITA'-: Gli studenti lavorano in autonomia seguendo il percorso proposto nelle diverse schermate dell'attività. Ogni risposta viene registrata in tempo reale e resa visibile all'insegnante attraverso una dashboard dedicata.

La dashboard permette di monitorare costantemente l'andamento della classe: è possibile vedere in quale schermata si trova ciascuno studente, osservare le risposte mentre vengono costruite, individuare eventuali difficoltà e comprendere quali strategie stanno emergendo. In questo modo l'insegnante può decidere se intervenire con un suggerimento individuale oppure interrompere momentaneamente il lavoro per proporre una riflessione collettiva.

Per tutelare la partecipazione di tutti, gli studenti possono essere identificati da nickname assegnati automaticamente dal sistema. Questo consente di condividere esempi di soluzioni, errori o strategie senza esporre direttamente il singolo alunno.

Tra le funzionalità più utili vi è la possibilità di selezionare alcune risposte della classe e proiettarle per discuterle insieme. L'insegnante può confrontare strategie diverse, valorizzare procedimenti efficaci, analizzare errori significativi e guidare gli studenti nella costruzione condivisa dei concetti matematici. È inoltre possibile salvare schermate o raccogliere esempi particolarmente interessanti da utilizzare durante la discussione o in lezioni successive.

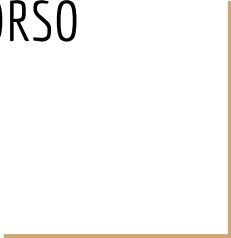
In qualsiasi momento l'attività può essere messa in pausa: tutti gli studenti vengono temporaneamente bloccati sulla schermata corrente, permettendo di richiamare l'attenzione della classe, fornire chiarimenti, rilanciare una domanda o condividere una soluzione particolarmente significativa.





LA BILANCIA FISICA

SVILUPPO DEL PERCORSO



La bilancia fisica

Prima di passare all'astrattezza dei simboli e alla perfezione del software, abbiamo messo sul tavolo una vera bilancia a due piatti.

L'obiettivo è far sperimentare l'uguaglianza con le mani, legandola all'esperienza visiva e motoria dell'equilibrio statico.

È una fase "sporca", fatta di tentativi, linguaggi inventati dai ragazzi per descrivere i pesi incogniti e prime inevitabili collisioni con i limiti fisici dello strumento (attriti, taratura imperfetta).



La bilancia fisica - modalità di lavoro

La bilancia era una sola per tutta la classe.

I ragazzi, rimanendo ai propri posti, sceglievano quale bilanciamento provare; poi uno di loro si alzava per metterlo in pratica.

Se il bilanciamento non funzionava, si alzava chi aveva una nuova proposta e andava a modificare la disposizione sulla bilancia. Quando ritenevamo di aver raggiunto un bilanciamento, oppure osservavamo un mancato bilanciamento che ci aspettavamo si verificasse, ci fermavamo per trascrivere tutto sul quaderno.

La bilancia fisica

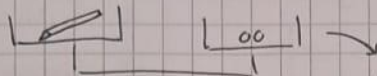
Esplorazione libera: cerchiamo l'equilibrio tra i piatti, mettendo oggetti da pesare sulla bilancia.

ESPERIENZE CON LA BILANCIA A PIATTI

Facciamo prove di equilibrio:

Situazione ①

Abbiamo provato a mettere un lapis e dei pesi
ma non troviamo l'equilibrio.

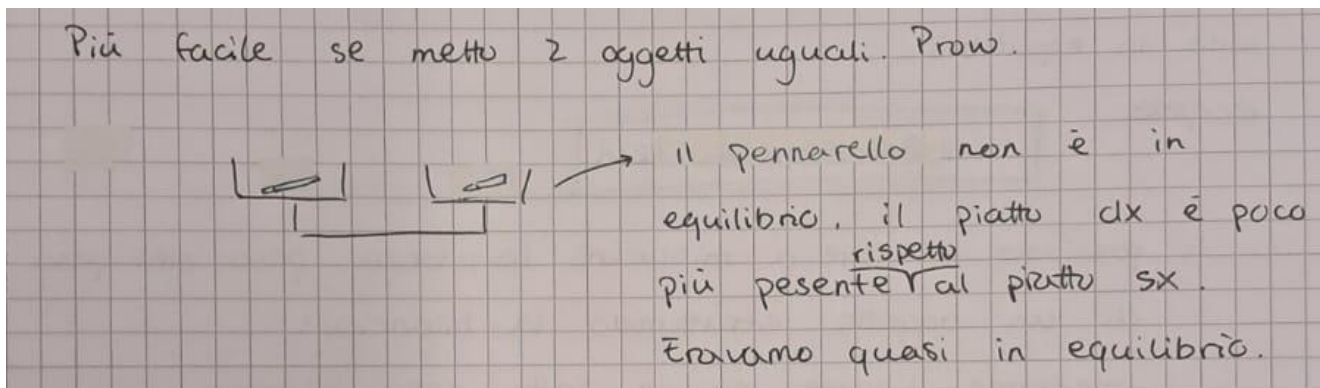
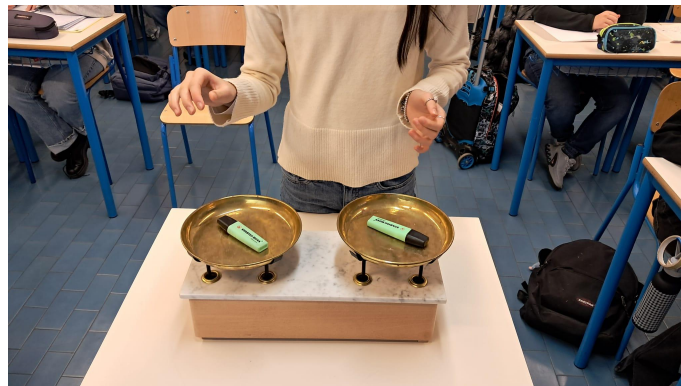


con i pesi (piatto dx) non
troviamo l'equilibrio

Aumento i pesi anche ~~per~~
a sx ma è difficile

La bilancia fisica

Scopriamo che dobbiamo lavorare anche per approssimazione. Nella realtà non è detto che oggetti uguali abbiano esattamente lo stesso peso.

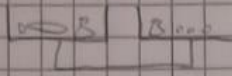


La bilancia fisica → verso il 1° principio

Durante l'esplorazione libera i ragazzi osservano che, una volta trovato l'equilibrio (anche approssimato), questo si mantiene se ai piatti vengono aggiunti o tolti pesi identici.

Non che la facciamo di fare un equilibrio perfetto, ma ci siamo quasi.

situazione 1



Se + un po' di peso in i pesa troppo e quindi quando + in un'altra pesa quella di più.

$P + 10g = 10g + 3g$
 $P = 3g$

↓ ↓
palloncino 10g
+ 10g + 1
 + 1
 + 1

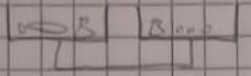
Secondo noi, si può togliere pesi da 10g da tutte due i piatti, così rimarrà uguale, perché se tolgo

La bilancia fisica → verso il 1° principio

Osserviamo inoltre come il simbolo "=" che spesso gli alunni vedono come un "fa...", cioè un tasto del calcolatore che dà un risultato, qui abbia il significato di "pesa quanto...", indicando quindi una relazione di simmetria tra due piatti.

Non cioè la facciamo a fare un equilibrio perfetto, ma ci siamo quasi.

situazione 1



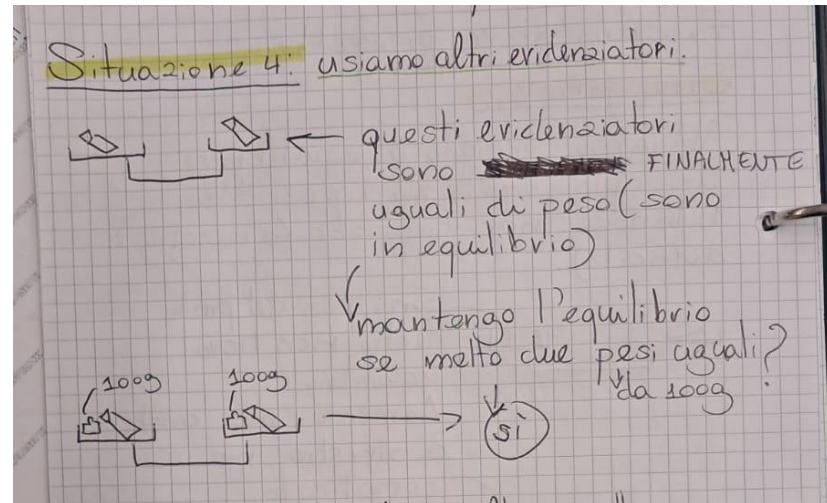
Se + un po' di peso in i pesa troppo e quindi quando + in un'altra pesa quella di più.

$$P + 10g = 10g + 3g$$
$$P = 3g$$

Secondo noi, si può togliere pesi da 10g da tutte due i piatti, così rimarrà uguale, perché se tolgo

La bilancia fisica $\rightarrow$ verso il 1° principio

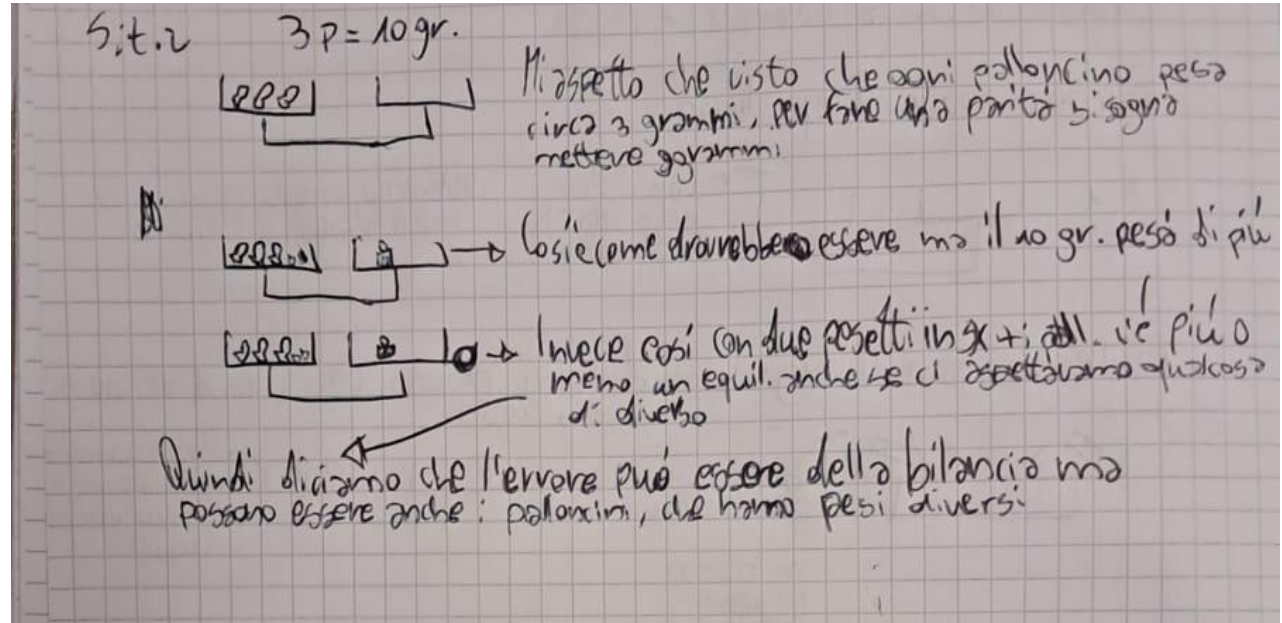
Ancora osservazioni libere
tutte orientate verso il
mantenimento
dell'equilibrio a seguito di
aggiunte di peso.



La bilancia fisica → verso il 2° principio

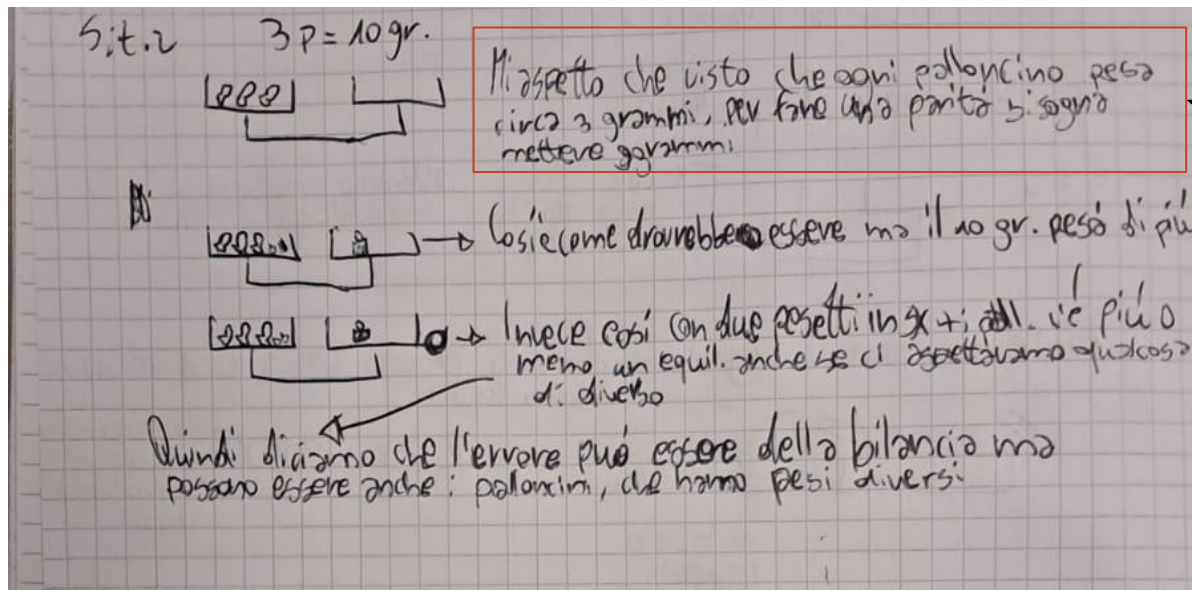
Durante l'esplorazione libera, uno studente riesce a trovare un equilibrio utilizzando, tra i vari oggetti, un palloncino posto su uno dei due piatti.

Ci chiediamo se possiamo dedurre da questo quanto peseranno 3 palloncini.



La bilancia fisica → verso il 2° principio

Si osservano in questo ragionamento i primi albori del 2° principio



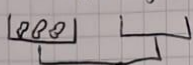
$$3p = 10 \text{ gr}$$

Mi aspetto che visto che ogni palloncino pesa circa 3 grammi, per fare una parità bisogna mettere 9 grammi

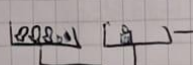
La bilancia fisica → verso il 2° principio

Anche con in questo caso ci scontriamo con i limiti della realtà: le imperfezioni degli oggetti e la taratura della bilancia impongono ai ragazzi approssimazioni nella misura.

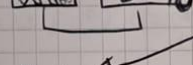
5.it.2 $3P = 10\text{gr.}$



Aspetto che visto che ogni palloncino pesa circa 3 grammi, per fare una parita si sono mettere grammi.



Così come dovrebbe essere ma il 10 gr. pesa di più

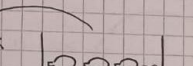


Invece così con due pesetti in più a sx + i pall. è più o meno in equilibrio anche se ci aspettiamo qualcosa di diverso

Quindi diciamo che l'errore può essere della bilancia ma possono essere anche i palloncini, che hanno pesi diversi

Così è come dovrebbe essere, ma il 10 grammi pesa di più, invece così con due pesetti in più a sx + i pall. è più o meno in equilibrio anche se ci aspettiamo qualcosa di diverso.

Quindi diciamo che l'errore è della bilancia, ma possono essere anche i palloncini che hanno pesi diversi



3 palloncini e 2 pesi da 1g

peso da 10g

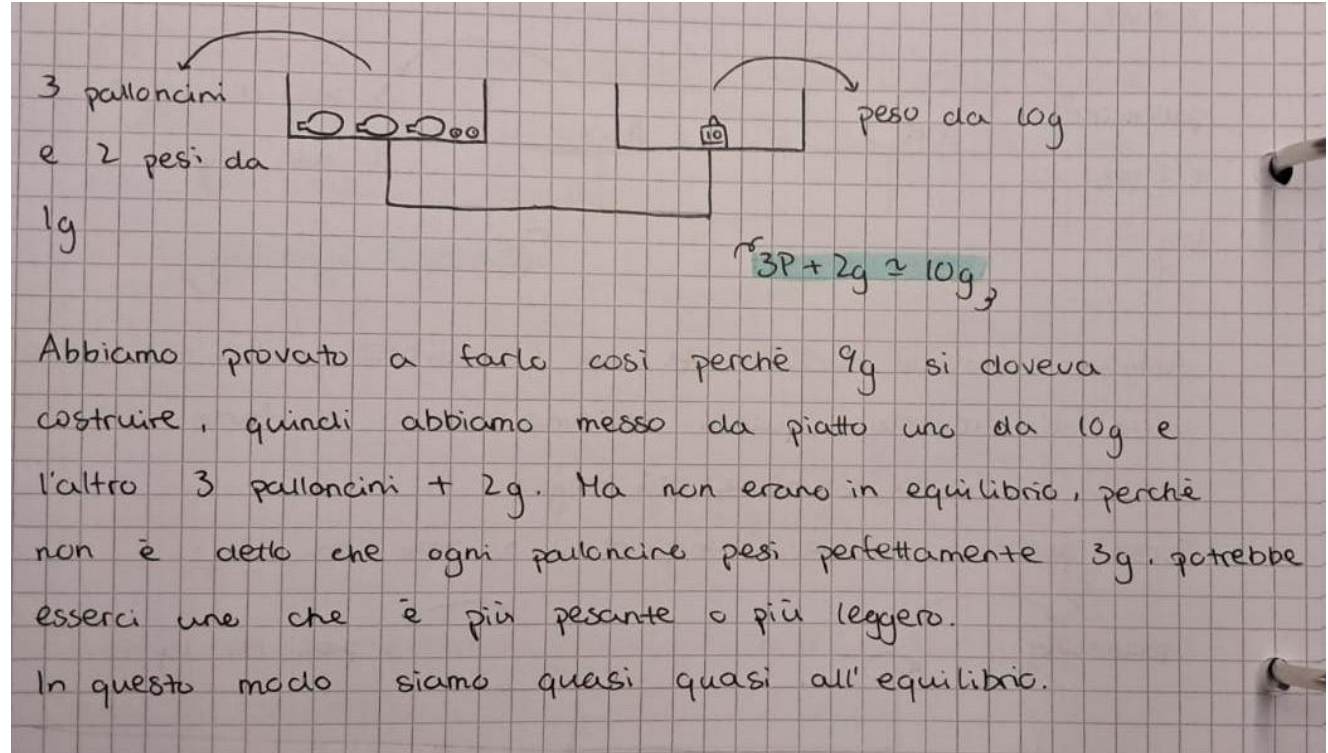
$3P + 2g \approx 10g$

Abbiamo provato a farlo così perché 9g si doveva costruire, quindi abbiamo messo da piatto una da 10g e l'altro 3 palloncini + 2g. Ma non erano in equilibrio, perché non è detto che ogni palloncino pesi perfettamente 3g. potrebbe esserci uno che è più pesante o più leggero. In questo modo siamo quasi quasi all'equilibrio.

Abbiamo provato a farlo così perché 9g si doveva costruire, quindi abbiamo messo da piatto una da 10g e l'altro 3 palloncini + 2g.

Ma non erano in equilibrio, perché non è detto che ogni palloncino pesi perfettamente 3g

La bilancia fisica, osservazioni



Si osserva un utilizzo spontaneo del primo principio per costruire il valore dei palloncini.

La bilancia fisica, osservazioni e lavori paralleli

Situazione 5: prendiamo altri oggetti.

1 siringa 1g 4 pesetti + 1 pallina

→ usare questo strumento è difficile perché sembrano uguali, ma le lancette dicono che quella a SX (con la siringa) pesa di più.

$1s = 3p + 4pesetti$

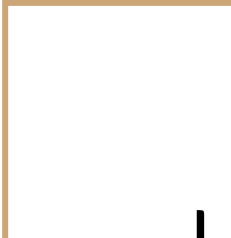
allora abbiamo aggiunto altre due palline di polistirolo.

$1s = 3x + 4y$

$s = \text{siringa}$
 $x = \text{palline}$ $y = \text{pesetti}$

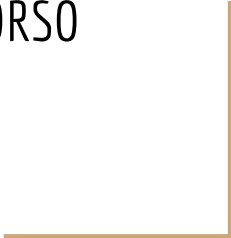
Nel cercare di descrivere le situazioni esplorate i ragazzi utilizzano anche le variabili, ma in modo improprio. E' importante osservare l'utilizzo che i ragazzi fanno delle variabili per poter affrontare momenti di riflessione e porre attenzione alle attività successive.

Contemporaneamente a questo percorso vengono affrontati problemi sulle successioni (tipologia di esercizi già incontrati negli anni) per riflettere ancora sul significato della lettera.



LE BILANCE VIRTUALI

SVILUPPO DEL PERCORSO



Bilance virtuali

Le bilance virtuali sono disponibili in Desmos e sono state analizzate da un punto di vista epistemologico, cognitivo e didattico dal team di ricercatori del progetto Dynamat (responsabile del progetto: A. Baccaglini-Frank; responsabile dell'unità di ricerca di Firenze: S. Antonini)

<https://www.carme.center/progetto-dynamat/>

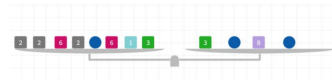
Il progetto “Dynamic Math for Inclusive Education” (DynaMat) affronta il tema delle difficoltà di apprendimento in matematica nella scuola secondaria di secondo grado, con il duplice obiettivo di (1) individuare profili multidimensionali di apprendimento matematico, tenendo conto c
e sperimentare attività matematiche inclusive con artefatti digitali.

RISORSE: <https://www.carme.center/risorse-dynamat/>

Sequenza di attività in DESMOS con “Bilancia a due piatti”

In questa breve sequenza di attività si possono esplorare una serie di bilance a due piatti contenenti oggetti dal peso noto o non noto.

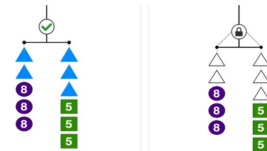
[Visualizza in DESMOS](#)



Sequenza di attività in DESMOS con “Bilancia a gancio”

In questa breve sequenza di attività si possono esplorare una serie di bilance a gancio contenenti oggetti dal peso noto o non noto.

[Visualizza in DESMOS](#)



Bilance virtuali a piatti

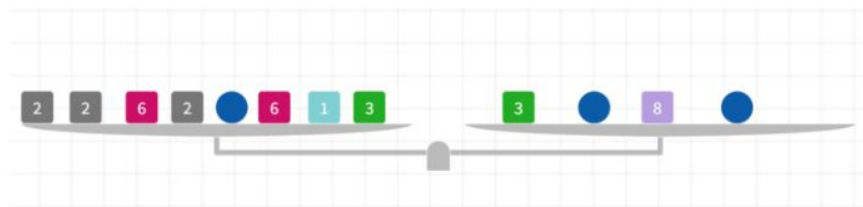
Iniziamo con una sequenza di attività in DESMOS con “Bilancia a due piatti”

<https://www.carme.center/risorse-dynamat/>

Sequenza di attività in DESMOS con “Bilancia a due piatti”

In questa breve sequenza di attività si possono esplorare una serie di bilance a due piatti contenenti oggetti dal peso noto o non noto.

Visualizza in DESMOS



Bilance virtuali a piatti, modalità di lavoro

Gli studenti lavoreranno in aula informatica. Ognuno potrà utilizzare il proprio computer e confrontarsi con i compagni per collaborare durante l'attività.

Al termine, ciascuno dovrà consegnare una documentazione personale del lavoro svolto, scegliendo una delle seguenti modalità:

- scrivere sul quaderno e consegnarlo alla docente in formato cartaceo;
- scrivere sul quaderno, scannerizzare le pagine e caricarle su Classroom;
- realizzare direttamente un documento Google, includendo testo e screenshot del lavoro svolto sulle slide, e consegnarlo su Classroom.

Bilance virtuali a piatti, breve descrizione

Nello studio di bilance a piatti sono proposte complessivamente 15 slide che ho suddiviso in questo modo e per le quali documenterò le risposte per gruppi di slide:

Slide	Gruppo	Cosa viene chiesto
Da 1 a 6	Osservare, descrivere e dedurre	Osservare la situazione, annotare ciò che si vede e agire direttamente sulla bilancia per affrontare le prime incognite, passando così dalle identità alle equazioni.
Da 7 a 8	Interpretare	Trovare il valore di un peso incognito agendo direttamente sulla bilancia
Da 9 a 12	Generalizzare	Individuare l'incognita, descrivendo la strategia logica che si intende adottare per trovarla
Da 13 a 15	Applicare e riflettere	Applicare le competenze acquisite per risolvere problemi non convenzionali e argomentare le proprie strategie, anche in assenza di supporti visivi o partendo da disuguaglianze



Slide da 1 a 6

Osservare la situazione, annotare ciò che si vede e agire direttamente sulla bilancia per affrontare le prime incognite, passando così dalle identità alle equazioni.

(Vengono riportate alcune tra le slide proposte)

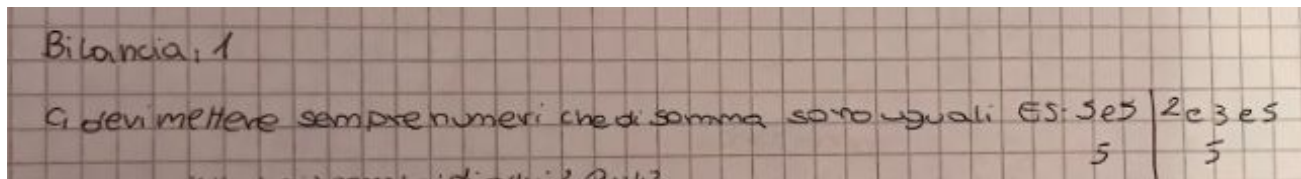


Slide 1 →

Partiamo da una simulazione della bilancia fisica e dell'attività fatta in classe.

I ragazzi discutono su come costruire identità e come muoversi per aggiungere pesi sui piatti.

Hai a disposizione gli oggetti nella scatola blu. Se possibile, metti alcuni di questi oggetti sui piatti della bilancia in modo che sia in equilibrio. Se non è possibile, spiega perché.



Ho aggiunto a destra un 9 e ho sinistra 7 e 2, perchè la loro somma fa 9

esercizio 1:

i oggetti della scatola blu fanno totale 50 quindi diviso 2 fanno 25 quindi se metti 25 su un piato ed un altro piato la bilancia esce uguale

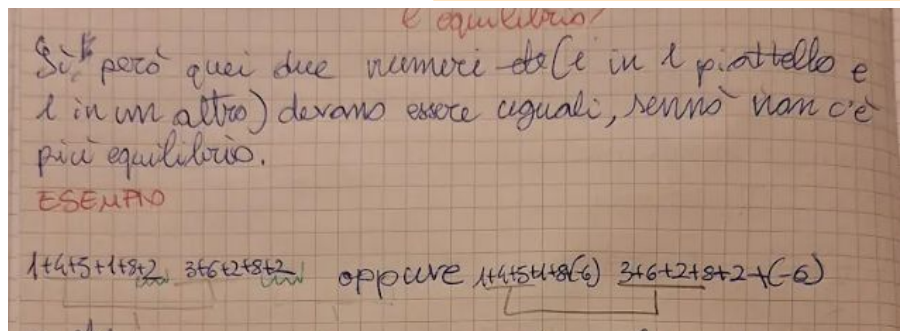
$$6+3+9+5+2 = 25 = 5+5+7+8$$

Slide 2 →

Osservazioni sulla
necessità di
aggiungere quantità
uguali sui due piatti.



La bilancia che vedi è in equilibrio. Se possibile, aggiungi 2 oggetti tra quelli a disposizione in modo che alla fine sia ancora in equilibrio. Se non è possibile, spiega perché.



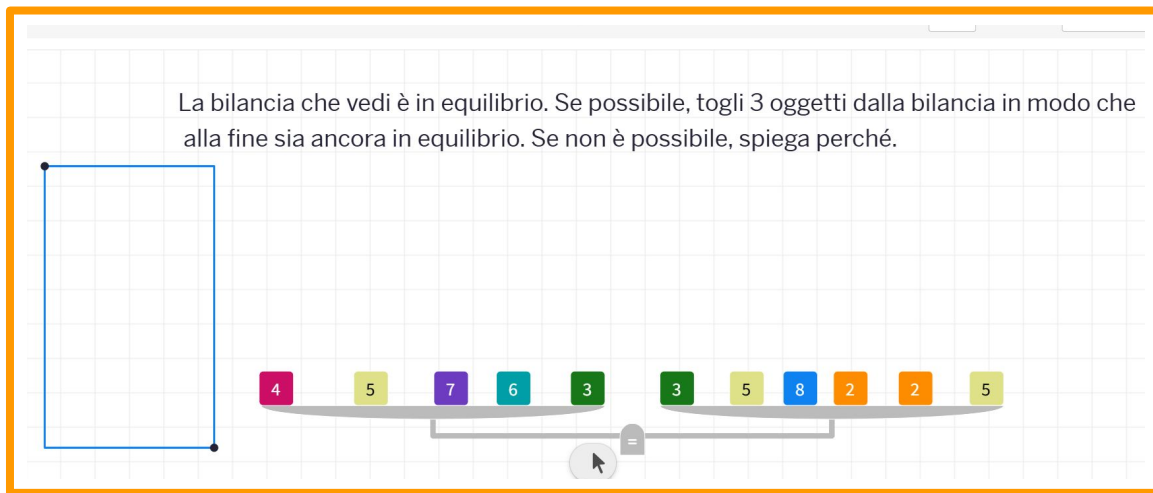
esercizio 2: l'esercizio dice che la bilancia è in equilibrio e che devo aggiungere due oggetti ed la bilancia deve essere in equilibrio ho aggiunto due oggetti di stesso numero

ragazzo
con
disabilità

"Ho sommato i numeri sulle bilance: nella prima ce ne sono 11 e nell'altra 11. Poi ho cercato nel box i numeri che se li avessi sommati al numero 11 mi sarebbero venuti uguali. Così ho messo il numero 7 in ognuna."

Slide 3 →

Osservazioni sulla necessità di togliere lo stesso peso dai due piatti per mantenere l'equilibrio.



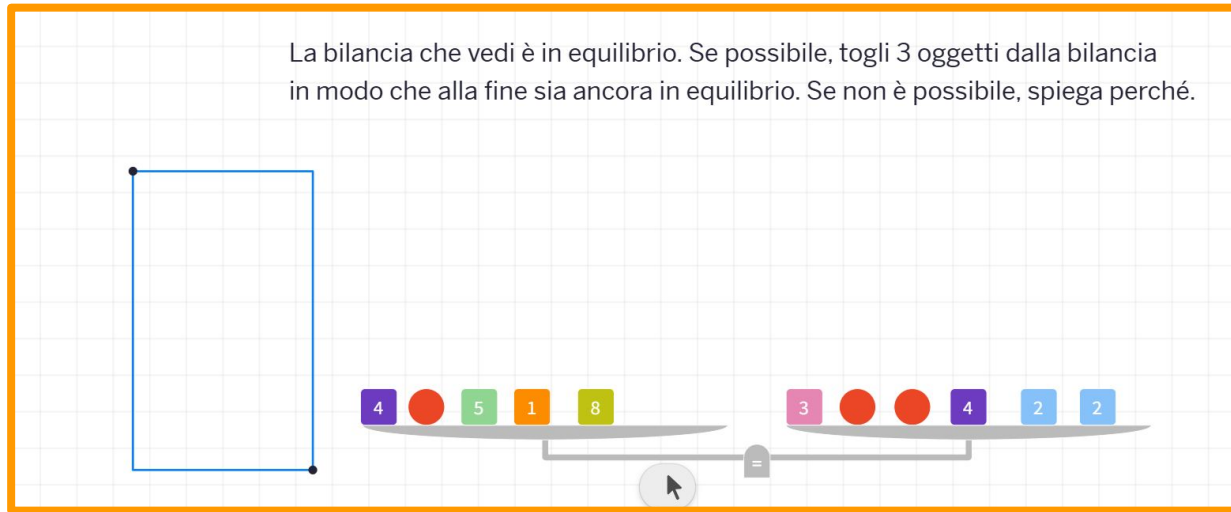
3) Basta togliere la stessa quantità da ogni parte
me 8 e la sua somma cioè 15+3
4) Basta togliere...

Da una parte si toglie due cubi, la somma di questi due cubi deve essere uguale a quella tolta dell'altra parte

4, 5, 7, 6, 3
3, 5, 8, 2, 2, 5

Slide 5 →

Comparsa della prima incognita, ricerca dell'equilibrio. La maggior parte dei ragazzi non percepisce nessuna variazione di movimento dovuta al fatto di avere un peso non conosciuto.



5 POSSIBILE PK DAL 1° PIATTO TOLGO 4 e DAL 2°
TOLGO 2 CUBETTI DA 2

In questo caso ho tolto 2 pesetti da un piatto che valgono entrambi 2 e nell'altro ho tolto 1 dall'altra parte ho tolto che vale 4 e quindi equivale agli altri due ($2+2=4$)

Anche se non so il peso delle palle, ma sono già equilibrate quindi posso anche solo spostare quello che so di già

Slide 5

I ragazzi con maggiori difficoltà avvertono la necessità di individuare il valore della parte incognita per comprendere come mantenere l'equilibrio della bilancia. Dal confronto orale e scritto emerge che sono giunti alla soluzione attraverso tentativi successivi: collocavano l'incognita su un piatto e provavano diverse combinazioni di pesetti sull'altro fino a raggiungere l'equilibrio.

Queste risposte sono state proiettate insieme ad altre di slide successive per discutere insieme di questa strategia e del ragionamento.

Al termine del percorso, questa situazione ha offerto anche l'occasione per riflettere sui limiti del modello matematico: alcune operazioni sono possibili nel modello, ma non nello strumento matematico che esso rappresenta, e viceversa.

esercizio 5 : la bilancia è in equilibrio se e possibile togli 3 oggetti ed la bilancia deve essere in equilibrio (la pallina misura 7) ed tutte due piatti fanno totale di 25 quindi se togli 5 da quello di sinistra ed quello di destra togli 3 e 5 fatto

ragazzo
con
disabilità

La bilancia che vedi è in equilibrio. Se possibile, togli 3 oggetti dalla bilancia in modo che alla fine sia ancora in equilibrio. Se non è possibile, spiega perché.

tolti i pesi 5, 3 e 2

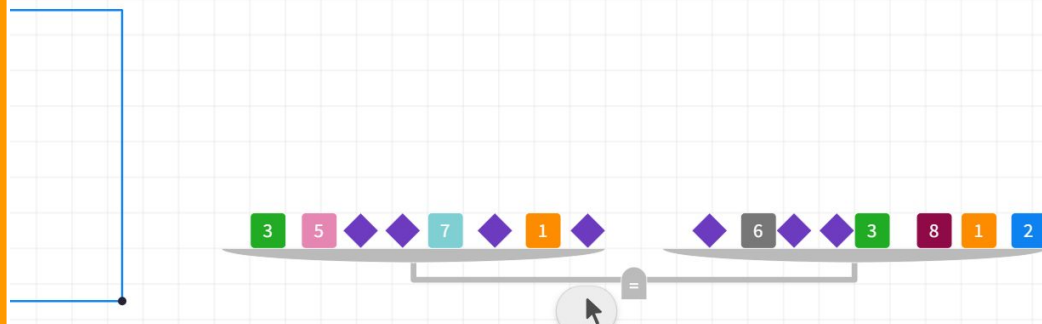
es5
è possibile togliere 3 cose dalla bilancia lasciandola in equilibrio bastava solo capire quanto era il peso di un cerchio



Slide 6 →

In questo caso, tra gli elementi eliminati dai due piatti compaiono anche i mattoni incogniti. Questa scelta offre l'opportunità di avviare una discussione in classe, riprendendo e confrontando le affermazioni formulate da alcuni compagni nella situazione precedente e stabilire insieme le modalità con cui affrontare le richieste nelle slide successive

La bilancia che vedi è in equilibrio. Se possibile, toglì 5 oggetti dalla bilancia in modo che alla fine sia ancora in equilibrio. Se non è possibile, spiega perché.



SI, È POSSIBILE.
NOI SIAMO ANDATI A TENTARCI E ABBIAMO 1 QUADRATO DA UNA
PARTE E UN ALTRO QUADRATO ~~DA~~ DALL'ALTRA E POI
ABBIAMO TOLTO 3 DA UN PIATTO E LA SUA CORRISPONDENTE
SOMMA DELL'ALTRO (3+5)

In questo caso ho fatto in modo che ci siano due rombi da ogni parte, e poi facendo qualche calcolo, ho levato il 3 e l'1 cosicché ci fossero due rombi in ogni piatto e altri pesetti che sommati fanno 16.

Ese 6: devo scoprire quanto pesa la pallina facile metto tutto via tra piatti tranne una pallina ed inizio ad mettere oggetti ed pesa 8



Slide da 7 a 8

Trovare il valore di un peso incognito agendo direttamente sulla bilancia

(Vengono riportate alcune tra le slide proposte)



Slide 7 →

I ragazzi più fragili continuano ad essere affascinati dalle prove ripetute per determinare il peso della pallina, ma molti avviano risoluzioni sfruttando i principi di equivalenza sperimentati fino ad ora

La bilancia che vedi è in equilibrio. Riusciresti a scoprire quanto pesa una pallina blu?



Esercizio n 7

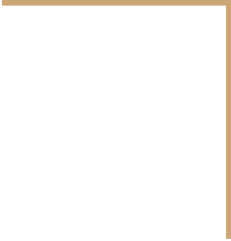
Ho tolto una pallina per piatto ed ho visto che i due erano bilanciati, e quindi ho fatto il calcolo del peso dei 2 piatti e quello a sinistra veniva 21 e quello a destra 11 quindi ho sottratto i due pesi e veniva dieci e la differenza dei due piatti era la pallina che adesso sappiamo che pesa 10.

- La pallina blu misura 11 perche mettendo 8 di peso e il 3 la bilancia si equilibra



Per scoprire quanto pesa una pallina blu ho tolto dal piatto di sinistra: 2,6,3 e una pallina blu, mentre dal piatto di destra ho tolto: 8,3 e una pallina blu, infatti 1 pallina blu= 1 pallina blu e $2+6+3=11$ è uguale a $8+3=11$. Dal piatto di destra mi rimane una pallina blu, in quello di sinistra mi rimane 11 ($2+2+6+1$), cioè il valore di una pallina blu.

Errore di conteggio ma ragionamento corretto



Slide da 9 a 12

Individuare l'incognita, descrivendo la strategia logica che si intende adottare per trovarla

(Vengono riportate alcune tra le slide proposte)



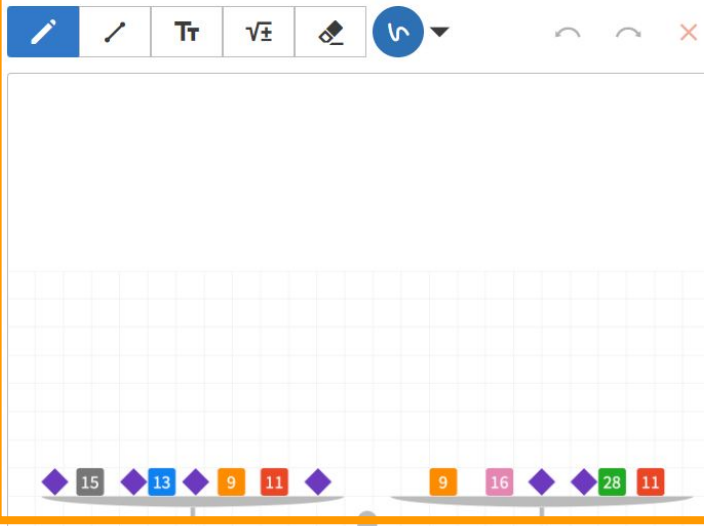
Slide 9 →

Non essendo più possibili i movimenti fisici dei mattoni, gli alunni sono costretti a fare riferimento ai ragionamenti sviluppati fino a quel momento e a mettere in atto una strategia per determinare il valore del peso incognito.

Le proposte vengono proiettate e discusse con la classe al fine di rilevare ragionamenti corretti e il motivo per cui altri non lo sono.

Riusciresti a scoprire quanto pesa un quadratino viola?

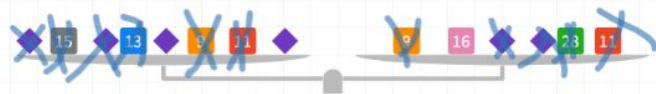
Attenzione: è solo un'immagine, quindi non potete muovere nulla, ma potete scrivervi sopra se vi aiuta.



-Piatto di sinistra-
Tolgo: 11, 15, 13, 9 e
2 quadratini viola.
 $11+15+13+9=48$

-Piatto di destra-
Tolgo: 9, 28, 11 e 2
quadratini viola.
 $9+28+11=48$

2 quadratini viola = 16:
cioè 1 quadratino viola
è uguale a 8.



Per me un quadratino misura 8 perché levando tutto tranne 16 nel piatto di destra e nel piatto di sinistra 2 quadratini si bilanciano quindi un quadratino equivale a 8

sommiamo tutti i numeri del primo piatto = $48 + 40$ mentre sul
secondo piatto $64 + 20$ poi $64 - 48 = 16$ $\frac{16}{2} = 8$

Slide 9

Qualche studente inizia ad utilizzare le variabili per indicare il peso incognito. Altri non usano la variabile ma costruiscono relazioni tra le parti della bilancia, inserendo un nome o un disegno a descrivere il peso incognito

$x = \text{quadrato viola}$

$$x + 15 + x + 13 + x + 9 + 11 + x = 9 + 16 + x + x + 28 + 11$$

tolgo le cose in comune e diventa

$$15 + 13 + x + x = 16 + 28$$

simplifico:

$$28 + x + x = 16 + 28$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

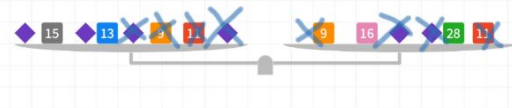
Un quadratino viola pesa 8



Incognita $\rightarrow x$

Incognita $\rightarrow$
quadrato

Adesso ho tolto tutti i numeri sulla bilancia a sinistra tranne le palline blu, poi ho tolto lo stesso numero alla bilancia a destra e mi rimaneva che 4 quadrati viola = 2 quadrati viola + 16. Quindi 2 quadrati = 16 e 1 quadrato = 8



$$2x + 15 + 13 = 16 + 28$$

$$2x + 28 = 44$$

$$2x = 16$$

$$x / 2 = 8$$

2 rombi sono uguali a 16 perchè 13 e 15 insieme è 28 che è uguale a 28 dall'altra parte

quadrato 9

$$\diamond + 15 + \diamond + 13 + \diamond + 9 + 11 + \diamond = 9 + 16 + \diamond + \diamond + 28 + 11$$

quanto pesa il quadratino viola?

tolgo 9 e 9, 15 + 13 e 28, 11 e 11,

rimane 16 e $\diamond, \diamond$

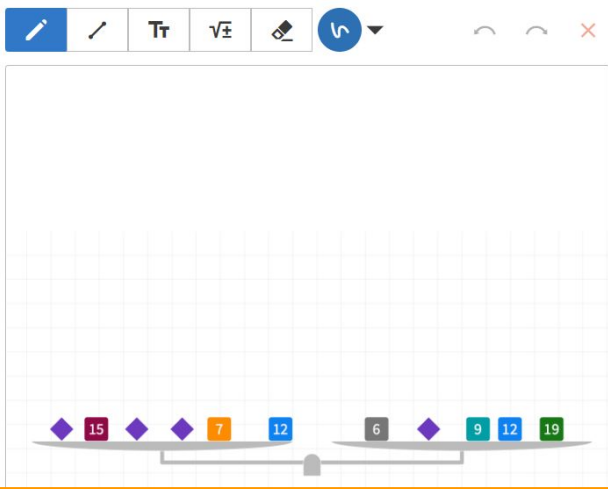
vale forse 16? $\frac{16}{2} = 8$

Slide 11 →

Anche in questa slide gli alunni applicano i criteri in modo spontaneo

Riusciresti a scoprire quanto pesa un quadratino viola?

Attenzione: è solo un'immagine, quindi non potete muovere nulla, ma potete scrivervi sopra se vi aiuta.



7 12 un quadartino 15

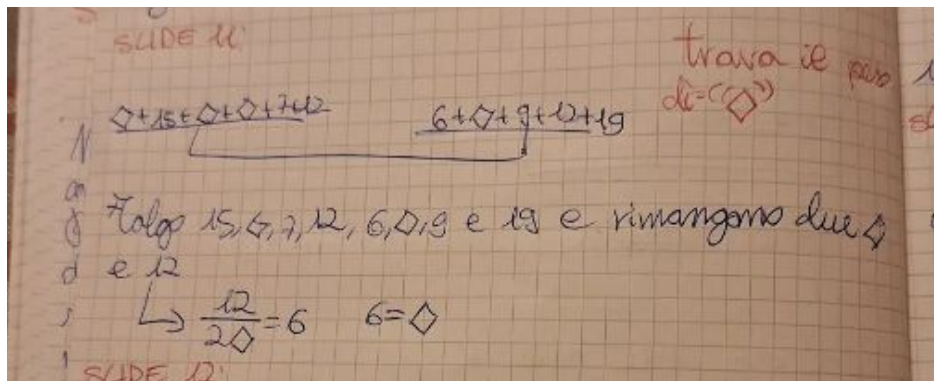
9 6 19 e un quadartin



$$2x = 12$$



$$x = 6$$



Slide 12 →

In questa slide il valore dell'incognita non è intero. Qualche alunno continua a lavorare sulle operazioni fra i numeri rimasti, altri affinano la scrittura e la trascrizione dei passaggi.

Riusciresti a scoprire quanto pesa un cerchio viola?

Attenzione: è solo un'immagine, quindi non potete muovere nulla, ma potete scriverci sopra se vi aiuta.

12) $x \cdot 6 + 6 = x \cdot 2 + 15$ HO NOTATO CHE SE C'È UNA MOLTIPLICAZIONE ES. $4x$ RETROJARDE IL VALORE DI x BISOGNA PER FORZA DIVIDERE IN BASE AL NUMERO DI x

$$4x + 6 = 15$$

$$4x = 6 - 15$$

$$x = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$15 - 6 = 9$$

$$9 : 4 = 2,25$$

$$6x + 6 = 2x + 15$$

$$4x = 9$$

$$x = \frac{9}{4}$$



Slide da 13 a 15

Applicare le competenze acquisite per risolvere problemi non convenzionali e argomentare le proprie strategie, anche in assenza di supporti visivi o partendo da disuguaglianze

(Vengono riportate alcune tra le slide proposte)

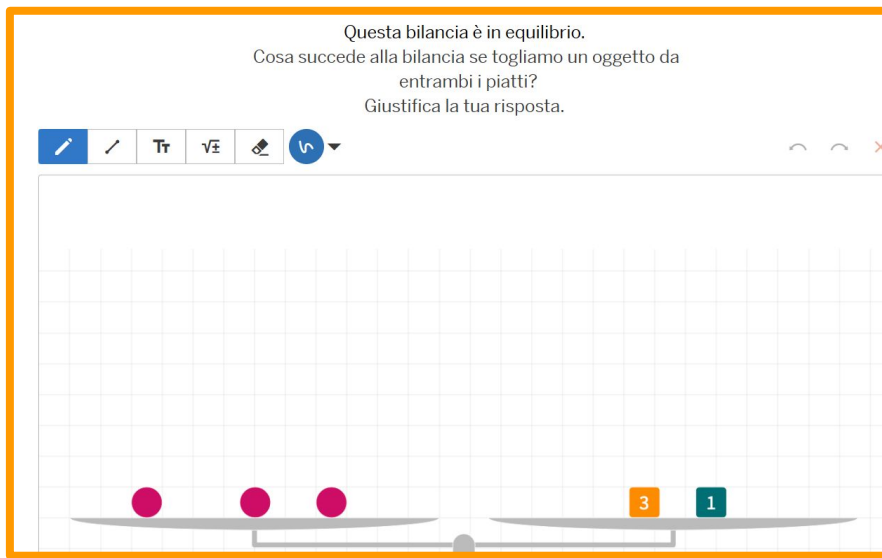


Slide 13 →

In questa slide l'attenzione si sposta dai valori numerici alle relazioni tra le quantità. Gli studenti sono chiamati a riflettere sulle proprietà dell'equilibrio, analizzando gli effetti di una stessa trasformazione applicata a entrambi i membri.

I ragazzi cercano prima i valori dell'incognita senza lanciarsi in ragionamenti generali.

In tutto ci sono tre palline e dall'altra parte ci sono 3 e 1 che sommati fanno quattro. Quindi per capire quanto vale un cerchio solo si fa $4 \div 3$ che è uguale a 1,3 circa. Quindi si può togliere un cerchio e un peso da uno, così sarà la bilancia a destra più in giù, ma è il modo migliore



Ho diviso 4 per 3 e ho scoperto che 1 pallina $= 1,333333333...$. Quindi se tolgo 1 alla bilancia a destra e una pallina a sinistra, la bilancia si inclinerà verso destra.

es 13 non può essere in equilibrio perché 3 diviso 4 non fa uno

Slide 14 →

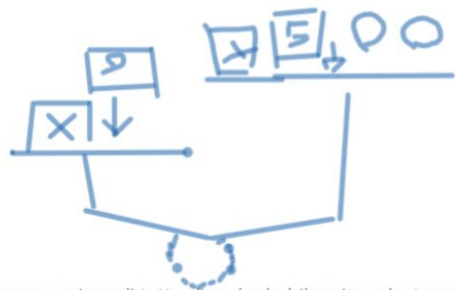
L'assenza del disegno in questa slide fa in modo che il focus si sposti dall'azione manipolativa sui piatti della bilancia alla riflessione cognitiva e alla modellizzazione. Senza un supporto visivo diretto, l'alunno deve costruire una rappresentazione mentale della situazione, riflettere sulle relazioni tra le parti e sulle azioni necessarie per compensare lo squilibrio. Il baricentro dell'attività non è più lo spostamento fisico dei pesi, ma la capacità di formulare, strutturare e giustificare logicamente la propria argomentazione.

Proposte diverse serviranno per stimolare la discussione anche con chi ha avuto più difficoltà nel trovare una risposta personale soddisfacente.

Immagina una bilancia che pende a sinistra.
A sinistra aggiungo un peso da 9.
A destra aggiungo un peso da 5 e due palline rosse.
La bilancia è in equilibrio.
Cosa puoi dire?
Giustifica la tua risposta.



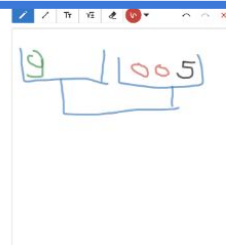
Slide 14



posso prima di tutto dire che la bilancia a destra o è vuota oppure che il peso che ha (y) è minore di x, posso dire anche che il peso da 5 e le due palline sono in tutto più pesanti di 9 e che la differenza tra x e y (oppure direttamente x) sia uguale alla differenza tra i pesi 5 più le due palline e 9.

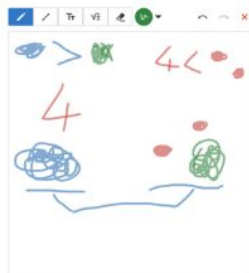
Discussione!

$9 - 5 = 4$, quindi vuol dire che due palline rosse valgono 4, per trovare il valore solo di una pallina faccio $4 : 2 = 2$. Quindi una pallina rossa vale 2.



Si può dire che le palline rosse pesano meno di due. Finché se pesassero due la bilancia sarebbe in equilibrio

Immagina una bilancia che pende a sinistra.
A sinistra aggiunge un peso da 9.
A destra aggiunge un peso da 5 e due palline rosse.
La bilancia è in equilibrio.
Cosa puoi dire?
Giustifica la tua risposta.



Togliendo 5 a tutte e due le bilance scopro che la bilancia a destra ha un numero indefinito maggiore di quello a sinistra e so che le 2 palline rosse sono maggiori di 4

+9 +5
+ x 2 palline rosse
(quello che faceva pendere la bilancia a sinistra)
 $9 + x = 5 + 2 \text{ palline}$
Questo vuol dire che $5 + 2 \text{ palline}$ pesa di più di 9
 $5 + 2 \text{ palline} > 9$
 $2 \text{ palline} > 4$
 $1 \text{ pallina} > 2$

Slide 15 →

In questo esercizio continua la richiesta di un processo di astrazione e di ricerca delle relazioni tra le parti, che lo studente è chiamato a esplicitare argomentando e giustificando la propria idea.

Le risposte sono di nuovo condivise con la classe per discuterne insieme e aiutare anche chi ha avuto più difficoltà a trovare una strada per costruire il proprio ragionamento.

Immagina una bilancia in equilibrio.
Da destra tolgo una peso da 5.
Da sinistra tolgo un peso da 2 e un peso rosso.
La bilancia pende a destra.
Che cosa puoi dire? Giustifica la tua risposta.

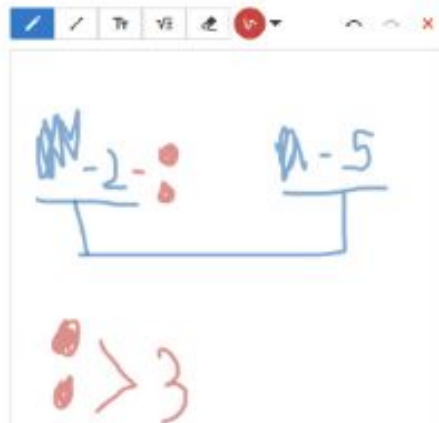


La situazione iniziale è
 $2 + \text{peso rosso} + x = 5 + y$

Poi diventa
 $x < y$

Perciò so che
 $2 + \text{peso rosso} > 5$
 $\text{peso rosso} > 3$

Se la bilancia non è in equilibrio vuol dire che il peso rosso vale meno di 5, quindi può valere da 1 a 4.



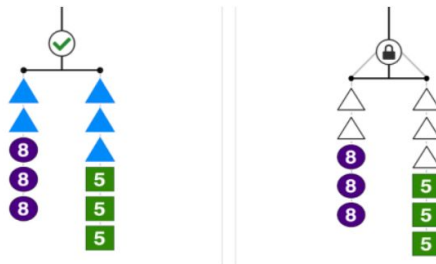
Bilance virtuali a gancio

Proseguiamo proponendo ai ragazzi alcune delle attività in DESMOS con “Bilancia a gancio” <https://www.carme.center/risorse-dynamat/>

Sequenza di attività in DESMOS con “Bilancia a gancio”

In questa breve sequenza di attività si possono esplorare una serie di bilance a gancio contenenti oggetti dal peso noto o non noto.

Visualizza in DESMOS



Il lavoro pregresso e la conformazione delle nuove bilance hanno spinto gli studenti a focalizzarsi direttamente sulla ricerca dell'incognita, abbandonando il procedere per tentativi.

Bilance virtuali a gancio, breve descrizione

Nello studio di bilance a gancio sono proposte complessivamente 14 slide + 1 (la prima) utile per prendere dimestichezza con la bilancia, che ho suddiviso in questo modo e per le quali documenterò le risposte per gruppi di slide:

Slide	Gruppo	Cosa viene chiesto
Da 2 a 5	Determinare un'incognita singola	Trovare il valore di un peso incognito agendo direttamente sulla bilancia
Da 6 a 9	Ricercare intervalli	Introdurre l'idea di intervallo di soluzioni. Analizzare come il variare di un'incognita modifichi qualitativamente lo stato del sistema
Da 10 a 15	Cercare di determinare due incognite	Ragionare su intervalli di soluzioni o su coppie di soluzioni possibili per due variabili

Bilance virtuali a gancio, modalità di lavoro

Gli studenti hanno lavorato sempre nell'aula di informatica, ciascuno utilizzando il proprio computer. È stata lasciata loro piena autonomia nell'affrontare le prime cinque slide, sulle quali hanno dimostrato di sapersi orientare con buona agilità.

Successivamente ci siamo soffermati sulle slide seguenti, in particolare sulle slide 8 e 9, dedicate alle equazioni impossibili e indeterminate.

Le slide successive non sono state affrontate dall'intera classe, ma solo dagli alunni che procedevano più velocemente e che si sono cimentati con interesse in attività di maggiore difficoltà. Tali attività, tuttavia, non hanno fatto parte della discussione collettiva, ma sono state oggetto di brevi confronti individuali con il docente, svolti durante il lavoro in classe.

Nelle slide successive sono riportate esclusivamente le discussioni ritenute più significative ai fini della documentazione del percorso.

Slide 2 →

I ragazzi si sentono abbastanza sicuri e procedono senza trovare grosse differenze con le richieste già incontrate nelle bilance a piatti. In questa prima parte sono chiamati soprattutto a consolidare e prendere confidenza con la nuova tipologia di bilance.

La bilancia di sinistra che vedi è in equilibrio. E' possibile scoprire quanto pesa il cerchio?

Puoi utilizzare la bilancia di destra e il tasto "Proviamo" per verificare cosa succede variando il peso del cerchio.

peso del cerchio

Proviamo

The image shows a digital interface for a balance scale puzzle. At the top, there is a text box explaining the goal: to find the weight of a circle by using a balance scale. Below the text, there are two scale diagrams. The left scale is in equilibrium, indicated by a green checkmark in a circle. It has three weights (3, 2, 3) on the left pan and one purple circle on the right pan. The right scale is locked, indicated by a padlock icon in a circle. It has three weights (3, 2, 3) on the left pan and one white circle on the right pan. Above the scales, there is a text box asking for the weight of the circle and a button labeled 'Proviamo' (Try). To the right of the scales, there is a box labeled 'peso del cerchio' (weight of the circle) with a text input field.

Qui possiamo calcolare velocemente perché possiamo sapere $3+2+3=8$ quindi scriviamo 5 per fare equilibrio. **X=5**

Slide 5

Anche in questa fase ciascuno si esprime con le modalità che ritiene più semplici. Le risposte vengono quindi proiettate e condivise con la classe, avviando anche una riflessione su quali forme di comunicazione risultino più efficaci e chiare.

La bilancia di sinistra che vedi è in equilibrio. E' possibile scoprire quanto pesa il triangolo? Puoi utilizzare la bilancia di destra e il tasto "Proviamo" per verificare cosa succede variando il peso di ciascun triangolo.

peso del triangolo: 9 kg

Riproviamo

The image shows two balance scales. The left scale is in equilibrium, with 3 blue triangles on the left pan and 3 green squares (each labeled 5) on the right pan. The right scale is also in equilibrium, with 3 purple circles (each labeled 8) on the left pan and 3 green squares (each labeled 5) on the right pan. Above the scales, there is a text box explaining the task and a control panel with a 'Riproviamo' button and a display showing 'peso del triangolo: 9 kg'.

SLIDE 5 Ho notato che levando $2x$ da entrambe le bilance, tornerebbe che è rimasto $8+8+8=24$ è una x con $5+5+5=15$. Quindi ho fatto $24-15=9$, alla fine $x=9$.

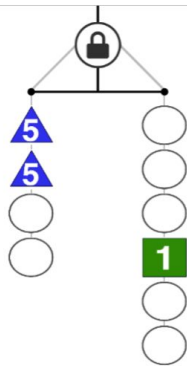
SLIDE 5.

$$\cancel{x} + \cancel{x} + 8 + 8 + 8 = \cancel{x} + \cancel{x} + x + 5 + 5 + 5$$
$$8 + 8 + 8 = x + 5 + 5 + 5$$
$$24 = x + 15$$
$$24 - 15 = x$$
$$x = 9$$

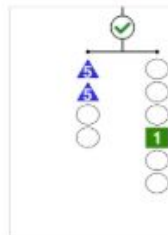
Slide 6 →

Le slide dedicate alle disuguaglianze mettono in difficoltà alcuni alunni. Decido quindi di rimandare la discussione a un momento successivo, per evitare di sovraccaricare gli studenti più fragili con troppi nuovi concetti contemporaneamente. Scelgo invece di concentrare il confronto sulle slide 8 e 9, dedicate alle equazioni impossibili e indeterminate.

Una alunna analizza i vari casi. Questa proposta sarà poi utilizzata per discussioni future.



Per quali valori del peso del cerchio questa bilancia pende a destra? E a sinistra? E per quali valori è in equilibrio?

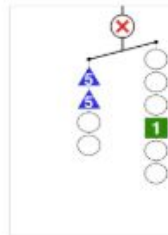


Per quali valori del peso del cerchio questa bilancia pende a destra? E a sinistra? E per quali valori è in equilibrio?

peso del cerchio	
0	10

Risposta

Con 3 rimane in equilibrio

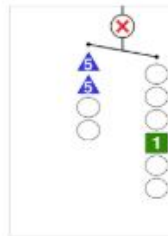


Per quali valori del peso del cerchio questa bilancia pende a destra? E a sinistra? E per quali valori è in equilibrio?

peso del cerchio	
0	10

Risposta

< 3 pende a sinistra



Per quali valori del peso del cerchio questa bilancia pende a destra? E a sinistra? E per quali valori è in equilibrio?

peso del cerchio	
0	10

Risposta

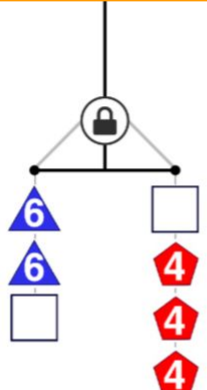
>3 pende a destra

Slide 8 →

In modo autonomo i ragazzi stabiliscono quando un'equazione ha infinite soluzioni.

Qua ci può essere tutti i numeri perchè la parte numerale è uguale e il numero degli cubi sono uguali

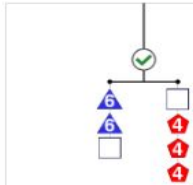
Rimane sempre in equilibrio, per qualsiasi valore del peso del quadrato perchè $6+6=4+4+4$



Per quali valori del peso del quadrato questa bilancia pende a destra? E a sinistra? E per quali valori è in equilibrio?

peso del quadrato

Proviamo



Per quali valori del peso del quadrato questa bilancia pende a destra? E a sinistra? E per quali valori è in equilibrio?

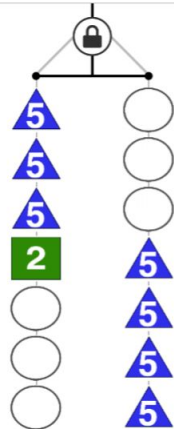
peso del quadrato

342 kg

Riproviamo

qualunque numero va bene perchè è come dire x uguale x

In modo
autonomo i
ragazzi
stabiliscono
quando
un'equazione
non ha soluzioni.



peso del cerchio

3) $5 \cdot 3 + 2 + 3 \cdot 17$ ~~$3 \cdot 17 + 20$~~ ~~$3 \cdot 17 + 20$~~ ~~$3 \cdot 17 + 20$~~ ~~$3 \cdot 17 + 20$~~ ~~$3 \cdot 17 + 20$~~
 $17 < 20$
 $17 < 20$

pente a Perché il ^{quantità} ~~numero~~
 $\Rightarrow$ Destra ~~lavora~~ $x=20$
 di x è sempre uguale da
 due lati, quindi è sempre più
 pesante quello che ha 20

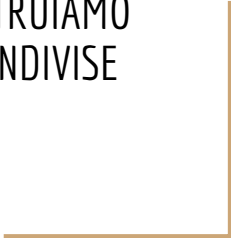
qua qualunque numero metti penderà sempre a destra

la bilancia pende a destra
perché posso togliere tutto e a
destra avanzerebbe tre.



RIELABORAZIONE IN CLASSE

RIFLETTIAMO INSIEME E COSTRUIAMO
SIGNIFICATI E STRATEGIE CONDIVISE



Rilettura e lavoro in classe - Primo principio

Gli studenti vengono invitati a riprodurre sul quaderno una delle situazioni affrontate e a rielaborare per iscritto quanto discusso in classe, con l'obiettivo di generalizzare le osservazioni emerse e individuare un criterio condiviso per semplificare i due piatti della bilancia.

$$1 + x + x + x + 3 = x + 2 + 4$$

Posso eliminare due elementi identici da ciascuna bilancia poiché se rimuovo due oggetti da ogni piatto (in equilibrio), vuol dire sto togliendo la stessa quantità e che sto mantenendo l'equilibrio.

In questo caso faccio:

$$\cancel{x} + \cancel{x} + x + x + \cancel{x} = \cancel{x} + 2 + \cancel{x}$$

$$x + x = 2$$

$$\cancel{1} + x + x + \cancel{x} + \cancel{3} = \cancel{x} + 2 + \cancel{4}$$

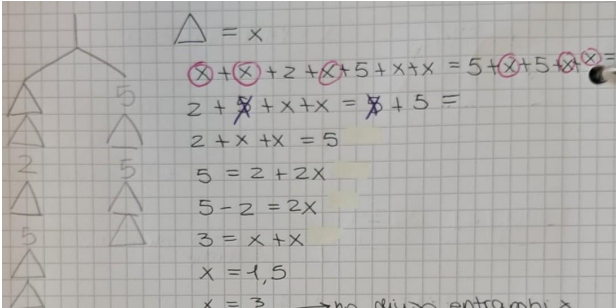
Posso eliminare le x perché togliendo le stesse cose dai 2 piatti, la bilancia rimane in equilibrio.

Poi tolgo $1+3$ da una parte e 4 dall'altra perché $1+3=4$.

Da tutte le due parti hanno lo stesso equilibrio, se togliamo lo stesso peso da due parti piatti, rimane sempre in equilibrio.

Rilettura e lavoro in classe - Secondo principio

POSSO DIVIDERE PERCHÉ DIVIDENDO I DUE PIATTI PER
tra i piatti
un numero uguale la relazione rimane la stessa.



$\triangle = x$

$\cancel{x} + \cancel{x} + 2 + \cancel{x} + 5 + x + x = 5 + \cancel{x} + 5 + \cancel{x} =$

$2 + \cancel{x} + x + x = \cancel{x} + 5 =$

$2 + x + x = 5$

$5 = 2 + 2x$

$5 - 2 = 2x$

$3 = x + x$

$x = 1,5$

$x = \frac{3}{2} \rightarrow$ ho diviso entrambi x
lo stesso numero

Posso dividere perché divido
due elementi per lo stesso numero, mantenendo
l'equilibrio

$5x = 7 \rightarrow 5x : 5$ e $7 : 5$

$x = \frac{7}{5}$

POSSO DIVIDERE PERCHÉ LA BILANCIA
SE HA UN NUMERO DI UNITÀ SU
UN LATO, FACCIO SÌ CHE ANCHE NELL'ALTRO
LATO ABBAIA UN LO STESSO NUMERO CON
UNITÀ DIVERSE

I principi di equivalenza emergono dalle osservazioni degli studenti. Pur nascendo dall'analisi di situazioni specifiche, le loro riflessioni assumono progressivamente un valore generale e diventano il punto di partenza per una formalizzazione condivisa.

Rilettura e lavoro in classe - trascrizioni della bilancia

Viene inoltre condivisa una modalità comune di trascrizione delle bilance. Attraverso la discussione collettiva emerge l'utilità di abbandonare progressivamente il disegno della bilancia, mantenendo invece la rappresentazione attraverso i simboli.

Il valore dei simboli viene associato a una lettera (generalmente (x), ma senza vincoli rigidi).

Per stimolare gli studenti a sviluppare entrambi i membri dell'equazione senza abbandonarli dopo la prima trascrizione della situazione, dedicandosi esclusivamente ai calcoli numerici e tornando ai simboli solo al termine per individuare il valore dell'incognita, viene proposta una modalità di verifica diversa (slide 60).

$\triangle = x$

$\cancel{x} + \cancel{x} + 2 + \cancel{x} + 5 + x + x = 5 + \cancel{x} + 5 + \cancel{x} + \cancel{x} =$

$2 + \cancel{x} + x + x = \cancel{x} + 5 =$

$2 + x + x = 5$

$5 = 2 + 2x$

$5 - 2 = 2x$

$3 = x + x$

$x = 1,5$

$x = \frac{3}{2} \rightarrow$ no diviso entrambi x lo stesso numero

Posso dividere perché divido due elementi per lo stesso numero, mantenendo l'equilibrio

$5x = 7 \rightarrow 5x : 5 \text{ e } 7 : 5$

$x = \frac{7}{5}$

Equazioni non modellizzabili

Faccio una breve osservazione su queste equazioni.

Durante le esperienze svolte in classe (documentate nelle slide precedenti) avevamo già osservato come il modello della bilancia, pur essendo un efficace strumento di rappresentazione, limiti in alcuni casi le situazioni che è possibile incontrare in matematica: non sono infatti previsti pesi negativi né operazioni tra i valori associati ai mattoni.

Una volta individuate e condivise le azioni possibili sul modello, il passaggio all'insieme dei numeri è avvenuto però abbastanza con naturalezza. Le difficoltà incontrate dagli studenti a questo punto sono diventate principalmente legate al calcolo, mentre non hanno riguardato la gestione dello strumento equazione, acquisito con buona sicurezza.

Verifica non standard

L'attività proposta prevedeva una verifica composta da alcune bilance da rappresentare e successivamente trascrivere, con l'obiettivo di arrivare alla determinazione del peso incognito.

Ciascun alunno avrebbe svolto la prova; successivamente gli elaborati, identificati tramite un nickname sul retro, sarebbero stati distribuiti casualmente ai compagni per la correzione.

I ragazzi correggevano l'elaborato ricevuto durante un momento di correzione condivisa alla lavagna, accompagnato da una discussione libera sugli aspetti compresi e sulle eventuali difficoltà emerse. Successivamente ciascun alunno completava la correzione del compito ricevuto.

L'elaborato veniva poi restituito al proprietario, che inseriva un proprio commento sul lavoro svolto e poi lo consegnava al docente, il quale avrebbe successivamente elaborato una *valutazione descrittiva*(*) finale.

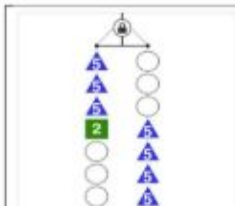
Questa modalità richiedeva che il correttore fosse in grado di comprendere il ragionamento seguito dall'autore del compito; diventava quindi fondamentale adottare un metodo di rappresentazione e di semplificazione condiviso, che permettesse a tutti di seguire il percorso svolto.

(*)*Si intende per valutazione descrittiva una valutazione priva di voto numerico, che descriva gli aspetti svolti correttamente, quelli da migliorare e le modalità di lavoro utili per progredire.*

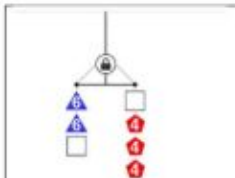
Verifica non standard

Esercizi sulle equazioni 1

1. Osserva la bilancia in equilibrio e
 - a. scrivi l'equazione corrispondente, utilizzando i simboli per descrivere il contenuto dei due piatti;
 - b. determina il valore di una singola sfera viola;
 - c. mostra tutti i passaggi matematici necessari per arrivare alla soluzione. Assicurati che la tua spiegazione sia basata esclusivamente sui simboli, in modo che il procedimento logico sia chiaro anche senza l'uso di parole.
2. Basandoti sull'esercizio precedente, progetta e disegna due diverse bilance in equilibrio che contengano almeno un peso incognito x :
 - a. **Bilancia A:** Crea una situazione in cui, per trovare il valore dell'incognita, sia necessario applicare il **Primo Principio di Equivalenza**.
 - b. **Bilancia B:** Crea una situazione in cui sia necessario applicare il **Secondo Principio di Equivalenza** per giungere alla soluzione.



- a. Per quali valori del peso del cerchio questa bilancia pende a destra? E a sinistra? E per quali valori è in equilibrio?
- b. Crea una scrittura in simboli di questa bilancia.
- c. Scrivi una nuova espressione simbolica differente dalla precedente, ma che porti allo stesso risultato finale.



- a. Per quali valori del peso del cerchio questa bilancia pende a destra? E a sinistra? E per quali valori è in equilibrio?
- b. Crea una scrittura in simboli di questa bilancia.
- c. Scrivi una nuova espressione simbolica differente dalla precedente, ma che porti allo stesso risultato finale.

5. Risolvi:

a. $4(x - 3) - 3(x - 5) = 3(x + 1)$

b.

$$\frac{5-3x}{4} + \frac{5}{3}x = \frac{3}{2} - \frac{3-5x}{3}$$

Esercizi sulle equazioni 2

1. In questi mesi hai lavorato con la bilancia fisica (quella vera nella quale mettevamo i pennarelli e i pesetti) e quella virtuale (quella al computer). Con quale hai preferito lavorare? Perché? Quali differenze hai notato esserci tra le due bilance?
2. Osserva la bilancia e descrivi in simboli quello che vedi nei due piatti. i due piatti sono in equilibrio.



Procedi poi nel determinare il valore di una sfera. Mostra nei simboli quali passaggi fai, ricorda: la logica con la quale arrivi ad ottenere il valore della sfera deve essere compreso anche da chi non riesce a leggere le parole, ma solo i simboli.

3. Osserva la bilancia e descrivi in simboli quello che vedi nei due piatti. i due piatti sono in equilibrio.



Procedi poi nel determinare il valore di una sfera. Mostra nei simboli quali passaggi fai, ricorda: la logica con la quale arrivi ad ottenere il valore della sfera deve essere compreso anche da chi non riesce a leggere le parole, ma solo i simboli.

4. Disegna la bilancia associata a questa equazione: $3x + 2 = 2x + 1$. Risolvi l'equazione (trova cioè il valore di x), sfruttando anche la bilancia se ti serve.
5. Come sai non tutte le equazioni possono essere rappresentate con una bilancia: i pesi negativi non esistono. Sfruttando quello che hai imparato a fare con le bilance, prova a risolvere questa equazione, senza passare dal disegno:

$$3x - 1 = 5$$

Testo per alunni con fragilità



BILANCE FISICHE O VIRTUALI?

OPINIONI DI CLASSE



Le bilance, considerazioni alunni

Nella verifica ho chiesto agli studenti cosa avessero apprezzato della bilancia fisica e cosa di quella virtuale, e con quale delle due avessero preferito lavorare.

La maggior parte della classe ha espresso una preferenza per la bilancia virtuale, ritenendola più precisa e semplice da utilizzare.

Gli studenti più fragili hanno invece dichiarato una maggiore affinità con la bilancia reale, legata alla possibilità di poterla manipolare concretamente e al maggiore coinvolgimento emotivo offerto dall'esperienza fisica. Questo, tuttavia, non si è tradotto in una maggiore facilità di comprensione dei concetti; a mio parere, la preferenza espressa sembra quindi essere legata più alla dimensione emotiva e percettiva dell'esperienza che a un effettivo vantaggio nell'apprendimento.

Le bilance, considerazioni alunni

Pro fisica

Pro virtuale

Ho preferito la bilancia sul PC perché con la bilancia vera spesso non tutti vedono cosa sta accadendo, ~~forse~~ invece sul PC tutti lo hanno davanti e possono lavorare con il proprio ritmo.

Ho preferito lavorare con le bilance virtuali perché pur avendo dei pesi limitati era molto + precisa e avevo più ~~preciso~~ ^{view} perché con questo mouse posso assistere alla regolazione o che si abbassasse una o l'altra cosa con la mano in quella virtuale si diceva quando era in equilibrio.

HO PREFERITO LAVORARE SULLA BILANCIA REALE PERCHÉ CAPIVO E VEDENDO MEGLIO PERCHÉ RUSCIVO A FARE RAGIONAMENTI, PROPIO DI SIC. POTEVO ~~ARREMETTERE QUALCOSA SI COFA~~ ^{ARREMETTERE QUALCOSA SI COFA} E FARE ESEMPLI E PROVE REALI MENTRE SULLA BILANCIA VIRTUALE MI DAVA CHE UN TOT DI PESO NON SI POTEVA METTERE.

mi è piaciuto di più provare con la bilancia reale perché toccando un qualcosa secondo me si trova anche di più il funzionamento

Bilancia fisica vs bilancia virtuale: riflessioni della docente

Per me la bilancia fisica è stata lo strumento di aggancio più semplice per coinvolgere davvero tutti, fin dall'inizio. Ha un livello tattile che porta con sé una componente emotiva che lo schermo non riesce a restituire allo stesso modo.

Con la bilancia virtuale, invece, coinvolgere i ragazzi in modo attivo e dinamico richiede un lavoro più esplicito da parte del docente: usare la pausa per fermarsi e confrontarsi con tutta la classe, catturare screenshot delle risposte da discutere insieme, passare tra i banchi per seguire il lavoro dei singoli.

La virtuale, d'altra parte, permette un uso più personale dello strumento e favorisce riflessioni più individuali; ha però il rischio di far perdere, nell'immediato, ragionamenti poco corretti che sfuggono a un monitoraggio in tempo reale.

A questo aggiungerei alcuni spunti: la bilancia fisica dà un riscontro immediato e concreto, perché l'equilibrio si vede e si sente, mentre la virtuale offre un feedback più "silenzioso", che il docente deve andare a cogliere attivamente attraverso la dashboard. Le due bilance sembrano avere anche una funzione didattica diversa: la fisica appare utile nell'esplorazione iniziale e la costruzione condivisa del senso di uguaglianza, mentre la virtuale si rivela più efficace nella fase di sganciamento e generalizzazione. C'è infine una differenza nei tempi e nei ritmi di lavoro: la fisica impone vincoli di turnazione, avendo a disposizione una sola bilancia per la classe, mentre la virtuale garantisce a ciascuno studente il proprio ritmo, come confermato dalle stesse testimonianze dei ragazzi. In sintesi, la sequenza fisica seguita da virtuale, adottata nel secondo anno di sperimentazione, sembra la combinazione più efficace: la fisica crea il senso condiviso dell'equilibrio, la virtuale lo consolida e lo estende.

Fronti di indagine aperti all'interno del percorso

Disuguaglianze e disequazioni: slide 13-15 (piatti) e 6-9 (gancio) introducono relazioni di disuguaglianza tra quantità incognite; il passaggio dall'equilibrio alla disuguaglianza si è rivelato un salto cognitivo importante, con difficoltà maggiori per gli alunni più fragili.

Sistemi a due incognite: le slide 10-15 della bilancia a gancio, affrontate solo dagli alunni più veloci, aprono la strada a un lavoro sistematico sulle coppie di soluzioni.

Successioni e generalizzazione della lettera: il lavoro parallelo sulle successioni, condotto per rinforzare il significato di variabile, meriterebbe una documentazione a sé che ne segua l'evoluzione nel tempo.

Stima e incertezza di misura: le difficoltà con la bilancia fisica (taratura, approssimazione) hanno prodotto ragionamenti spontanei sull'errore di misura: un possibile ponte verso l'educazione alla statistica.

Linguaggio e rappresentazione: il passaggio da disegni e notazioni personali all'uso condiviso della lettera come incognita si presterebbe a un'analisi didattica autonoma.

Possibilità di miglioramento e sviluppi metodologici futuri

Il confronto tra bilancia fisica e bilancia virtuale, per quanto onesto, si è basato soprattutto sull'autopercezione degli studenti, raccolta attraverso una domanda aperta in sede di verifica. Un possibile sviluppo è un confronto più approfondito tra le due modalità, che separi la preferenza dichiarata dalla reale efficacia di apprendimento: ad esempio proponendo uno stesso tipo di problema risolto una volta con il supporto concettuale costruito sulla fisica e una volta su quello costruito sulla virtuale, e valutando i risultati con una rubrica di correttezza indipendente dal gradimento.



Un altro margine di miglioramento riguarda l'uso dei dati che la piattaforma Amplify Desmos già raccoglie in autonomia: registrare sistematicamente i tempi impiegati su ciascuna schermata e il numero di tentativi permetterebbe di affiancare ai racconti individuali un quadro oggettivo e comparabile su tutta la classe, invece di basarsi solo sugli elaborati più significativi selezionati per la discussione.

Amplify.

Infine, sarebbe utile riportare in modo più sistematico le discussioni sorte in classe durante il percorso, cosa resa difficile dal fatto di essere in aula a gestire la lezione in tempo reale. È proprio da queste discussioni, però, che emerge in modo molto più chiaro quanto gli obiettivi di apprendimento siano stati raggiunti non come acquisizione automatica, ma come frutto di argomentazione e confronto tra gli studenti.

